تطويرطريقة تقريب دالة ألهدف لحل مسائل البرمجة الكسرية غير المقيدة

رشيد بشير رحيمه/ جامعة ذي قار/ كلية العلوم thiqaruni.org
علي حسين حسن / جامعة ذي قار/ كلية العلوم thiqaruni.org

المستخلص

طريقة تقريب دالة الهدف هي أحدى طرائق بحوث العمليات لحل مسائل البرمجة الكسرية غير المقيدة، حيث تعتمد طريقة الحل أسلوب المراحل والتقريب لدالة الهدف .

هدف البحث هو تطوير هذه الطريقة ، وقد تمكنا من اختزال عدد المراحل والجداول التي اعتمدت في هذه الطريقة إلى حد بعيد .

وتضمن البحث تصميم برنامجا شاملاً أو حقيبة (Package) بلغة فيجوال بيسك يمكن من خلالها استخدام طريقة تقريب دالة الهدف ، والطريقة المطورة لها لحل مسائل البرمجة الكسرية غير المقيدة بسهولة وسرعة كبيرتين .

1-المقدمة Introduction

تعد بحوث العمليات من العلوم التطبيقية التي أحرز تطبيقها نجاحاً واسعا في مختلف مجالات الحياة وتمتد الجذور التاريخية لهذا الحقل إلى أوائل الحرب العالمية الثانية وتستخدم بحوث العمليات أساليب لحل الكثير من المعضلات الإدارية والصناعية والتجارية وذلك يتحقق بالاستخدام الأمثل للموارد المتاحة. [1],[2],[3]

وتعد البرمجة الخطية إحدى أساليب بحوث العمليات ففي عام ١٩٤٧ ظهرت بوادر البرمجة الخطية كإحدى الوسائل المهمة لبحوث العمليات حيث استعملت البرمجة الخطية نماذج رياضية لوصف المشاكل ذات العلاقة. وقام العالم Dantzing بتطوير طريقة رياضية ذات كفاءة عالية في حل مسائل البرمجة الخطية وهي الطريقة المبسطة (Simplex Method).

[2],[3],[11],[7]

تتألف معظم مسائل البرمجة الخطية من نموذج رياضي يتكون من دالة هدف خطية ومجموعة قيود خطية أيضا يراد إيجاد الحل الأمثل لدالة الهدف محققاً بذلك جميع قيود المسألة بمتغيرات غير سالبة.و ظهرت بعد ذلك مسائل اخرى تكون فيها دالة الهدف نسبة بين دالتين خطيتين وقيودها خطية سميت بمسائل البرمجة الكسرية الخطيةوعندما تكون متغيراتها غير مقيدة بأشارة (يمكن ان يكون المتغير سالباً او موجباً او صفراً) ، تدعى المسألة حينئذ بمسألة البرمجة الكسرية غير المقيدة وهي من المواضيع المهمة في بحوث العمليات.[13],[9],[3],[2],[1]

قام (J. Abrham وS. Luthra) في عام 1977 بدراسة النماذج الثنائية في البرمجة الكسرية الخطية ،[4] .

وقام (Jean-Pierre Crouzeix, Jacques A. Ferland) في عام 1983بحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية عن طريق المسألة الثنائية،[9] .

وقام (Kurt M. Anstreicher) في عام 1986 باستخدام خوارزمية مطورة هي خوارزمية المسقط (projective algorithm) لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية ،[5] .

وقام (S. K. Bhatt) في عام 1989 باستخدام خوارزمية مطورة هي خوارزمية

(various linearization algorithm)

لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية ،[8] .

وقام(Yu. E. Nesterov و A. S. Nemirovskii) في عام 1995باستخدام طريقة مطورة هي طريقة النقطة الداخلية (interior-point method) لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية،[16] .

وقام (A. M. M. T. Arévalo , Mármol وA. Zapata) في عام 1997 بدراسة الدوال الكسرية المتعددة الاهداف ،[6] .

وقام (A. Nemirovski,) في عام 1997 باستخدام طريقة مطورة هي طريقة الخطوة الطويلة (long-step method) لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية،[15] .

