طريقة عددية لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة المشتقة والمعتلة باستخدام قاعدة سمبسون عندما تكون عدد الفترات الجزئية على البعدين غير متساوية

أ. علي حسن محمد رؤى عزيز فاضل

قسم الرياضيات /كلية التربية للبنات/جامعة الكوفة

المستخلص

الهدف الرئيسي للبحث هو إشتقاق قاعدة عددية لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة المشتقة و المعتلة في احدى نهايتي منطقة التكامل باستخدام قاعدة سمبسون على البعدين (الداخلي x و الخارجي y) و ايجاد حدود التصحيح لها(صيغة الخطأ) مع تحسين النتائج باستخدام تعجيل رومبرك من خلال حدود التصحيح التي نجدها عندما يكون عدد الفترات الجزئية (m) التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجي y ضعف عدد الفترات (n) التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الداخلي x ، ((n) ، (m) اعداد صحيحة زوجية) ، بالتحديد عندما($h_1=2h_2$) حيث h_1 تعني المسافة بين الاحداثيات على المحور x و h_2 تعني المسافة بين الاحداثيات على المحور y.

وسوف نرمز للقاعدة سمبسون على البعدين (الداخلي x والخارجي y) بالرمز(sim^2) وسنرمز للقاعدة مع تعجيل رومبرك بالرمز ($Rsim^2$) ويمكن الاعتماد على هذه الطريقة في حساب مثل تلك التكاملات حيث أعطت دقة عالية في النتائج بفترات قليلة نسبياً .

١- المقدمة:-

ان اهمية موضوع التحليل العددي تكمن في ابتكار طرائق تساهم في ايجاد حلول تقريبية لمسائل في الرياضيات ومنها التكاملات التي تشكل جزءاً مهما من هذا الموضوع اذ ان هذه الأهمية تكون واضحة أكثر في التطبيقات العملية التي يمارسها المهندسون والفيزيائيون ، تكمن المشكلة في ايجاد القيمة التقريبية للتكامل (عند محاولة ايجاد قيم تكامل احادي One Dimensional Integral معين) في سلوك المكامل ، أي فيما إذا كان المكامل متذبذبا أو مستمرا أو معتلا فضلا عن كون فترة التكامل (فترة مغلقة أو فترة مفتوحة) ومن الباحثين الذين عَمِلوا في التكاملات الاحادية فوكس [٢] عام ١٩٦٧ وفوكس وهيز [٣] عام ١٩٧٠ وشانكس [٦] ان عملية ايجاد قيمة التكامل الثنائي فانها تشكل مسألة اكثر تعقيداً من مشكلة ايجاد قيمة التكاملات الاحادية كون التكامل هنا يعتمد على متغيرين وان مسالة الاستمرارية للمكامل تشكل صعوبات كبيرة وكذلك فاننا سوف نتعامل مع مناطق التكامل (Region) او سطوح (surfaces) وليس مع فترات التكامل كما في حال التكامل الاحادية ، لهذا فان ايجاد قيم التكاملات من هذا النوع ليس بالأمر السهل لبعض الحالات وعليه اصبحت الحاجة ملحة لايجاد قيم تقريبية لهذه التكاملات وتكمن اهمية التكاملات الثنائية في ايجاد مساحة السطوح وايجاد المراكز المتوسطة والعزوم المركزية الذاتية للسطوح المستوية وايجاد الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي فرانك ايزر [8] مما دعا كثير من الباحثين الى العمل في مجال التكاملات الثنائية ومن الباحثين الذين سلطوا الضوء على حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة لكنهم كانوا يهملون الاعتلال دافييز ورابينوتز [4] عام ١٩٧٥ وضياء [7]عام ٢٠٠٩ ، عكار[9]عام ٢٠١٠ ، موسى[10] عام٢٠١١ ، ناصر[11] ٢٠١١.

وفي بحثنا هذا سوف نطبق طريقة تعجيل رومبرك [2] ، [6] على القيم الناتجة من استعمال قاعدة سمبسون على البعدين (الداخلي x والخارجي y) عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل الخارجي ضعف لعدد الفترات الجزئية التي يتجزأ اليها فترة التكامل الداخلي وبالتحديد عندما $h_1 = 2h_2$.

٢- حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة المشتقة والمعتلة باستخدام قاعدة سمبسون

Evaluate double integrals its integrands have singular derivatives and singular by use Simpson's rule

نفرض إن التكامل I معرف كالآتي :-

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy \qquad \ldots(1)$$

فيمكن كتابته بالصيغة :

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy=sim^2(h_1,h_2)+E_{sim^2}(h_1,h_2) \qquad \ldots(2)$$

والذي فيه الدالة $f(x,y)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]$ حيث إن $sim^2(h_1,h_2)$ تمثل قيمة تقريبية للتكامل باستخدام القاعدة sim^2 على كلا البعدين (الداخلي x والخارجي y) وان $E_{sim^2}(h_1,h_2)$ هي سلسلة حدود التصحيح الممكن إضافتها إلى قيم $sim^2(h_1,h_2)$ لنتمكن من استخدام تعجيل رومبرك .

سوف نقسم فترة التكامل على البعد الداخلي $[a,b]$ لعدد من الفترات الجزئية (n) ونقسم فترة التكامل على البعد الخارجي $[c,d]$ لعدد من الفترات الجزئية (m) ، $((n)،(m))$ اعداد صحيحة زوجية) ، حيث $h_1=\dfrac{b-a}{n}$ ، $h_2=\dfrac{d-c}{m}$ ،) وسنأخذ حالة خاصة فيها عندما $m=2n$) وبالتحديد عندما $h_1=2h_2$ وان الصيغة العامة للقاعدة $sim^2(h_1,h_2)$ هي

$$\begin{aligned}sim^2(h_1,h_2)=\frac{h_1h_2}{9}\Bigg[\;&\Big[f(x_0,y_0)+2\sum_{i=1}^{(n/2)-1}f(x_{2i},y_0)+4\sum_{i=1}^{n/2}f(x_{2i-1},y_0)+f(x_n,y_0)\Big]\\&+2\Big[\sum_{j=1}^{(m/2)-1}f(x_0,y_{2j})+2\sum_{j=1}^{(m/2)-1}\sum_{i=1}^{(n/2)-1}f(x_{2i},y_{2j})+4\sum_{j=1}^{(m/2)-1}\sum_{i=1}^{n/2}f(x_{2i-1},y_{2j})+\sum_{j=1}^{(m/2)-1}f(x_n,y_{2j})\Big]\\&+4\Big[\sum_{j=1}^{m/2}f(x_0,y_{2j-1})+2\sum_{j=1}^{m/2}\sum_{i=1}^{(n/2)-1}f(x_{2i},y_{2j-1})+4\sum_{j=1}^{m/2}\sum_{i=1}^{n/2}f(x_{2i-1},y_{2i-1})+\sum_{j=1}^{m/2}f(x_n,y_{2j-1})\Big]\\&+\Big[f(x_0,y_m)+2\sum_{i=1}^{(n/2)-1}f(x_{2i},y_m)+4\sum_{i=1}^{n/2}f(x_{2i-1},y_m)+f(x_n,y_m)\Big]\Bigg]\end{aligned} \qquad \ldots(3)$$

حيث أن :- $x_i=a+ih_1$ ، $i=0,1,2,\ldots,n$ ، $y_j=c+jh_2$ ، $j=0,1,2,\ldots,m$

بيردن وفرس [1]

وحدود التصحيح هي

$$E_{sim^2}=I-sim^2(h_1,h_2)=A_1h_1^4+A_2h_2^4+A_3h_1^6+A_4h_2^6+\cdots \qquad \ldots(4)$$

حيث $A_1,A_2,A_3,A_4,\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة فقط ولا تعتمد على h_1 و h_2 .

