IRAQI Academic Scientific Journals

University of Kirkuk Journal For Administrative and Economic Science (2025) 15 (1): 280-294

UKJAES

University of Kirkuk Journal For Administrative and Economic Science

ISSN:2222-2995 E-ISSN:3079-3521
University of Kirkuk Journal For Administrative and Economic Science

Ismail Esraa Nathem & Rashed Safwan Nathem. Effect A comparative study between the two generalizations of the distribution of the power function with application. ***University of Kirkuk Journal For Administrative and Economic Science*** **(2025) 15 (1):280-294.**

A comparative study between the two generalizations of the distribution of the power function with application

Esraa Nathem Ismail [1], Safwan Nathem Rashed [2]

[1,2] *College of Islamic Sciences, Islamic Finance and Banking Sciences Department, University of Baghdad, Baghdad, Iraq*

israa.22csp57@student.uomosul.edu.iq [1]
Safwan75nathem@uomosul.edu.iq [2]

Abstract: In this research, the Power Function (PF) distribution, which is one of the continuous probability distributions, has been generalized using two prominent generalizations: the McDonald Power Function (McPF) and the Topp-Leone Power Function (TLPF). The study included an analysis of the properties of the basic distribution and its two generalizations to understand the dynamics of these distributions and their practical applications. The parameters of the basic and generalized distributions, including the shape and scale parameters, were estimated using the Maximum Likelihood Estimation (MLE) method, which is one of the most common and accurate methods for parameter estimation. The three distributions were compared using the Mean Squared Error (MSE) criterion to assess the accuracy of the estimates, as well as other criteria such as AIC, BIC, and Log-Likelihood to evaluate the performance of the generalized distributions (McPF and TLPF) compared to the basic distribution (PF). The Monte Carlo method was used to generate data with different sample sizes and initial values for each distribution, contributing to the study of the effectiveness of the three distributions in describing the data. Additionally, the study was applied to real data to validate the theoretical results. The study relied on R programming language due to its capability in handling complex statistical analysis. The results demonstrated the significance of the generalized distributions in improving the performance of the basic PF distribution in terms of accuracy and flexibility in data modelling.

Keywords: Power Function Distribution, McDonald Power Function Generalization, Topp-Leone Power Function Generalization.

دراسة مقارنة بين تعميمي توزيع دالة القوى مع التطبيق

الباحثة: اسراء ناظم إسماعيل [١]، د. صفوان ناظم راشد [٢]

[١،٢] *قسم الاحصاء والمعلوماتية - كلية علوم الحاسوب والرياضيات - جامعة الموصل، الموصل، العراق*

المستخلص: في هذا البحث، تم تعميم توزيع دالة القوى (Power Function (PF))، وهو أحد التوزيعات الاحتمالية المستمرة، باستخدام تعميمين بارزين: تمثل بتعميم ماكدونالد لدالة القوى (McDonald Power

(function (McPF) وتعميم توب_ليون لدالة القوى ((Topp-Leone Power Function (TLPF) ، وقد تضمنت الدراسة تحليل خصائص التوزيع الأساسي والتوزيعين المعممين بهدف فهم ديناميكية هذه التوزيعات وتطبيقاتها العملية. كما تم تقدير معلمات التوزيع الأساسي والتوزيعين المعممين والتي تشمل معلمة الشكل والقياس، باستخدام طريقة الإمكان الأعظم، والتي تُعد من أكثر الطرق شيوعًا ودقة في تقدير المعلمات. وتم مقارنة التوزيعات الثلاثة باستخدام معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقييم دقة التقديرات، فضلاً عن معايير أخرى مثل AIC وBIC وLog-Likelihood لتقييم أداء التوزيعات المعممة (McPF) وTLPF)) مقارنة بالتوزيع الأساسي (PF). واستخدام أسلوب مونت كارلو (Monte Carlo) لتوليد بيانات بأحجام وقيم أولية مختلفة لكل توزيع، مما ساهم في دراسة فعالية التوزيعات الثلاثة في وصف البيانات. كما تم تطبيق الدراسة على بيانات حقيقية لتأكيد النتائج المستخلصة من الجانب النظري. اعتمدت الدراسة على برمجيات بلغةR ، نظرًا لقدرتها على التعامل مع التحليل الإحصائي المعقد. وأظهرت النتائج أهمية التوزيعات المعممة في تحسين أداء التوزيع الأساسي لـ(PF) من حيث الدقة والمرونة في نمذجة البيانات.