وقام (Hideki Katagiri و Masatoshi Sakawa,) في عام 2003 بدراسة البرمجة الكسرية الخطية ذات المعاملات الضبابية العشوائية،[12] .

وقام (وليد خالد جابر الحسنياوي) في عام 2004 بدراسة وتحليل طرائق حل مسائل البرمجة الكسرية ،[١] .

وقام (Yong Xia Fuye Feng و, Quanju Zhang) في عام ٢٠٠٦ بتطبيق اسلوب البرمجة الكسرية في الشبكات العصبية ،[10] .

وقام (S. Chandra A. Mehra و, C. R. Bector) في عام ٢٠٠٧ بدراسة الامثلية في البرمجة الكسرية الخطية ذات المعاملات الضبابية،[14] .

تم في هذا البحث تطوير احدى الطرق المهمة لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية غير المقيدة وهي طريقة تقريب دالة الهدف.

٢- طريقة تقريب دالة الهدف لحل المسائل البرمجة الكسرية غير المقيدة

حين تكون دالة الهدف نسبة بين دالتين خطيتين وقيود المسألة خطية ومتغيراتها غير مقيدة بأشارة ، تدعى المسألة حينئذ بمسألة البرمجة الكسرية غير المقيدة.

أن طريقة تقريب دالة الهدف هي أحدى طرائق حل مسائل البرمجة الكسرية في بحوث العمليات ،حيث تعتمد طريقة الحل ، أسلوب المراحل والتقريب لدالة الهدف ، أذ تضع في البداية تقريباً معيناً لدالة الهدف كحل أولي لها ثم يعوض هذا الحل في النموذج الرياضي ويتم الحل بعدها بالطريقة المبسطة .

فإذا كان ناتج الحل هو الحل السابق نفسه نتوقف وسيكون هذا هو الحل الأمثل ،عكس ذلك نستخرج تقريباً جديداً لدالة الهدف ونكرر التعويض والحل لحين الوصول إلى الحل الأمثل.

فإذا عبرنا عن مسألة البرمجة الكسرية بالنموذج الرياضي الأتي:-

$$\text{MaXZ}=\frac{CX+\alpha}{DX+\beta} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(٢.1)$$

وفق القيود آلاتية

$$AX=b$$

$$X \text{ unrestricted}$$

حيث أن

X: تمثل متغيرات النموذج الرياضي

β,α يمثلان الحدان المطلقان في دالة البسط ودالة المقام على التوالي نطبق الآن على هذا النموذج الرياضي الخوارزمية الاتية:-

خوارزمية الحل بطريقة تقريب دالة الهدف

أن خوارزمية الحل بطريقة تقريب دالة الهدف تتم على وفق الخطوات الآتية: [3],[٢]،[١]

١- حساب قيمة L(X) من المعادلة الاتية:

$$L(X)=\frac{<C,D>}{<D,D>} \quad \text{.....(٢.٢)}$$

حيث أن

$<C , D> = \sum_{i=1}^{N} c_i d_i$

$<D,D>= \sum_{i=1}^{N} d_i^{\,2}$

٢- نحول دالة الهدف الكسرية إلى دالة هدف خطية مقربة وذلك بعد تعويض قيمتها في المعادلة الانية:

Max F

$=<C_j - L(X)*d_j, X_j> \text{.....(٢.3)}$

(j=1,…..,n)

حيث أن(F)هو اسم جديد للدالة الخطية المقربة.

ثم تضاف قيود المسالة الأصلية :

b

AX =

X unrestricted

يتم التعويض عن المتغيرات غير

3-المقيدة بأشارة كفرق بين متغيرين غير سالبين أي

$x_j=x_j^{'} - x_j^{''} ,x_j^{'} ,x_j^{''} >=0$

٤- تحل دالة الهدف الجديدة مع قيود المسالة بالطريقة المبسطة كنموذج برمجة خطية إلى حين الوصول إلى الحل الأمثل Optimal solution .

وسنحصل عندها على قيم X_j ، j=1,2,……,n.