وعندما $h_1=2h_2$ فان حدود التصحيح تصبح بالشكل

$$E_{sim^2} = I - sim^2(h_1,h_2) = B_1 h_1^4 + B_2 h_1^6 + \cdots \qquad \ldots(5)$$

حيث $B_1, B_2, \ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة فقط ولا تعتمد على h_1.

<u>اولاً:- التكاملات الثنائية لمكاملات معتلة المشتقة</u>

لنفرض الان ان $f(x,y)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]$ وليس لها اعتلال ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة Undefined في نقطة واحدة أو أكثر من منطقة التكامل وسنناقش كيفية حساب قيمة هذا التكامل اعلاه بالحالات الاتية:-

الحالة الاولى

مبرهنة (١) :- لتكن الدالة $f(x,y)$ مستمرة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]$ ولكن على الاقل احدى المشتقات الجزئية لها غير معرفة عند النقطة (a,c) فان القيمة التقريبية للتكامل الثنائي I يمكن حسابها من القاعدة الاتية

$$I = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy = sim^2(h_1,h_2) + E_{sim^2}(h_1,h_2) \;;$$

$$E_{sim^2}(h_1,h_2) = \Big[\left(a_1 h_1^5 h_2 D_x^4 + a_2 h_1 h_2^5 D_y^4\right) + \left(a_3 h_1^7 h_2 D_x^6 + a_4 h_1 h_2^7 D_y^6 + a_5 h_1^6 h_2^2 D_x^5 D_y + a_6 h_1^2 h_2^6 D_x D_y^5\right.$$
$$\left. + a_7 h_1^5 h_2^3 D_x^4 D_y^2 + a_8 h_1^3 h_2^5 D_x^2 D_y^4\right) + \left(a_9 h_1^8 h_2 D_x^7 + a_{10} h_1 h_2^8 D_y^7 + \ldots\right) + \ldots \Big] f(x_1,y_1) + A_1 h_1^4 + A_2 h_2^4$$
$$+ A_3 h_1^6 + A_4 h_2^6 + \ldots$$

حيث $l = 1,2,3,\ldots, A_l, a_l$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة فقط و $x_i = a + ih_1$, $i = 0,1,2,\ldots,n$,

$y_j = c + jh_2$, $j = 0,1,2,\ldots,m$ حيث ان $sim^2(h_1,h_2)$ مماثلة للصيغة (٣)

البرهان:- التكامل الثنائي I معرف بالصيغة

$$I = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy = \int_{y_0}^{y_m} \int_{x_0}^{x_n} f(x,y)\,dxdy = sim^2(h_1,h_2) + E_{sim^2}(h_1,h_2)$$

يمكن كتابته بالصيغة

$$I = \int_{y_0}^{y_m} \int_{x_0}^{x_n} f(x,y)\,dxdy = \int_{y_0}^{y_2} \int_{x_0}^{x_2} f(x,y)\,dxdy + \int_{y_0}^{y_2} \sum_{k=1}^{(n/2)-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x,y)\,dxdy + \sum_{l=1}^{(m/2)-1} \int_{y_{2l}}^{y_{2l+2}} \int_{x_0}^{x_2} f(x,y)\,dxdy$$
$$+ \int_{y_2}^{y_m} \int_{x_2}^{x_n} f(x,y)\,dxdy = I_1 + I_2, I_3, I_4 \qquad \ldots(6)$$

عكار [9]

نلاحظ هنا أنّ التكاملات الثاني والثالث والرابع (I_2, I_3, I_4) فيها دالة التكامل $f(x,y)$ مستمرة وغير معتلة المشتقات الجزئية في كل نقطة من نقاط مناطق تكاملاتها لذا يمكن حساب قيم هذه التكاملات من خلال الصيغتين (٣)، (٤)، أمّا التكامل الاول (I_1) فيه دالة التكامل $f(x,y)$ مستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية في المنطقة الجزئية $[x_0,x_2]\times[y_0,y_2]$ تحديداً في النقطة (x_0,y_0) وهذا يعني أن متسلسلة تايلر للدوال ذات المتغيرين Taylor's series for a functions of two variables

، موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل ماعدا النقطة (x_0, y_0) سستري [٥] ، لذا سنستخدم هذه المتسلسلة في نشر الدالة $f\ (x, y)$ حول النقطة (x_2, y_2) وسنحسب قيم هذه التكاملات بشكل متسلسل .

بالنسبة للتكامل الأول في المنطقة الجزئية $[x_0, x_2]\times[y_0, y_2]$ نستعمل متسلسلة تايلر لنشر للدالة $f\ (x, y)$ حول النقطة (x_2, y_2) فنحصل على :-

$$f(x,y)=\Big[1+(x-x_2)D_x+(y-y_2)D_y+\frac{(x-x_2)^2}{2!}D_x^2+(x-x_2)(y-y_2)D_xD_y+\frac{(y-y_2)^2}{2!}D_y^2$$
$$+\frac{(x-x_2)^3}{3!}D_x^3+\frac{(x-x_2)^2(y-y_2)}{2!}D_x^2D_y+\frac{(x-x_2)(y-y_2)^2}{2!}D_xD_y^2+\frac{(y-y_2)^3}{3!}D_y^3+$$
$$\frac{(x-x_2)^4}{4!}D_x^4+\frac{(x-x_2)^3(y-y_2)}{3!}D_x^3D_y+\frac{(x-x_2)^2(y-y_2)^2}{2!\times 2!}D_x^2D_y^2+\frac{(x-x_2)(y-y_2)^3}{3!}D_xD_y^3$$
$$+\frac{(y-y_2)^4}{4!}D_y^4+\frac{(x-x_2)^5}{5!}D_x^5+\frac{(y-y_2)^5}{5!}D_y^5+\cdots\Big]f\ (x_2,y_2) \qquad \ldots(7)$$