الكلمات المفتاحية: توزيع دالة القوى، تعميم ماكدونالد لتوزيع دالة القوى، تعميم توب-ليون لتوزيع دالة القوى.

Corresponding Author: E-mail: israa.22csp57@student.uomosul.edu.iq

١- المقدمة (Introduction).

تعد التوزيعات الاحتمالية مفيدة جداً في وصف وتنبؤ وتحليل البيانات الحقيقية. وعلى الرغم من تطوير العديد من التوزيعات، إلا أن هناك دائماً طرقاً مختلفة لتطويرها. حيث يتم استخدام العديد من التوزيعات الاحتمالية لدراسة بيانات الفشل وتطبيقها على نطاق واسع في مجموعة متنوعة من المجالات، مثل توزيع Weibull وتوزيع Gamma وغيرها من التوزيعات، حيث تلعب هذه التوزيعات دوراً مركزياً ومهماً نظراً لمزاياها في التطبيق. من بين هذه التوزيعات، هو توزيع دالة القوى (Meniconi &Barry (Power Function) (1996,، كواحد من التوزيعات المهمة والواسعة الاستعمال في نمذجة البيانات المتعلقة بأوقات الفشل والبقاء للأجهزة والمعدات الكهربائية، وكذلك في تمثيل بيانات الحياة أو الموت التابعة للكائنات الحية. كما يعد هذا التوزيع حالة خاصة لتوزيع باريتو (Mohamed & Mabaar, 2023) . ومن اجل الحصول على توزيعات جديدة اكثر مرونة للتعامل مع البيانات المستمرة من التوزيع الاصلي, تم تعميم توزيع دالة القوى (Power function) باستخدام تعميم ماكدونالد (McDonald) والمشتق من اسم العالم نفسه عام (1984) كتوزيع احتمالي متعدد الاستخدامات, والتعميم الثاني للتوزيع الاساسي المقدم من قبل العالم توب ليون (Topp-Leone) سنة (1955) والذي تميز ببساطته كدالة كثافة احتمالية, حيث تم من خلال التعميمين اضافة معلمات جديدة الى التوزيع الاصلي وهذه المعلمات يكون لها دور مهم في تمثيل شكل التوزيع ليجعل التوزيع اكثر ملاءمة للبيانات اي له القدرة على تمثيل البيانات بأفضل صورة فضلاً عن تحسين التنبؤات والتحليل الاحصائي لها في مجالات مختلفة يتلاءم مع التوزيع المدروس لتقييم موثوقية المكونات، وأثبتت فعاليته عبر بيانات اختبار الحياة المعجلة و .EMP يتميز بمعدل مخاطرة غير ثابت، مما يجعله أدق من التوزيع الأسي في التنبؤ بعمر المكونات، خاصةً عند دراسة تأثيرات EMP، وESD، والإشعاع. لذا، يُوصى باستخدامه في تحليل فشل المكونات الإلكترونية. وقدم (Mohammed et al. 2018) توزيع ماكدونالد لدالة القوى ذات الخمس معلمات (McPF) وحدد خصائصه الإحصائية، مثل دالة المخاطرة والعزوم والدالة المولدة للعزوم. واقترح عدة توزيعات فرعية، وأظهر ملاءمته للبيانات ذات الالتواء السلبي أو الإيجابي فضلاً عن تقدير معلمات التوزيع، وتبين أن McPF يوفر ملاءمة أفضل مقارنة بالتوزيعات الأخرى. وطبق (Ahmed, H., A., 2023) تعميم توب ليون على توزيع Rayleigh المرفوع(ER) ، حيث دُرست خصائص التوزيع الجديد، مثل العزوم، الوسيط، المنوال، الربيعات، والدالة المولدة للعزوم، فضلاً عن مقاييس الالتواء والتفلطح، وتم تقدير معلمات التوزيع، في حين أن المعلمة المضافة كان لها تأثير واضح. كما تبين أن توزيع TLER أكثر مرونة على البيانات الحقيقية. وعليه تم دراسة خصائص توزيع دالة القوى (PF) وكذلك التوزيعين المعممين لـ(McDonald) و(Topp-Leone) فضلاً عن تقدير معلمات كل توزيع وفق حالات مختلفة بطريقة دالة الامكان الاعظم (Maximum Likelihood) ومقارنة هذه المقدرات باستخدام معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) للوصول الى افضل مقدر يناسب البيانات، كما تم مقارنة تعميمي التوزيع الاصلي باستخدام معيار (AIC),(BIC) من اجل معرفة افضل بين التوزيعين المعممين .