٥-نعوض قيم X_jالناتجة عن الحل الأمثل بالطريقة المبسطة للحصول على قيمة

$L(X^*)$=Max Z

٦-نجري مقارنة بين $L(X^*)$،L(X) فاذا كانت $L(X^*)$= L(X) نتوقف ويكون الناتج هو الحل للمسألة ،وبخلافه سوف نكون دالة هدف جديدة (F) بالاعتماد على$L(X^*)$ في معادلة (٢.٣) ونعيد استعمال الطريقة المبسطة من جديد إلى حين الوصول إلى الحل الأمثل واستخراج ($L(X^{**})$ ومقارنتها مع قيمة $L(X^*)$ فإذا كانت متساوية نتوقف وبخلافه يتم استخراج دالة هدف جديدة بالاعتماد على $L(X^{**})$ وتعاد الخطوات السابقة نفسها باستعمال الطريقة المبسطة إلى حين الوصول إلى الحل الأمثل وهكذا ,

ولتوضيح هذه الطريقة نأخذ المسألة الاولى كمثال .

مثال 2.1

لكي نحل النموذج الرياضي الاتي

$$\text{Max } Z=\frac{5X_1+3X_2}{5X_1+2X_2+11}$$

S.t.٣٠X_1+٥X_2 =100

5 X_1 +2X_2 =50

X_1,X_2 unrestricted

الحل//

C=(5,3), α =0, D=(5,2) , β =11

$<C,D>= \sum_{i=1}^{n} c_i d_i$ =5*5+3*2=31

$<D,D> \sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}$ =5^2+2^2=29

$L(X)=\frac{<C,D>}{<D,D>}=\frac{31}{29}$=1.06

Max

المرحلة الأولى

F =<C_i-L(X)*d_i,X_i>

Max F=(5-1.06*5)X_1+(3-1.06*2)X_2

=(-0.34)X_1+ (0.86)X_2

Max F=(-0.34)X_1+ (0.86)X_2

S.t.30X_1+5X_2=100

5X_1+2X_2=50

X_1,X_2 unrestricted

يتم التعويض عن المتغيرات غير المقيدة بأشارة كفرق بين متغيرين غير سالبين

MaxF=-0.34$X_1^{'}$ +0.34$X_1^{''}$ +0.86$X_2^{'}$ + 0.86$X_2^{''}$ _

$X_1', X_1'', X_2', X_2' >= 0$ S.t. $30X_1' -30 X_1'' +5 X_2' -5 X_2'' =100$

$5 X_1' -5 X_1'' +2 X_2' -2 X_2'' =50$

ونحل هذا النموذج بطريقة الجزاء(Big-M)حيث ننضم الجدول الأول كالاتي:

جدول (٢.١.١)

		X1	X2	Neg_X1	Neg_X2	Artificial_C1	Artificial_C2	
Basis	C(j)	-0.3400	0.8600	0.3400	-0.8600	0	0	R. H. S.
Artificial_C1	-M	30.0000	5.0000	-30.0000	-5.0000	1.0000	0	100.0000
Artificial_C2	-M	5.0000	2.0000	-5.0000	-2.0000	0	1.0000	50.0000
	C(j)-Z(j)	-0.3400	0.8600	0.3400	-0.8600	0	0	-M
	* Big M	35.0000	7.0000	-35.0000	-7.0000	0	0	0

ثم نكمل الحل نحصل على الجداول الاتية:

جدول (٢.١.٢)

		X1	X2	Neg_X1	Neg_X2	Artificial_C1	Artificial_C2	
Basis	C(j)	-0.3400	0.8600	0.3400	-0.8600	0	0	R. H. S.
X1	-0.3400	1.0000	0.1667	-1.0000	-0.1667	0.0333	0	3.3333
Artificial_C2	-M	0	1.1667	0	-1.1667	-0.1667	1.0000	33.3333
	C(j)-Z(j)	0	0.9167	0	-0.9167	0.0113	0	-M
	* Big M	0	1.1667	0	-1.1667	-1.1667	0	0

جدول (2.1.3)