على فرض إن جميع المشتقات الجزئية لـ $f\ (x, y)$ موجودة عند النقطة (x_2, y_2) وبأخذ التكامل الثنائي للصيغة في أعلاه في المنطقة $[x_0, x_2]\times[y_0, y_2]$ نحصل على :-

$$\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_2} f\ (x,y)\,dxdy=\Big[\ 4h_1h_2-4h_1^2h_2D_x-4h_1h_2^2D_y+\frac{16}{3!}h_1^2h_2D_x^2+4h_1^2h_2^2D_xD_y+\frac{16}{3!}h_1h_2^3D_y^2$$
$$-\frac{32}{4!}h_1^4h_2D_x^3-\frac{8}{3}h_1^3h_2^2D_x^2D_y-\frac{8}{3}h_1^2h_2^3D_xD_y^2-\frac{32}{4!}h_1h_2^4D_y^3+\frac{64}{5!}h_1^5h_2D_x^4$$
$$+\frac{64}{36}h_1^3h_2^3D_x^2D_y^2+\frac{64}{48}h_1^4h_2^2D_x^3D_y+\frac{64}{48}h_1^2h_2^4D_xD_y^3+\frac{64}{5!}h_1h_2^5D_y^4-\frac{128}{6!}h_1^6h_2D_x^5$$
$$-\frac{128}{6!}h_1h_2^6D_y^5+\cdots\ \Big]f\ (x_2,y_2) \qquad \ldots(8)$$

ومن (٧) نحصل على الاتي

i) $$f\ (x_0,y_0)=\Big[\ 1-2h_1D_x-2h_2D_y+2h_1^2D_x^2+2h_2^2D_y^2+4h_1h_2D_xD_y-\frac{8}{3!}h_1^3D_x^3-4h_1^2h_2D_x^2D_y-$$
$$4h_1h_2^2D_xD_y^2-\frac{8}{3!}h_2^3D_y^3+\frac{16}{4!}h_1^4D_x^4+4h_1^2h_2^2D_x^2D_y^2+\frac{16}{3!}h_1^3h_2D_x^3D_y$$
$$+\frac{16}{3!}h_1h_2^3D_xD_y^3+\frac{16}{4!}h_2^4D_y^4-\frac{32}{5!}h_1^5D_x^5-\frac{32}{5!}h_2^5D_y^5+\cdots\ \Big]f\ (x_2,y_2) \qquad \ldots(9)$$

ii) $$f\ (x_0+h,y_0)=\Big[\ 1-h_1D_x-2h_2D_y+\frac{1}{2!}h_1^2D_x^2+2h_1h_2D_xD_y+2h_2^2D_y^2-\frac{1}{3!}h_1^3D_x^3-$$
$$h_1^2h_2D_x^2D_y-2h_1h_2^2D_xD_y^2-\frac{8}{3!}h_2^3D_y^3+\frac{1}{4!}h_1^4D_x^4+\frac{2}{3!}h_1^3h_2D_x^3D_y$$
$$+h_1^2h_2^2D_x^2D_y^2+\frac{8}{3!}h_1h_2^3D_xD_y^3+\frac{16}{4!}h_2^4D_y^4-\frac{1}{5!}h_1^5D_x^5-\frac{32}{5!}h_2^5D_y^5+\cdots\ \Big]f\ (x_2,y_2) \qquad \ldots(10)$$

iii) $f\left(x_2,y_0\right)=\left[\ 1-2h_2D_y+2h_2^2D_y^2-\frac{8}{3!}h_2^3D_y^3+\frac{16}{4!}h_2^4D_y^4-\frac{32}{5!}h_2^5D_y^5+\cdots\ \right]f\left(x_2,y_2\right)$ …(11)

iv) $f\left(x_0,y_0+h_2\right)=\left[\ 1-2h_1D_x-h_2D_y+2h_1^2D_x^2+\frac{1}{2!}h_2^2D_y^2+2h_1h_2D_xD_y-\frac{8}{3!}h_1^3D_x^3-\right.$

$$2h_1^2h_2D_x^2D_y-h_1h_2^2D_xD_y^2-\frac{1}{3!}h_2^3D_y^3+\frac{16}{4!}h_1^4D_x^4+\frac{8}{3!}h_1^3h_2D_x^3D_y+$$

$$\left.h_1^2h_2^2D_x^2D_y^2+\frac{2}{3!}h_1h_2^3D_xD_y^3+\frac{h_2^4}{4!}D_y^4-\frac{32}{5!}h_1^5D_x^5-\frac{h_2^5}{5!}D_y^5+\cdots\ \right]f\left(x_2,y_2\right) \quad \ldots(12)$$

v) $f\left(x_0+h_1,y_0+h_2\right)=\left[\ 1-h_1D_x-h_2D_y+\frac{1}{2!}h_1^2D_x^2+\frac{1}{2!}h_2^2D_y^2+h_1h_2D_xD_y-\frac{1}{3!}h_1^3D_x^3-\right.$

$$\frac{1}{2!}h_1^2h_2D_x^2D_y-\frac{1}{2!}h_1h_2^2D_xD_y^2-\frac{1}{3!}h_2^3D_y^3+\frac{1}{4!}h_1^4D_x^4+\frac{1}{3!}h_1^3h_2D_x^3D_y$$

$$+\frac{1}{4}h_1^2h_2^2D_x^2D_y^2+\frac{1}{3!}h_1h_2^3D_xD_y^3+\frac{1}{4!}h_2^4D_y^4-\frac{1}{5!}h_1^5D_x^5-\frac{1}{5!}h_2^5D_y^5$$

$$\left.+\cdots\ \right]f(x_2,y_2) \quad \ldots(13)$$

vi) $f\left(x_2,y_0+h_2\right)=\left[\ 1-h_2D_y+\frac{h_2^2}{2!}D_y^2-\frac{h_2^3}{3!}D_y^3+\frac{h_2^4}{4!}D_y^4-\frac{h_2^5}{5!}D_y^5+\cdots\ \right]f\left(x_2,y_2\right)$ …(14)

vii) $f\left(x_0,y_2\right)=\left[\ 1-2h_1D_x+2h_1^2D_x^2-\frac{8}{3!}h_1^3D_x^3+\frac{16}{4!}h_1^4D_x^4-\frac{32}{4!}h_1^5D_x^5+...\ \right]f\left(x_2,y_2\right)$ …(15)

viii) $f\left(x_0+h_1,y_2\right)=\left[\ 1-h_1D_x+\frac{h_1^2}{2!}D_x^2-\frac{h_1^3}{3!}D_x^3+\frac{h_1^4}{4!}D_x^4-\frac{h_1^5}{5!}D_x^5+\cdots\ \right]f\left(x_2,y_2\right)$ …(16)

من الصيغ (8)، (9)، (10) ، (11) ، (12)، (13)، (14) ، (15) ، (16) نحصل على :-

$$I_1=\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_2}f\left(x,y\right)dxdy=\frac{h_1h_2}{9}\left[\ f\left(x_0,y_0\right)+f\left(x_2,y_2\right)+f\left(x_0,y_0\right)+f\left(x_2,y_2\right)+4\left(f\left(x_0,y_0+h_2\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+f\left(x_2,y_0+h_2\right)+f\left(x_0+h_1,y_0\right)+f\left(x_0+h_1,y_2\right)+4f\left(x_0+h_1,y_0+h_2\right)\right)\ \right]+\left[-\frac{1}{45}\left(h_1^5h_2D_x^4\right.\right.$$

$$\left.\left.+h_1h_2^5D_y^4\right)+\frac{1}{45}\left(h_1^6h_2D_x^5+h_1h_2^6D_y^5+h_1^5h_2^2D_x^4D_y+h_1^2h_2^5D_x\ D_y^4\right)+\cdots\ \right]f\left(x_2,y_2\right) \quad \ldots(17)$$