٢- مشكلة البحث (Research Problem)

العديد من البيانات تتبع توزيعات معينة، لكن غالبية هذه التوزيعات تكون أقل مرونة من التوزيع المدروس، وبالتالي تكون أقل ملاءمة للبيانات في تمثيلها من ناحية الشكل. لذا، تم إجراء توسيع أو تعميم لهذه التوزيعات للحصول على توزيعات جديدة تكون أكثر مرونة وملاءمة للبيانات مقارنة بالتوزيع الأصلي المدروس. وقد ظهرت عدة طرق تسعى إلى التوسيع أو التعميم وفي هذه الرسالة تم توسيع ماكدونالد وتوسيع توب ليون لتوزيع دالة القوى.

٣- هدف البحث (Research Objective)

تهدف هذه الرسالة إلى تعميم توزيع دالة القوى ((Power Function (PF) باستخدام تعميمي ماكدونالد (McPF) (MacDonald) وتوب ليون (Topp-Leone) (TLPF) للحصول على توزيعات أكثر مرونة وملاءمة تمثل البيانات. تشمل الدراسة تحليل خصائص توزيع دالة القوى والتوزيعات المعممة الناتجة عنها، بالإضافة إلى إيجاد أفضل مقدر لمعلمات كل توزيع باستخدام طريقة الإمكان الأعظم، فضلاً عن المقارنة افضلية التوزيعين المعممين.

٤- توزيع دالة القوى(Power Function Distribution)

يمثل توزيع دالة القوى من التوزيعات المهمة والواسعة الاستعمال في نمذجة البيانات المتعلقة بأوقات الفشل, وهو احد التوزيعات الاحتمالية المستمرة له اشكال مختلفة تعتمد على معلمة الشكل الخاصة به لهذا تم استخدامه لهذا تم استخدام في عدة مجالات في الجانب الاجهزة الكهربائية والحياتية كما يعد من الحالات الخاصة لتوزيع باريتو (Mohamed & Jabaar ,2023). **فإذا كان المتغير العشوائي يتبع توزيع دالة القوى(PF) الذي تكون دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f.) له.**

$$f_{PF}(x) = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}} \qquad 0 < x < \beta \ (\alpha, \beta > 0) \qquad (1)$$

حيث ان: α هي معلمة الشكل (Shape parameter),β هي معلمة القياس (Scale parameter)

وان توزيع الدالة التجميعية (c. d.f.) لها:

$$F_{PF}(x) = \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} \qquad 0 < x < \beta \qquad (2)$$

٥- توزيع ماكدونالد لدالة القوى(McDonald Power Function Distribution).