		X1	X2	Neg_X1	Neg_X2	Artificial_C1	Artificial_C2	
Basis	C(j)	-0.3400	0.8600	0.3400	-0.8600	0	0	R. H. S.
X2	0.8600	6.0000	1.0000	-6.0000	-1.0000	0.2000	0	20.0000
Artificial_C2	-M	-7.0000	0	7.0000	0	-0.4000	1.0000	10.0000
	C(j)-Z(j)	-5.5000	0	5.5000	0	-0.1720	0	-M
	* Big M	-7.0000	0	7.0000	0	-1.4000	0	0

جدول (2.1.4)

		X1	X2	Neg_X1	Neg_X2	Artificial_C1	Artificial_C2	
Basis	C(j)	-0.3400	0.8600	0.3400	-0.8600	0	0	R. H. S.
X2	0.8600	0.0000	1.0000	0.0000	-1.0000	-0.1429	0.8571	28.5714
Neg_X1	0.3400	-1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	-0.0571	0.1429	1.4286
	C(j)-Z(j)	0	0	0	0	0.1423	-0.7857	-M
	* Big M	0	0	0	0	-1.0000	-1.0000	0

إذن الحل الأمثل لهذه المرحلة هو $X_1=-1.428, X_2=28.57$

$$\therefore Z = \frac{5(-1.428)+3(28.57)}{5(-1.428)+2(28.57)+11} = 1.29$$

$\therefore L(X^*) = 1.29$

$L(X) = 1.06$

$\therefore L(X^*) \neq L(X)$

لذا سنكون دالة هدف جديدة بالاعتماد على $L(X^*)$ وكالاتي بمرحلة جديدة

المرحلة الثانية

$Max F = (5-1.29*5)X_1+(3-1.29*2)X_2$

$(0.42)X_2 = (-1.45)X_1+$

∴ $\text{Max } F = (-1.45)X_1 + (0.42)X_2$

S.t.

$30X_1+5X_2=100$

$5X_1+2X_2=50$

X_1, X_2 unrestricted

حيث ننضم الجدول الأول كالأتي

جدول (2.1.5)

		X1	X2	Neg_X1	Neg_X2	Artificial_C1	Artificial_C2	
Basis	C(j)	-1.4500	0.4200	1.4500	-0.4200	0	0	R. H. S.
Artificial_C1	-M	30.0000	5.0000	-30.0000	-5.0000	1.0000	0	100.0000
Artificial_C2	-M	5.0000	2.0000	-5.0000	-2.0000	0	1.0000	50.0000
	C(j)-Z(j)	-1.4500	0.4200	1.4500	-0.4200	0	0	M
	* Big M	35.0000	7.0000	-35.0000	-7.0000	0	0	0

ثم حساب الجداول الأتية:

جدول (2.1.6)

		X1	X2	Neg_X1	Neg_X2	Artificial_C1	Artificial_C2	
Basis	C(j)	-1.4500	0.4200	1.4500	-0.4200	0	0	R. H. S.
X1	-1.4500	1.0000	0.1667	-1.0000	-0.1667	0.0333	0	3.3333
Artificial_C2	-M	0	1.1667	0	-1.1667	-0.1667	1.0000	33.3333
	C(j)-Z(j)	0	0.6617	0	-0.6617	0.0483	0	M
	* Big M	0	1.1667	0	-1.1667	-1.1667	0	0

جدول (2.1.7)

		X1	X2	Neg_X1	Neg_X2	Artificial_C1	Artificial_C2	
Basis	C(j)	-1.4500	0.4200	1.4500	-0.4200	0	0	R. H. S.
X2	0.4200	6.0000	1.0000	-6.0000	-1.0000	0.2000	0	20.0000
Artificial_C2	-M	-7.0000	0	7.0000	0	-0.4000	1.0000	10.0000
	C(j)-Z(j)	-3.9700	0	3.9700	0	-0.0840	0	M
	* Big M	-7.0000	0	7.0000	0	-1.4000	0	0

جدول (2.1.8)

		X1	X2	Neg_X1	Neg_X2	Artificial_C1	Artificial_C2	
Basis	C(j)	-1.4500	0.4200	1.4500	-0.4200	0	0	R. H. S.
X2	0.4200	0.0000	1.0000	0.0000	-1.0000	-0.1429	0.8571	28.5714
Neg_X1	1.4500	-1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	-0.0571	0.1429	1.4286
	C(j)-Z(j)	0	0	0	0	0.1429	-0.5671	M
	* Big M	0	0	0	0	-1.0000	-1.0000	0