وبما أن $f\left(x_2,y_2\right)=Ef\left(x_1,y_1\right)$ $(Ef(x,y)=f(x+h_1,y+h_2))$ و $E=e^{h_1D_x+h_2D_y}$ فان :

$$I_1=\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_2}f\left(x,y\right)dxdy=\frac{h_1h_2}{9}\left[\ f\left(x_0,y_0\right)+f\left(x_0,y_2\right)+f\left(x_2,y_0\right)+f\left(x_2,y_2\right)+4\left(f\left(x_0,y_0+h_2\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+f\left(x_2,y_0+h_2\right)+f\left(x_0+h_1,y_0\right)+f\left(x_0+h_1,y_2\right)+4f\left(x_0+h_1,y_0+h_2\right)\ \right)\ \right]+\left[-\frac{1}{45}\left(h_1^5h_2D_x^4\right.\right.$$

$$\left.\left.+h_1h_2^5D_y^4\right)+\frac{1}{45}\left(h_1^6h_2D_x^5+h_1h_2^6D_y^5+h_1^5h_2^2D_x^4D_y+h_1^2h_2^5D_x\ D_y^4\right)+\cdots\ \right]Ef\left(x_1,y_1\right) \quad \ldots(18)$$

$$\therefore I_1=\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_2} f\,(x,y)\,dxdy=\frac{h_1h_2}{9}\Big[\ f\,(x_0,y_0)+f\,(x_2,y_2)+f\,(x_0,y_0)+f\,(x_2,y_2)+4\big(f\,(x_0,y_0+h_2)$$

$$+f\,(x_2,y_0+h_2)+f\,(x_0+h_1,y_0)+f\,(x_0+h_1,y_2)+4f\,(x_0+h_1,y_0+h_2)\ \big)\ \Big]+\Big[\ \big(a_1h_1^5h_2D_x^4$$

$$a_2h_1h_2^4D_y^4\big)+\big(a_3h_1^7h_2D_x^6+a_4h_1h_2^7D_y^6+a_5h_1^6h_2^2D_x^5D_y+a_6h_1^2h_2^6D_xD_y^5+a_7h_1^5h_2^3D_x^4D_y^2+$$

$$+a_8h_1^3h_2^5D_x^2D_y^4\big)+\big(a_9h_1^8h_2D_x^7+a_{10}h_1h_2^8D_y^7+\ldots\big)+\ldots\ \Big]f\,(x_1,y_1) \qquad \ldots(19)$$

$$I_2=\int_{y_0}^{y_2}\sum_{k=1}^{(n/2)-1}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f\,(x,y)\,dxdy=\frac{h_1h_2}{9}\sum_{k=1}^{(n/2)-1}\Big[\ f\,(x_{2k},y_0)+f\,(x_{2k},y_2)+f\,(x_{2k+2},y_0)+f\,(x_{2k+2},y_2)$$

$$+4\big(\ f\,(x_{2k},y_0+h_2)+f\,(x_{2k+2},y_0+h_2)+f\,(x_{2k}+h_1,y_0)+f\,(x_{2k}+h_1,y_2)+4f\,(x_{2k}+h_1,y_0+h_2)\ \big)\ \Big]$$

$$+e_1h_1^4+e_2h_2^4+e_3h_1^6+e_4h_2^6+\cdots \qquad \ldots(20)$$

$$I_3=\sum_{l=1}^{(m/2)-1}\int_{y_{2l}}^{y_{2l+2}}\int_{x_0}^{x_2} f\,(x,y)\,dxdy=\frac{h_1h_2}{9}\sum_{l=1}^{(m/2)-1}\Big[\ f\,(x_2,y_2)+f\,(x_0,y_{2l+2})+f\,(x_2,y_{2l})+f\,(x_2,y_{2l+2})$$

$$+4\big(f\,(x_0,y_{2l}+h_2)+f\,(x_2,y_{2l}+h_2)+f\,(x_0+h_1,y_{2l})+f\,(x_0+h_1,y_{2l+2})+4f\,(x_0+h_1,y_{2l}+h_2)\ \big)\ \Big]$$

$$+g_1h_1^4+g_2h_2^4+g_3h_1^6+g_4h_2^6+\cdots \qquad \ldots(21)$$

$$I_4=\int_{y_2}^{y_m}\int_{x_2}^{x_n} f\,(x,y)dxdy=\sum_{l=1}^{(m/2)-1}\int_{y_{2l}}^{y_{2l+2}}\sum_{k=1}^{(n/2)-1}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f\,(x,y)dxdy=\frac{h_1h_2}{9}\sum_{l=1}^{(m/2)-1}\sum_{k=1}^{(n/2)-1}\Big[\ f\,(x_{2k},y_{2l})+f\,(x_{2k},y_{2l+2})$$

$$f\,(x_{2k+2},y_{2l})+f\,(x_{2k+2},y_{2l+2})+4(f\,(x_{2k}+h_1,y_{2l})+f\,(x_{2k}+h_1,y_{2l+2})+f\,(x_{2k},y_{2l}+h_2)$$

$$f\,(x_{2k+2},y_{2l}+h_2)+4f\,(x_{2k}+h_1,y_{2l+2}+h_2)\ \big)\ \Big]+j_1h_1^4+j_2h_2^4+j_3h_1^6+j_4h_2^6+\cdots \qquad \ldots(22)$$

حيث $e_i\,,g_i\,,j_i$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f\,(x,y)$ فقط و $i=1,2,\ldots$

وبجمع الصيغ (19) ، (20)،(21) ، (22) نحصل على :-

$$I=\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f\,(x,y)\,dxdy=sim^2(h_1,h_2)+\Big[\ \big(a_1h_1^5h_2D_x^4+a_2h_1h_2^4D_y^4\big)+\big(a_3h_1^7h_2D_x^6+a_4h_1h_2^7D_y^6+$$

$$a_5h_1^6h_2^2D_x^5D_y+a_6h_1^2h_2^6D_xD_y^5+a_7h_1^5h_2^3D_x^4D_y^2+a_8h_1^3h_2^5D_x^2D_y^4\big)+\big(a_9h_1^8h_2D_x^7+$$

$$a_{10}h_1h_2^8D_y^7+\ldots\big)+\cdots\ \Big]f\,(x_1,y_1)+A_1h_1^4+A_2h_2^4+A_3h_1^6+A_4h_2^6+\ldots \qquad \ldots(23)$$

وبهذا ينتهي البرهان وفي حالة خاصة عندما $h_1=2h_2$ نحصل على

$$I=\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f\,(x,y)\,dxdy=sim^2(h_1,h_2)+\Big[\ h_1^6\big(b_1D_x^4+b_2D_y^4\big)+h_1^8\big(b_3D_x^6+b_4D_y^6+b_5D_x^5D_y+b_6D_xD_y^5+$$

$$b_7D_x^4D_y^2+b_8D_x^2D_y^4\big)+h_1^9\big(b_9D_x^7+b_{10}D_y^7+\ldots\big)+\cdots\ \Big]f\,(x_1,y_1)+B_1h_1^4+B_2h_1^6+\ldots \qquad \ldots(24)$$

حيث A_i, B_i, a_i, b_i ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط و $i=1,2,\ldots$.