يعرف النوع الجديد من التوزيعات بتوزيع ماكدونالد (نرمز له بالرمز Mc) وتم في هذا التوزيع إدخال معلمات الشكل الإضافية يهدف إلى تقديم الالتواء .ويسمح لنا بتغيير وزن الذيل الخاصة بمنحنى دالة القوى (Alexander et al.,2012). تعرف دالة كثافة الاحتمال(pdf) للفئة الجديدة من توزيعات ماكدونالد حسب الصيغة الرياضية الاتية (Cordeiro et al. 2012):

$$g(x) = \frac{c}{B(a,b)} f(x)\big(F(x)\big)^{ac-1}\big(1-\big(F(x)\big)^{c}\big)^{b-1} \qquad (3)$$

حيث أن :a,b,c >0 هي معلمات شكل اضافية

حيث تم إضافة معلمات جديدة الى توزيع دالة القوىPF الاساسي ليطلق عليه بتوزيع ماكدونالد لدالة القوى ليوسع دالة القوى الى عدة دوال أخرى كحالات خاصة, لأنه يحتوي على المزيد من المعلمات وخصوصاً معلمات شكل، مما يعطي شكلاً جديداً لدالة القوى, اذ ان دالة كثافة الاحتمال لدالة القوى (PF) التي سبق تعريفها في المعادلة (1) تُعامل كتوزيع اساسي في توزيع McDonald ويتم الحصول على دالة كثافة الاحتمال لتوزيع الجديد من خلال تعويض دالة كثافة الاحتمال لتوزيع دالة القوى PF وفق المعادلة (1) وكذلك الدالة التراكمية لها المعرفة في المعادلة (2) في معادلة (3) لتوزيع ماكدونالد الموسع والتي تمثل دالة كثافة الاحتمال لتوزيع McDonald لنحصل على دالة كثافة الاحتمال لتوزيع ماكدونالد لدالة القوى الذي يرمز له(McPF) . وان دالة كثافة الاحتمال لتوزيع McPF تكون بالصيغة الآتية:

$$g_{McPF}(x) = \frac{c}{B(a,b)} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}} \left(\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{ac-1} \left(1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha c}\right)^{b-1} \qquad \alpha,\beta,a,b>0\ ,0<x<\beta \qquad (4)$$

حيث أن : α,a,b,c >0 : معلمات شكل, β >0: تمثل معلمة القياس لتوزيعMcPF

وباستخدام مفكوك ذو الحدين (Binomial expansion) :-

$$\left(1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha c}\right)^{b-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(b)}{m!\,\Gamma(b-m)} \frac{x^{m\alpha c}}{\beta^{m\alpha c}}$$

وبتعويض المعادلة اعلاه في المعادلة (4) نحصل على:-

$$g_{McPF}(x) = \frac{1}{B(a,b)} \sum_{m=0}^{\infty} \tau_m \alpha c(a+m) \frac{x^{\alpha c(a+m)-1}}{\beta^{\alpha c(a+m)}} \qquad (5)$$

توضح المعادلة (2.21) أن دالة الكثافة لتوزيع McPF هي مجموع مرجح لدالة الكثافة لتوزيع دالة القوى PF مع المعلمات $(\alpha c(a+m), \beta)$.

- وان الدالة التجميعية لتوزيع McPF يمكن ايجادها من الدالة التجميعية لتوزيع ماكدونالد المعمم (Al-Babtain, Merovci & Elbatal ,2015) المعرفة بالصيغة الآتية :

$$G_{McPF}(x) = I_{(F(x))^c}(a,b) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{(F(x))^c} u^{(a-1)}(1-u)^{b-1}\,du \qquad (6)$$