إذن الحل الأمثل لهذه المرحلة هو $X_1=-1.428,\ X_2=28.57$

∴ $Z = \dfrac{5(-1.428)+3(28.57)}{5(-1.428)+2(28.57)+11} = 1.29$

∴ $L(X^{**}) = 1.29$

$L(X^{*})=1.29$

∴ $L(X^{*})=L(X^{**})$

أذن نتوقف ويكون الحل الأمثل بمرحلتين وبثمان جداول هو

٣-الطريقة المطورة لتقريب دالة الهدف لحل مسائل البرمجة الكسرية

يمكننا الآن تطوير طريقة تقريب دالة الهدف لحل مسائل البرمجة الكسرية التي كانت تحل بمراحل متعددة وبعدد كبير من الجداول كما لاحضنا في البند أعلاه ،وذلك لتحسين أداء هذه الطريقة ولتسرع في وصولها إلى الحل الأمثل حيث إننا إذا عبرنا عن مسألة البرمجة الكسرية بنفس النموذج الرياضي (٢.١) فيمكن تطوير هذه الطريقة واختزال عدد المراحل وجداول الحل للإسراع بالوصول إلى الحل الأمثل أذا استخدمنا خوارزمية الحل المبينة في البند التالي

خوارزمية حل الطريقة المطورة

1- نحول دالة الهدف الكسرية إلى دالة هدف خطية مقربة وذلك بعد تعويض قيمتها في المعادلة الآتية

$$MaxF = <C_j - L(X)*d_j, X_j>$$

.....(٣.1)

حيث أن F هو أسم جديد للدالة الخطية المقربة

2- نستخرج في البداية قيمة L(X) وفق العلاقة آلاتية

$$L(X)=Min\left(\frac{C_j}{d_j}\right), J=1,\ldots,n$$

.....(٣.2)

حيث أن n تمثل عدد المتغيرات في النموذج الرياضي

3- يتم تعويض قيمة L(X) المختارة في المعادلة (٣.١)

4- تتكون لدينا دالة هدف جديدة مقربةF نضيف أليها قيود النموذج الرياضي نفسها

5 - يتم التعويض عن كل متغير غير مقيد بالإشارة كفرق بين متغيرين غير سالبين ، حيث

سيعبر عن المتغير الحر x_j كما يأتي

$$x_j = x_j' - x_j'', \quad x_j', x_j'' >= 0$$

6- يتم الحل بالطريقة المبسطة لحين الوصول إلى الحل الأمثل .

7- يتم تعويض قيم X_j الناتجة في الحل الأمثل في دالة الهدف الكسرية (الأصليةZ) للحصول على قيمة Z .

8- نقارن قيمة Z الناتجة في تعويض قيم X_j في ٦ أعلاه مع قيمة L(X) المختارة في (٣.٢) أعلاه

أ- إذا كانت قيمةL(X) <Z نتوقف وتكون قيمة Z هي القيمة المثلى

ب- إذا كانت قيمةL(X) >Z نجعل Z=L(X) ونستمر باختيار دالة هدف موجودة

بالاعتماد على $L(X^*)$ونستمر بالحل لحين الوصول إلى الحل الأمثل

ولفهم هذه الخوارزمية سنتناول المثال الأتي:

مثال ٣.١

لو كان لدينا نفس النموذج الرياضي للمثال (٢.١) وكما يأتي

$$\text{Max } Z = \frac{5X_1 + 3X_2}{5X_1 + 2X_2 + 11}$$

$$\text{S.t. } ٣٠X_1 + ٥X_2 = 100$$

$$5X_1 + 2X_2 = 50$$

$$X_1, X_2 \text{ unrestricted}$$

ولو أردنا حل هذا النموذج الرياضي بالطريقة المطورة لتقريب دالة الهدف فيكون الحل كما يأتي

الحل

$C=(5,3)$, $\alpha = 0$, $D=(5,2)$, $\beta = 11$

$$\text{Max } F = <C_j - L(X)*d_j, X_j>$$

$X_1 = -1.428, X_2 = 28.57$

$\text{Max } Z = 1.29$

$=(5-L(X)*5)X_1+(3-L(X)*2)X_2$ ....(٣.١)

نستخرج الآن L(X)

بما ان $L(X)=\text{Min}\left(\frac{1}{1},\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{1}=1$

وعليه سنختار

L(X)=1

المرحلة الأولى

بالتعويض في المعادلة (٣.١) يكون لدينا

$F=(5-1*5)X_1+(3-1*2)X_2$

$F=0X_1+X_2$

S.t.