الحالة الثانية :-

مبرهنة (٢) :- لتكن الدالة $f(x,y)$ مستمرة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]$ ولكن على الاقل احدى المشتقات الجزئية لها غير معرفة عند النقطة (b,d) فان القيمة التقريبية للتكامل الثنائي I يمكن حسابها من القاعدة الاتية

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy=sim^2(h_1,h_2)+E_{sim^2}(h_1,h_2)\ ;$$

$$E_{sim^2}(h_1,h_2)=[\ \left(c_1h_1^5h_2D_x^4+c_2h_1h_2^5D_y^4\right)+\left(c_3h_1^7h_2D_x^6+c_4h_1h_2^7D_y^6+c_5h_1^6h_2^2D_x^5D_y+c_6h_1^2h_2^6D_xD_y^5\right.$$
$$\left.+c_7h_1^5h_2^3D_x^4D_y^2+c_8h_1^3h_2^5D_x^2D_y^4\right)+\left(c_9h_1^8h_2D_x^7+c_{10}h_1h_2^8D_y^7+\ldots\right)+\ldots\ ]f\ (x_{n-1},y_{m-1})+C_1h_1^4+C_2h_2^4$$
$$+C_3h_1^6+C_4h_2^6+\ldots$$

حيث $c_l, C_l, l=1,2,3,\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة فقط و $i=0,1,2,\ldots,n\ ,\ x_i=a+ih_1$,

$j=0,1,2,\ldots,m\ ,\ y_j=c+jh_2$

حيث ان $sim^2(h_1,h_2)$ مماثلة للصيغة (٣)

البرهان :- التكامل الثنائي I معرف بالصيغة :

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy=\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)\,dxdy=sim^2(h_1,h_2)+E_{sim^2}(h_1,h_2)$$

يمكن كتابته بالصيغة

$$I=\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)\,dxdy=\int_{y_0}^{y_{m-2}}\int_{x_0}^{x_{n-2}} f(x,y)\,dxdy+\int_{y_{n-2}}^{y_m}\sum_{k=0}^{(n/2)-2}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x,y)\,dxdy+\sum_{l=0}^{(m/2)-2}\int_{y_{2l}}^{y_{2l+2}}\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x,y)\,dxdy$$
$$+\int_{y_{m-2}}^{y_m}\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x,y)\,dxdy=I_5+I_6+I_7+I_8 \qquad \ldots(25)$$

عكار [9]

نلاحظ هنا أنّ التكاملات الخامس والسادس والسابع (I_5,I_6,I_7) فيها دالة التكامل $f(x,y)$ مستمرة وغير معتلة المشتقات الجزئية في كل نقطة من نقاط مناطق تكاملاتها لذا يمكن حساب قيم هذه التكاملات من خلال الصيغتين (3) ، (4) ، اما التكامل الثامن (I_8) فيه دالة التكامل $f(x,y)$ مستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية في المنطقة الجزئية $[x_{n-2},x_n]\times[y_{m-2},y_m]$ تحديداً في النقطة (x_n,y_m) وهذا يعني إن متسلسلة تايلر للدوال ذات المتغيرين Taylor's series for a functions of two variables ، موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل ماعدا النقطة (x_n,y_m) ستري [٥] ، لذا سنستخدم هذه المتسلسلة في نشر الدالة $f(x,y)$ حول النقطة (x_{n-2},y_{m-2}) وسنحسب قيم هذه التكاملات بشكل متسلسل :

$$I_5=\int_{y_0}^{y_{m-2}}\int_{x_0}^{x_{n-2}} f(x,y)\,dxdy=\sum_{l=0}^{(m/2)-2}\int_{y_{2l}}^{y_{2l+2}}\sum_{k=0}^{(n/2)-2}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x,y)dxdy=\frac{h_1h_2}{9}\sum_{l=0}^{(m/2)-2}\sum_{k=0}^{(n/2)-2}\Big[\ f(x_{2k},y_{2l})+f(x_{2k},y_{2l+2})$$

$$f(x_{2k+2},y_{2l})+f(x_{2k+2},y_{2l+2})+4(f(x_{2k}+h_1,y_{2l})+f(x_{2k}+h_1,y_{2l+2})+f(x_{2k},y_{2l}+h_2)$$

$$f(x_{2k+2},y_{2l}+h_2)+4f(x_{2k}+h_1,y_{2l+2}+h_2)\ )\ \Big]+p_1h_1^4+p_2h_2^4+p_3h_1^6+p_4h_2^6+\cdots \qquad \ldots(26)$$

$$I_6=\int_{y_{m-2}}^{y_m}\sum_{k=0}^{(n/2)-2}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x,y)\,dxdy=\frac{h_1h_2}{9}\sum_{k=0}^{(n/2)-2}\Big[\ f(x_{2k},y_{m-2})+f(x_{2k},y_m)+f(x_{2k+2},y_{m-2})+f(x_{2k+2},y_m)$$

$$+4\big(f(x_{2k},y_m-h_2)+f(x_{2k+2},y_m-h_2)+f(x_{2k}+h_1,y_{m-2})+f(x_{2k}+h_1,y_m)+4f(x_{2k}+h_1,y_m-h_2)\ \big)\ \Big]$$

$$+q_1h_1^4+q_2h_1^4+q_3h_1^6+q_4h_2^6+\cdots \qquad \ldots(27)$$

$$I_7=\sum_{l=0}^{(m/2)-2}\int_{y_{2l}}^{y_{2l+2}}\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x,y)\,dxdy=\frac{h_1h_2}{9}\sum_{l=0}^{(m/2)-2}\Big[\ f(x_{n-2},y_{2l})+f(x_{n-2},y_{2l+2})+f(x_n,y_{2l})+f(x_n,y_{2l+2})$$

$$+4\big(f(x_{n-2},y_{2l}+h_2)+f(x_n,y_{2l}+h_2)+f(x_n-h_1,y_{2l})+f(x_n-h_1,y_{2l+2})+4f(x_n-h_1,y_{2l}+h_2)\ \big)\ \Big]$$

$$+r_1h_1^4+r_2h_2^4+r_3h_1^6+r_4h_2^6+\cdots \qquad \ldots(28)$$

حيث p_i,q_i,r_i ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط و $i=1,2,\ldots$