وباستخدام مفكوك ذو الحدين (Binomial expansion) لإيجاد قيمة $(1-u)^{b-1}$ فأن :-

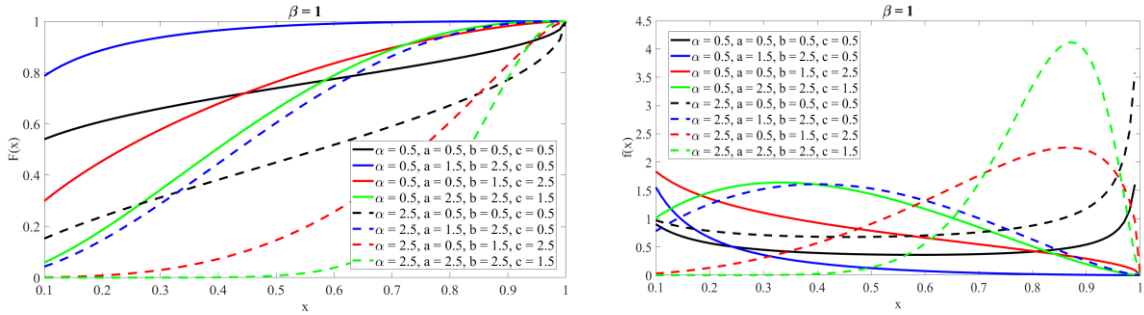
$$G_{McPF}(x) = \frac{1}{B(a,b)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(b)}{m!\,\Gamma(b-m)} \frac{\left(\left(\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{c}\right)^{a+m}}{a+m} \qquad (7)$$

- وتكون دالة البقاء لتوزيع McPF كالاتي:

$$S_{McPF}(x) = 1 - G_{McPF}(x) = 1 - \frac{1}{B(a,b)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(b)}{m!\,\Gamma(b-m)}\frac{\left(\left(\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{c}\right)^{a+m}}{a+m} \quad (8)$$

- دالة المخاطرة لتوزيع McPF تعرف كالآتي:

$$h_{McPF}(x) = \frac{g_{McPF}(x)}{1 - G_{McPF}(x)} = \frac{\frac{c}{B(a,b)}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}}\left(\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{ac-1}\left(1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha c}\right)^{b-1}}{1 - \frac{1}{B(a,b)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(b)}{m!\,\Gamma(b-m)}\frac{\left(\left(\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{c}\right)^{a+m}}{a+m}} \quad (9)$$



c.d.f p.d.f

الشكل (1): p.d.f وc.d.f لتوزيع ماكدونالد لدالة القوى (McPF) عندما β=1 وبأخذ قيم مختلفة لـ α وa,b,c

أ- خصائص التوزيع (Distribution properties)

- **العزم حول الصفر** (Moment around zero)

$$E(x^r) = \int_0^{\beta} x^r g_{McPF}(x)dx = \frac{1}{B(a,b)}\sum_{m=0}^{\infty}\tau_m\frac{\alpha c(a+m)\beta^r}{[r+\alpha c(a+m)]} \quad (10)$$

- **الوسط والتباين (Mean and Variance)**

وفق المعادلة (10) عندما(r=1) نحصل على الوسط الحسابي لتوزيع McPF .

$$E(x) = \frac{1}{B(a,b)}\sum_{m=0}^{\infty}\tau_m\frac{\alpha c(a+m)\beta}{[1+\alpha c(a+m)]} \quad (11)$$

اما التباين يتم الحصول عليها وفق المعادلة $\sigma_x^2 = Ex^2 - (Ex)^2$ ادناه :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{B(a,b)}\sum_{m=0}^{\infty}\tau_m\frac{\alpha c(a+m)\beta^2}{[2+\alpha c(a+m)]} - \left(\frac{1}{B(a,b)}\sum_{m=0}^{\infty}\tau_m\frac{\alpha c(a+m)\beta}{[1+\alpha c(a+m)]}\right)^2 \quad (12)$$

- **الدالة المولدة للعزوم (Moment Generating Function)**

$$M_{McPFx}(t) = \int_0^{\beta} e^{tx} g_{McPF}(x)dx = \frac{1}{B(a,b)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{r!}\sum_{m=0}^{\infty}\tau_m\frac{\alpha c(a+m)\beta^r}{[r+\alpha c(a+m)]} \quad (13)$$

- **المنوال والوسيط (Mode and Median)**

يمكن الحصول على المنوال لتوزيع McPF من خلال$f'(x) = 0$ لمعادلة (4) (Haq et al., 2018).