$٣٠X_1+٥X_2=100$

$5X_1+2X_2=50$

X_1, X_2 unrestricted

يتم التعويض عن المتغيرات غير المقيدة بأشارة كفرق بين متغيرين غير سالبين كالاتي:

$MaxF=0\ X_1' -0X_1'' +X_2' -X_2''$

S.t. $30X_1' -30\ X_1'' +5\ X_2' -5\ X_2'' =100$

$5\ X_1' -5\ X_1'' +2\ X_2' -2\ X_2'' =50$

$X_1', X_1'', X_2', X_2'' >= 0$

ونحل هذا النموذج بطريقة الجزاء (Big-M)

حيث ننضم الجدول الأول كالاتي:

جدول(٣.١.١)

		X1	X2	Neg_X1	Neg_X2	Artificial_C1	Artificial_C2	
Basis	C(j)	0	1.0000	0	-1.0000	0	0	R. H. S.
Artificial_C1	-M	30.0000	5.0000	-30.0000	-5.0000	1.0000	0	100.0000
Artificial_C2	-M	5.0000	2.0000	-5.0000	-2.0000	0	1.0000	50.0000
	C(j)-Z(j)	0	1.0000	0	-1.0000	0	0	-M
	* Big M	35.0000	7.0000	-35.0000	-7.0000	0	0	0

جدول(٣.١.٢)

		X1	X2	Neg_X1	Neg_X2	Artificial_C1	Artificial_C2	
Basis	C(j)	0	1.0000	0	-1.0000	0	0	R. H. S.
X1	0	1.0000	0.1667	-1.0000	-0.1667	0.0333	0	3.3333
Artificial_C2	-M	0	1.1667	0	-1.1667	-0.1667	1.0000	33.3333
	C(j)-Z(j)	0	1.0000	0	-1.0000	0	0	-M
	* Big M	0	1.1667	0	-1.1667	-1.1667	0	0

جدول(2.1.3)

		X1	X2	Neg_X1	Neg_X2	Artificial_C1	Artificial_C2	
Basis	C(j)	0	1.0000	0	-1.0000	0	0	R. H. S.
X2	1.0000	6.0000	1.0000	-6.0000	-1.0000	0.2000	0	20.0000
Artificial_C2	-M	-7.0000	0	7.0000	0	-0.4000	1.0000	10.0000
	C(j)-Z(j)	-6.0000	0	6.0000	0	-0.2000	0	-M
	* Big M	-7.0000	0	7.0000	0	-1.4000	0	0

جدول(٣.١.٤)

		X1	X2	Neg_X1	Neg_X2	Artificial_C1	Artificial_C2	
Basis	C(j)	0	1.0000	0	-1.0000	0	0	R. H. S.
X2	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	-1.0000	-0.1429	0.8571	28.5714
Neg_X1	0	-1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	-0.0571	0.1429	1.4286
	C(j)-Z(j)	0	0	0	0	0.1429	-0.8571	-M
	* Big M	0	0	0	0	-1.0000	-1.0000	0

إذن الحل الأمثل لهذه المرحلة هو -X_1=
1.428,X_2=28.57

ألان نقارن بين قيمة Z الناتجة مع قيمة L(X) المختارة

١- إذا كانت قيمةL(X) <Z نتوقف وتكون قيمة Z هي القيمة المثلى

٢- إذا كانت قيمةL(X) >Z نستمر باختيار دالة هدف موجودة بالاعتماد على $L(X^*)$ ونستمر بالحل لحين الوصول إلى الحل الأمثل .