بالنسبة للتكامل الثامن في المنطقة الجزئية $[x_{n-2},x_n]\times[y_{m-2},y_m]$ نستعمل متسلسلة تايلر $f(x,y)$ حول النقطة (x_{n-2},y_{m-2}) بنفس الطريقة المتبعة بالنشر الدالة $f(x,y)$ حول النقطة (x_0,y_0) في المبرهنة (1) فنحصل على

$$I_8=\int_{y_{m-2}}^{y_m}\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x,y)\,dxdy=\frac{h_1h_2}{9}\Big[\ f(x_{n-2},y_{m-2})+f(x_{n-2},y_m)+f(x_n,y_{m-2})+f(x_n,y_m)+$$

$$+4\big(f(x_{n-2},y_{2l}+h_2)+f(x_n,y_{2l}+h_2)+f(x_n-h_1,y_{2l})+f(x_n-h_1,y_{2l+2})+4f(x_n-h_1,y_{2l}+h_2)\ \big)\ \Big]$$

$$\Big[-\frac{1}{45}\big(h_1^5h_2D_x^4+h_1h_2^5D_y^4\big)-\frac{1}{45}\big(h_1^6h_2D_x^5+h_1h_2^6D_y^5+h_1^5h_2^2D_x^4D_y+h_1^2h_2^5D_xD_y^4\big)$$

$$+\cdots\ \Big]f(x_{n-2},y_{m-2}) \qquad \ldots(29)$$

وبما أن $f(x_{n-2},y_{m-2})=E^{-1}f(x_{n-1},y_{m-1})$ ، $(E^{-1}f(x,y)=f(x-h_1,y-h_2))$ فان :

$$I_8=\int_{y_{m-2}}^{y_m}\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x,y)\,dxdy=\frac{h_1h_2}{9}\Big[\ f(x_{n-2},y_{m-2})+f(x_{n-2},y_m)+f(x_n,y_{m-2})+f(x_n,y_m)+$$

$$+4\big(f(x_{n-2},y_{2l}+h_2)+f(x_n,y_{2l}+h_2)+f(x_n-h_1,y_{2l})+f(x_n-h_1,y_{2l+2})+4f(x_n-h_1,y_{2l}+h_2)\ \big)\ \Big]$$

$$\Big[-\frac{1}{45}\big(h_1^5h_2D_x^4+h_1h_2^5D_y^4\big)-\frac{1}{45}\big(h_1^6h_2D_x^5+h_1h_2^6D_y^5+h_1^5h_2^2D_x^4D_y+h_1^2h_2^5D_xD_y^4\big)+\cdots\ \Big]E^{-1}f(x_{n-1},y_{m-1})$$

$$\ldots(30)$$

$$\therefore I_8=\int_{y_{m-2}}^{y_m}\int_{x_{n-2}}^{x_n} f\,(x,y)\,dxdy=\frac{h_1h_2}{9}\Big[\ f\,(x_{n-2},y_{m-2})+f\,(x_{n-2},y_m)+f\,(x_n,y_{m-2})+f\,(x_n,y_m)+$$

$$+4\big(f\,(x_{n-2},y_{2l}+h_2)+f\,(x_n,y_{2l}+h_2)+f\,(x_n-h_1,y_{2l})+f\,(x_n-h_1,y_{2l+2})+4f\,(x_n-h_1,y_{2l}+h_2)\ \big)\ \Big]$$

$$+c_2h_1h_2^5D_y^4\big)+\big(c_3h_1^7h_2D_x^6+c_4h_1h_2^7D_y^6+c_5h_1^6h_2^2D_x^5D_y+c_6h_1^2h_2^6D_xD_y^5+c_7h_1^5h_2^3D_x^4D_y^2$$

$$+c_8h_1^3h_2^5D_x^2D_y^4\big)+\big(c_9h_1^8h_2D_x^7+c_{10}h_1h_2^8D_y^7+\ldots\big)+\ldots\ \big]f\,(x_{n-1},y_{m-1}) \qquad \ldots(31)$$

وبجمع الصيغ (26) , (27) , (28) , (31) نحصل على :-

$$I=\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f\,(x,y)dxdy=sim^2(h_1,h_2)+\big[\ \big(c_1h_1^5h_2D_x^4+c_2h_1h_2^5D_y^4\big)+\big(c_3h_1^7h_2D_x^6+c_4h_1h_2^7D_y^6+$$

$$c_5h_1^6h_2^2D_x^5D_y+c_6h_1^2h_2^6D_xD_y^5+c_7h_1^5h_2^3D_x^4D_y^2+c_8h_1^3h_2^5D_x^2D_y^4\big)+\big(c_9h_1^8h_2D_x^7+$$

$$c_{10}h_1h_2^8D_y^7+\ldots\big)+\cdots\ \big]f\,(x_1,y_1)+C_1h_1^4+C_2h_2^4+C_3h_1^6+C_4h_2^6+\ldots \qquad \ldots(32)$$

وبهذا ينتهي البرهان و في حالة خاصة عندما $h_1=2h_2$ نحصل على

$$I=\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f\,(x,y)\,dxdy=sim^2(h_1,h_2)+\big[\ h_1^6\big(d_1D_x^4+d_2D_y^4\big)+h_1^8\big(d_3D_x^6+d_4D_y^6+d_5D_x^5D_y+$$

$$d_6D_xD_y^5+d_7D_x^4D_y^2+d_8D_x^2D_y^4\big)+h_1^9\big(d_9D_x^7+d_{10}D_y^7+\ldots\big)+\cdots\ \big]f\,(x_{n-1},y_{m-1})+G_1h_1^4+G_2h_1^6+\ldots$$

...(٣3)

حيث C_i ,G_i ,c_i ,d_i ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f\,(x,y)$ فقط و $i=1,2,\ldots$.

ثانياً : التكاملات الثنائية لمكاملات معتلة

لنفرض ان لدينا التكامل الاتي $J=\int_c^d\int_a^b f\,(x,y)\ dxdy$

ولتكن الدالة $f\,(x,y)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة (x_0,y_0) وفي هذه الحالة لا يمكن تطبيق قاعدة سمبسون على كلا البعدين (sim^2) لأنها تستعمل قيمة المكامل في النقطة (x_0,y_0) وبذلك يكون من غيرالممكن استعمال المبرهنة (١) وللحصول على قيمة التكامل باستخدام القاعدة (sim^2) سوف نقوم بإهمال قيمة $f\,(x_0,y_0)$ من القاعدة ، حسب اقتراح دافييز ورابينوتز [4] وبذلك يمكن استعمال المبرهنة (1) وحساب صيغ الخطأ من خلالها ومن ثم نطبق تعجيل رومبرك لتحسين النتائج، وكذلك الحال إذا كانت الدالة $f\,(x,y)$ غير معرفة في النقطة(x_n,y_m).

٣- الامثلة:-

مثال1:- $I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{\frac{x+y}{2}}\,dxdy$ التكامل ذات مكامل معتل المشتقات الجزئية عند $(x,y)=(0,0)$ ونوع الاعتلال جذري وقيمة التحليلية لهذا التكامل هي (٠.٦٨٩٥٤٣٠٥٠٠٣٣٨٤) مقربة لاربع عشر مرتبة عشرية و صيغة حدود التصحيح للتكامل باستخدام الصيغة (٢٤) هي $E_{sim^2}=a_1h_1^{5/2}+A_1h_1^4+A_2h_1^6+\cdots$ حيث A_i,a_1 , $i=1,2,3,\ldots$ ثوابت ، حصلنا على النتائج المدونة في الجدول (١) عند تطبيق قاعدة sim^2 حصلنا على لستة مراتب عشرية صحيحة عندما $n=64$ و $m=128$ و بتطبيق طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة سمبسون $Rsim^2$ حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية بـ (2^{13} فترةجزئية) ،علماً ان الوقت الذي استغرقه البرنامج لحساب التكامل كان (٠.٦٣٥٣٥٤ ثانية).