وبما أن قيمة L(X) < Z=1.29

لذا نتوقف ويكون الحل الأمثل لمرحلة واحدة باربعة جداول هو

X_1=-1.428,X_2=28.57 ,
Max Z =1.29

مسألة٢

$$\text{Max } Z = \frac{25X_1 + 10X_2 + 900}{20X_1 + X_2 - 200}$$

S.to
$3X_1+X_2 =10$
$5X_1+2X_2=5$
X_1,X_2 unrestricted

مسألة ٣

$$\text{Max } Z= \frac{4X_1 + 3X_2 + 5}{2X_1 + 2X_2 + 1}$$

S.to
$5X_1+2X_2 =20$
$2X_1+7X_2=8$
X_1,X_2 unrestricted

مسألة ٤

$$\text{Max } Z= \frac{3X_1 + 3X_2 + X_3 + 25}{2X_1 + X_2 + 2X_3 + 1}$$

S.to

$$\therefore Z = \frac{5(-1.428) + 3(28.57)}{5(-1.428) + 2(28.57) + 11} = 1.29$$

$\therefore$ Max Z =1.29

وبذلك تم اختزال عدد المراحل من مرحلتين إلى مرحلة واحدة ونقلص عدد الجداول من ثمان جداول إلى اربع فقط ،للتأكد من سرعة أداء الطريقة المطورة لتقريب دالة الهدف هذه تم وباستخدام البرنامج المعد بلغة فيجوال بيسك حل مسائل أخرى كثيرة إضافة للمسألة الاولى وكانت جميع النتائج تشير إلى إن الطريقة المطورة قد قلصت من المراحل والجداول سنختار ألان لا على التحديد اربع من تلك الأمثلة نلحقها بعد ذلك بجدول يضم نتائج المسألة الأولى مع نتائج المسائل الاربع هذه.والمسائل لتي اقترحناها هي كما يأتي:

$2X_1+5X_2 +X_3 =12$
$X_1+2X_2+3X_3=4$
$2X_1+3X_2+5X_3=18$
X_1,X_2,X_3 unrestricted

مسألة 5

$$\text{Max } Z= \frac{3X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 50}{2X_1 + X_2 + X_3 + 10}$$

S.to
$2X_1+5X_2+X_3=2$
$X_1+2X_2+3X_3=3$
$2X_1+3X_2+5X_3=5$
X_1,X_2,X_3 unrestricted

وكانت حصيلة الحل لجميع المسائل السابقة بالطريقة المطورة وبواسطة البرنامج المعد بلغة فيجول بيسك ممثلة في الجدول رقم(١) .

جدول(١) الطريقةالمطورة لتقريب دالة الهدف

المسألة	عدد المراحل	عدد الجداول	الحل
1	1	4	MaxZ=1.29
2	1	3	MaxZ=14.23
3	1	3	MaxZ=2.33
4	1	5	MaxZ=1.90
٥	1	٤	MaxZ=4.65

٤- مناقشة النتائج

كانت حصيلة الحل لجميع المسائل السابقة بطريقة تقريب دالة الهدف وبالطريقة المطورة وباستخدام البرامج المعدة بلغة فيجول بيسك ممثلة بالجدول رقم (٢) .

جدول(٢) عدد الجداول والمراحل للطريقتين

طريقة تقريب دالة الهدف		الطريقةالمطورة لتقريب دالة الهدف

المسألة	عدد المراحل	عدد الجداول	عدد المراحل	عدد الجداول
1	2	4	1	8
2	2	6	1	3
3	2	6	1	3
4	2	10	1	5
5	2	8	1	٤

٤.١ – الاستنتاجات

نلاحظ من جدول مقارنة حل الطريقتين والمبين أعلاه أن طريقة تقريب دالة الهدف لحل مسائل البرمجة الكسريةغير المقيدة تستغرق مراحل عدة وجداول عديدة للوصول إلى الحل الأمثل في حين أن تطوير هذه الطريقة قد حقق مايأتي :

١- أن تطوير الطريقة قد قلص من عدد مراحل الحل الأمثل.

٢- أن الطريقة المطورة قد اختزلت عدد جداول الحل الأمثل إلى اقل ما يمكن .

٣- أن تطوير الطريقة ونتيجة تقليص عدد مراحل الحل واختزال عدد الجداول قد أسرع في الوصول إلى الحل الأمثل.

٤- تطوير الطريقة قد حسن من أداء هذه الطريقة بشكل واضح ملموس لا غبار عليه.

5 –طريقة تقريب دالة الهدف التي كانت تستخدم لحل مسائل البرمجة الكسرية تم تطويرها واستخدامها لحل مسائل البرمجة الكسرية غير المقيدة .

٤.٢ – التوصيات

١- استخدام طريقة التحويلات المركبة لحل مسائل البرمجة الكسرية غير المقيدة .

٢- استخدام الخوارزمية الجينية (Genatic Algorithm) لحل مسائل البرمجة الكسرية غير المقيدة .

المصادر

References

1 – وليد خالد جابر الحسناوي،" دراسة وتحليل طرائق حل مسائل البرمجة الكسرية "، رسالة ماجستير ،قسم العلوم التطبيقية ،الجامعة التكنولوجية(٢٠٠٤).

2 – محمد محمود فقي ، " مسائل الامثلية للنقطة الرأسية في البرمجة الكسرية " رسالة ماجستير ، كلية العلوم ، جامعة السليمانية (1989).

3 – عباس احمد حسن، "تطوير وبرمجة حل مسائل البرمجة الخطية غير المقيدة"، مجلة كلية التربية ،الجامعة المستنصرية، العدد ٣، (١٩٩٦).

٤- Abrham J. و Luthra S. ," Comparison of duality models in fractional linear programming",Mathematical Methods of Operations Research , Volume 21, Number 3,p. 125-130,(١٩٧٧).

http://www.google.com, fractional linear programming.

٥- Anstreicher K. M. ," A monotonic projective algorithm for fractional linear programming", Algorithmica,Volume1,Number1,p. 483-498,(١٩٨٦).

http://www.google.com, fractional linear programming.

٦- Arévalo M. T. , Mármol A. M. و Zapata A. ," The tolerance approach

of algorithms for solving Linear Fractional Programming problems", Fractional Linear Programming Department of Mathematics, University of Dhaka, (2001). http://www.google.com, fractional linear programming.

١٢- Katagiri H. و Sakawa M. ," A Study on Fuzzy Random Linear Programming Problems Based on Possibility and Necessity Measures",(2003).

١٣- Kovács Á.و Stahl J. ,"On large scale linear fractional programs",(1976).

١٤- Mehra A. , Chandra S. و Bector C. R. ," Acceptable optimality in linear fractional programming with fuzzy coefficients",Fuzzy Optimization and Decision Making,Volume 6, Number 1,p. 5-16, (2007). http://www.google.com, fractional linear programming.

١٥- Nemirovski A. ," The long-step method of analytic centers for fractional problems",Mathematical Programming,Volume 77, Number 1 ، p. 191-224, (١٩٩٧). http://www.google.com, fractional linear programming.

١٦- Nesterov Y. E. و Nemirovskii A. S. ," An interior-point method for generalized linear-fractional in multiobjective linear fractional programming", TOP, Volume 5, Number 2 ,p. 241-252, (١٩٩٧). http://www.google.com, fractional linear programming.

٧ – Bajalinov E.B.," Linear-Fractional Programming: Theory,Methods, Applications and Software (Applied Optimization)", (2003). http://www.google.com, fractional linear programming.

٨- Bhatt S. K. ," Equivalence of various linearization algorithms for linear fractional programming",Volume 33, Number 1,p. 39-43 , (1989). http://www.google.com, fractional linear programming.

٩- Crouzeix J.P. , Ferland J. A. و Schaible S. ," Duality in generalized linear fractional programming", Mathematical Programming, Volume 27, Number 3 ،p.342-354 (1983). http://www.google.com, fractional linear programming.

١٠- Feng F., Xia Y. و Zhang Q. ," A Recurrent Neural Network for Linear Fractional Programming with Bound Constraints",(2006) http://www.google.com, fractional linear programming.

١١- Islam M. A.& Uddin M. F.,"Equivalence,difference and failure

programming",Mathematical Programming,Volume 69, Numbers 1-3 ,p. 177-204, (١٩٩٥).