مثال ٢:- $I=\int_{0.5}^1\int_{0.5}^1\sin^{-1}(\frac{x+y}{2})dxdy$ التكامل هنا ذات مكامل مستمر في منطقة التكامل لكن معتل المشتقات الجزئية في النقطة $(x,y)=(1,1)$ وقيمته التحليلية هي (٠.٢١٦٠٩١١٨٨٨٣٩٨٤) مقربة لأربع عشرة مرتبة عشرية و صيغة حدود التصحيح حسب الصيغة (33) هي $E_{sim^2}=\alpha_1h_1^{2.5}+\alpha_2h_1^{3.5}+B_1h^4+\alpha_3h_1^{4.5}+\alpha_4h_1^{5.5}+B_2h^6+\cdots$, حيث α_i,B_i , $i=1,2,3,\cdots$ ثوابت ، نلاحظ من الجدول (٢) عند تطبيق القاعدة sim^2 حصلنا على لثمان مراتب عشرية صحيحة عندما $n=256$ و $m=512$ و بتطبيق طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة سمبسون $Rsim^2$ حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية بـ (2^{17} فترة جزئية) ،علماً ان الوقت الذي استغرقه البرنامج لحساب التكامل كان(١.٤٨٧٧٧٠ ثانية).

مثال٣:- $I=\int_{0.5}^1\int_{0.5}^1\frac{x+y}{\sqrt{1-xy}}dxdy$ هنا التكامل معتل المكامل عند $(x,y)=(1,1)$ ونوع الاعتلال جذري لذا فان حدود التصحيح باستعمال الصيغة (٣٣) تكون $E_{sim^2}=a_1h^{3/2}+a_2h^{5/2}+a_3h^{7/2}+A_1h^4+a_4h^{9/2}+\cdots$ حيث إن a_i,A_i ثوابت و $i=1,2,\ldots$ والقيمة التحليلة للتكامل (٠.٦٣٥٦٧٤٤٩٠٣٩١٦) مقربة لثلاث عشر مرتبة عشرية الجداول (3) يوضح النتائج المحصل عليها باستعمال الطريقة sim^2 عندما $n=256$ و $m=512$ حصلنا على قيمة صحيحة لاربع مراتب عشرية و بتطبيق طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة سمبسون $Rsim^2$ حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية بـ (2^{17}فترة جزئية) ، علماً ان الوقت الذي استغرقه البرنامج لحساب التكامل كان (١.٧٢٦٠٠١ثانية) .

مثال ٤:- $I=\int_0^1\int_0^1\frac{xy}{\sqrt{x+y}}dxdy$ المكامل هنا مستمراً في منطقة التكامل عدا عند النقطة $(x,y)=(0,0)$ فهو معتل ونوع الاعتلال جذري ،والقيمة التحليلية للتكامل (٠.٢٢٣١٥٦٧٣٨١٤٣٥٨) مقربة لأربع عشرة مرتبة عشرية وفقا لصيغة (٢٤) حصلنا على حدود التصحيح (صيغة الخطأ) $E_{sim^2}=a_1h_1^{3.5}+B_1h_1^4+B_2h_1^6+B_3h_1^8+\cdots$ حيث a_i,B_i، $i=1,2,3,\cdots$ ثوابت ، توضح النتائج المحصل عليها باستعمال الطريقة sim^2 عندما $n=64$ ، $m=128$ ، كما موضح في الجدول (٥) ان القيمة صحيحة لسبع مراتب عشرية و بتطبيق طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة سمبسون $Rsim^2$ حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية بـ (2^{13}فترة جزئية) ، علماً ان الوقت الذي استغرقه البرنامج لحساب التكامل كان(٠.٨٣١٩٩ ثانية).

مثال ٥:- $I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{x^4+y^4}dxdy$ التكامل غير معروف القيمة التحليلية وهو ذات مكامل معتل المشتقات الجزئية عند $(x,y)=(0,0)$ ونوع الاعتلال جذري لذا فان صيغة حدود التصحيح لهذا التكامل باستخدام الصيغة (24) $E_{sim^2}=A_1h_1^4+A_2h_1^6+...$ حيث A_i ، $i=1,2,...$ ثوابت ، حصلنا على النتائج المدونة في الجدول (٥) بالرغم من أن التكامل المذكورغير معروف القيمة التحليلية ألا أننا نرى من خلال الجدول عندما $m=128$ ، $n=64$ القيمة نفسها ثابتة أفقيا في الاعمدة الاربعة الاخيرة (K=6,8,10,12) لذا يمكن أن نقول بان القيمة هذا التكامل باستعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة سمبسون $Rsim^2$ هي ٠.٥٤٤٧١٤٧٠٦٦١٢٤ مقربة الى ثلاثة عشر مرتبة عشرية بينما بدون استعمال التعجيل فانها صحيحة لثمان مراتب عشرية ، علماً ان الوقت الذي استغرقه البرنامج لحساب التكامل كان(٠.٦٩٦٩٥٣ ثانية) .

ملاحظة :- وضعنا القيمة التحليلية نهاية الجداول من اجل سهولة المقارنة بينها وبين القيمة التقريبية التي حصلنا عليها .

جدول (١) : يبين قيمة التكامل $I = \int_0^1\int_0^1 \sqrt{\frac{x+y}{2}}\,dxdy$ بطريقة $Rsim^2$

n	*M*	*sim²*	*K=2.5*	*K=4*	*K=6*	*K=8*	*K=10*
2	**4**	**0.68724900275662**					
4	**8**	**0.68912681016177**	**0.68953004532966**				
8	**16**	**0.68946873187701**	**0.68954215520033**	**0.68954296252504**			
16	**32**	**0.68952986489239**	**0.68954299242701**	**0.68954304824212**	**0.68954304960271**		
32	**64**	**0.68954071622047**	**0.68954304640464**	**0.68954305000315**	**0.68954305003110**	**0.68954305003278**	
64	**128**	**0.68954263728291**	**0.68954304980655**	**0.68954305003334**	**0.68954305003382**	**0.68954305003383**	**0.68954305003384**
							0.68954305003384

جدول (2): يبين قيمة التكامل $I = \int_{0.5}^{1}\int_{0.5}^{1} \sin^{-1}(\frac{(x+y)}{2})dxdy$ بطريقة $Rsim^2$

n	*m*	*sim²*	*K=2.5*	*K=3.5*	*K=4*	*K=4.5*	*K=5.5*	*K=6*	*K=6.5*
2	**4**	**0.21666291051811**							
4	**8**	**0.21619505953990**	**0.21609459451498**						
8	**16**	**0.21610974956201**	**0.21609143033334**	**0.21609112353956**					
16	**32**	**0.21609448332721**	**0.21609120509818**	**0.21609118325975**	**0.21609118724110**				
32	**64**	**0.21609177212569**	**0.21609118992978**	**0.21609118845907**	**0.21609118880570**	**0.21609118887804**			
64	**128**	**0.21609129201223**	**0.21609118891399**	**0.21609118881550**	**0.21609118883926**	**0.21609118884081**	**0.21609118883997**		
128	**256**	**0.21609120708256**	**0.21609118884500**	**0.21609118883831**	**0.21609118883983**	**0.21609118883985**	**0.21609118883983**	**0.21609118883983**	
256	**512**	**0.21609119206503**	**0.21609118884021**	**0.21609118883974**	**0.21609118883984**	**0.21609118883984**	**0.21609118883984**	**0.21609118883984**	**0.21609118883984**
									0.21609118883984

جدول (٣): يبين قيمة التكامل $I=\int_{0.5}^{1}\int_{0.5}^{1}\frac{x+y}{\sqrt{1-xy}}dxdy$ بطريقة $Rsim^{2}$

N	*m*	*sim²*	*K=1.5*	*K=2.5*	*K=3.5*	*K=4*	*K=4.5*	*K=5.5*	*K=6*
2	4	0.6011950188225							
4	8	0.6236650365364	0.6359542972948						
8	16	0.6314619134826	0.6357261670810	0.6356771790300					
16	32	0.6341914022299	0.6356842091951	0.6356751992748	0.6356750073210				
32	64	0.6351513083870	0.6356762984969	0.6356745997754	0.6356745416490	0.6356745106042			
64	128	0.6354897313530	0.6356748210191	0.6356745037497	0.6356744944392	0.6356744912918	0.6356744903989		
128	256	0.6356092067595	0.6356745500291	0.6356744918375	0.6356744906825	0.6356744904320	0.6356744903923	0.6356744903921	
256	512	0.6356514160350	0.6356745010543	0.6356744905375	0.6356744904115	0.6356744903934	0.6356744903916	0.6356744903916	0.6356744903916
									0.6356744903916

جدول (4): يبين قيمة التكامل $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\frac{xy}{\sqrt{x+y}}dxdy$ بطريقة $Rsim^{2}$

N	*m*	*sim²*	*K=3.5*	*K=4*	*K=6*	*K=8*	*K=10*
2	4	0.22214964966365					
4	8	0.22303060584809	0.22311602189262				
8	16	0.22314295667705	0.22315385002632	0.22315637190190			
16	32	0.22315534876915	0.22315655028576	0.22315673030305	0.22315673599196		
32	64	0.22315660451881	0.22315672627421	0.22315673800677	0.22315673812905	0.22315673813743	
64	128	0.22315672565456	0.22315673739968	0.22315673814138	0.22315673814351	0.22315673814357	0.22315673814358
							0.22315673814358

جدول (5): يبين قيمة التكامل $I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{x^4+y^4}\,dxdy$ بطريقة $Rsim^2$

n	*m*	*sim²*	*k=4*	*k=6*	*k=8*	*k=10*	*k=12*
2	**4**	**0.5416174635570**					
4	**8**	**0.5445433732481**	**0.5447384338942**				
8	**16**	**0.5447040168824**	**0.5447147264581**	**0.5447143501495**			
16	**32**	**0.5447140394748**	**0.5447147076476**	**0.5447147073490**	**0.5447147087498**		
32	**64**	**0.5447146649321**	**0.5447147066292**	**0.5447147066131**	**0.5447147066102**	**0.5447147066081**	
64	**128**	**0.5447147040076**	**0.5447147066127**	**0.5447147066124**	**0.5447147066124**	**0.5447147066124**	**0.5447147066124**

٤- المناقشة والاستنتاج

يتضح من خلال جداول هذا البحث انه عند حساب القيم التقريبية للتكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة المعتلة المشتقة و المعتلة في منطقة التكامل بقاعدة سمبسون على كلا البعدين sim^2 وعندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها الفترة على البعد الخارجي ضعف العدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها الفترة على البعد الداخلي قد اعطت هذه القاعدة قيماً صحيحة لعدة مراتب عشرية مقارنة مع القيم الحقيقية للتكاملات وباستعمال عدد من الفترات الجزئية من دون استعمال تعجيل رومبرك ، إلا انه عند استعمال طريقة تعجيل رومبرك ، مع القاعدة المذكورة $Rsim^2$ اعطت نتائج افضل من حيث الدقة و سرعة الاقتراب بعدد قليل نسبيا من الفترات الجزئية مقارنة مع القيم التحليلية وبذلك يمكن الاعتماد على هذه الطريقة في حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة المعتلة المشتقة او المعتلة .

المصادر :

[1] Burden R.L. and Faires J.D.,”Nurmerical Analysis “candea, Ninth Edition pp 8-11,235 -238 , 2010.

[2] Fox L., " Romberg Integration for aClass of Singular Integrands ", comput. J.10 , pp. 87-93. 1967.

[3] Fox L. And Linda Hayes , " On the Definite Integration of Singular Integrands" , SIAM REVIEW. ,12 , pp. 449-457 , 1970 .

[4] Phillip J. Davis and Phillip Rabinowitz , " Methods of Numerical Integration " , BLASDELL Puplishing Company , pp. 1-2 , 599,113 , chapter 5 , 1975 .

[5] Sastry S. S. , " Introductory Methods of Numerical Analysis " , New Delhi , Forth edition, 2008

[6] Shanks J. A. , " Romberg Tables for Singular Integrands " , comput J.15 ,pp. 360 , 361 , 1972

[7] ضياء ، عذراء محمد ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab" ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، ٢٠٠٩.

[٨] فرانك آيرز ، " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " ، دار ماكجروهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين .

[9] عكار ، بتول حاتم " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية "، رسالة ماجستير مقدمة إلىٰ جامعة الكوفة ،2010 .

[١٠] موسىٰ ، صفاء مهدي ، " تحسين نتائج حساب التكاملات الثنائية عددياً باستعمال طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدتي النقطة الوسطىٰ وسمبسون "، رسالة ماجستير مقدمة إلىٰ جامعة الكوفة ،2011 .

[١١] ناصر ، رسل حسن ، " المقارنة بين الطريقتين التعجيليين ايتكن و رومبرك في حساب التكاملات عدديا " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،2011 .

Numerical Method for Evaluation of Double Integrals its Integrands have Singular Derivatives and Singular by Using Simpson's Rule when Number of Subintervals at the Two Dimensions Unequal

Prof.Ali Hassan Mohammed

Roaa Aziz fadhil

Department of mathematics / Faculty of Education for Women /university of kufa

Abstract

The main aim of this research is to derive numerical rule to calculate values of double integrals its integrands have singular partial derivatives and singular integrals at one end of limits region of integration by using Simpson's rule with two dimensions (on the interior x and exterior y) , and to find correction terms (formula of error) for it ، and using Romberg acceleration to improve the results of integrations by depending on correction terms that we found when the number of subintervals (m) on the dimension y equal to twice of subintervals (n) on the dimension x,((n),(m) even integers number) ، precisely when $h_1=2h_2$ where h_1 is the distance between ordinates on x-axis and h_2 the distance between ordinates on y-axis .

we will use the symbol (sim^2) to indicate this Simpson's rule with two dimensions and symbolized the base with Romberg acceleration the symbol ($Rsim^2$) , and we can depend on this rule to calculate like these integrals because it gave high accuracy on the results with respect to the analytical values of integration with little subintervals.