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{c\alpha}{\beta^{\alpha ac}B(a,b)}x^{\alpha ac-2}\left(1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha c}\right)^{b-2}\left((\alpha ac-1)\left(1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha c}\right) - \alpha cx(b-1)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha c-1}\left(\frac{1}{\beta}\right)\right) \quad (14)$$

ويمكن ايجاد المنوال بطريقة اخرى عن طريق استخدام المعادلة (5).

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{1}{B(a,b)} \sum_{m=0}^{\infty} \tau_m \left(\alpha c(a+m) \frac{(\alpha c(a+m)-1)x^{\alpha c(a+m)-2}}{\beta^{\alpha c(a+m)}} \right) = 0 \qquad (15)$$

اما الوسيط

$$G_{McPF}(x) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{B(a,b)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(b)}{m!\,\Gamma(b-m)} \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha c(a+m)}}{a+m} = \frac{1}{2} \qquad (16)$$

- **التواء والتفلطح (Skewness and Kurtosis)**

يتم ايجاد الالتواء لتوزيع McPF من خلال الصيغة $Skewness = \frac{\mu_3}{\sqrt{(\mu_2)^3}}$ والتفلطح من الصيغة $Kurtosis = \frac{(\mu_4)}{(\mu_2)^2}$ والجدول يوضح قيم الالتواء والتفلطح عند قيم مختلفة للمعلمات.

ب- تقدير معلمات توزيع ماكدونالد لدالة القوى بطريقة دالة الامكان الاعظم

يوجد العديد من طرق التقدير ولكن طريقة (MLE) توفر اقصى قدر من المعلومات حول خصائص المعلمات المقدرة والاكثر استخداماً، واعتُمد لتقدير المعلمات غير المعروفة لتوزيع (McPF) الموضحة في المعادلة (4)، بتوفيرn من مشاهدات $(x_1, x_2, \dots \dots x_n)$ من عينة المسحوبة من دالة كثافة الاحتمال لتوزيع McPF وتكون فيها دالة الامكان معرفة بالصيغة الاتية: -

$$L(\alpha,\beta,a,b,c) = \prod_{i=1}^{n} g_{McPF}(x)$$
$$= c^n \alpha^n \left(\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\right)^{-n} \beta^{-n\alpha ac} e^{(\alpha ac-1)\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)} e^{b-1\sum_{i=1}^{n} ln\left(1-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha c}\right)} \qquad (17)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادلة (2.34) نحصل على :-

$$lnL(\alpha,\beta,a,b,c)$$
$$= n\ln c + n\ln\alpha - n\ln(\Gamma(a)) - nln(\Gamma(b)) + n\ln(\Gamma(a,b)) - n\alpha ac ln\beta$$
$$+ (\alpha ac-1)\left(\sum_{i=1}^{n} ln\, x_i\right) + (b-1)\left(\sum_{i=1}^{n} ln\left(1-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha c}\right)\right) \qquad (18)$$

وسوف نناقش الحالات الاتية عندما تكون فيها معلمات الشكل (a,b,c) ثابت عند قيم معينة :

(١) تقدير معلمة الشكل α عندما تكون المعلمات الاخرى معلومة.

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - nac\ln\beta + ac\left(\sum_{i=1}^{n} ln\, x_i\right) + (b-1)\left(\sum_{i=1}^{n} -\frac{\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha c} c\, ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right)}{\left(1-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha c}\right)}\right) = 0 \qquad (19)$$

(٢) تقدير معلمة القياس β عندما تكون المعلمات الاخرى معلومة.

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -\frac{n\alpha ac}{\beta} + \alpha c(b-1)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta^{-\alpha c-1}(x_i)^{\alpha c}}{\left(1-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha c}\right)}\right) = 0 \qquad (20)$$

(٣) تقدير معلمة الشكل α ومعلمة القياس β عندما تكون المعلمات الاخرى معلومة.

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right) = -\frac{nac}{\beta} + (b-1)$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha c^2 \left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha c} ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right)}{\beta\left(1-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha c}\right)} + \frac{c\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha c}}{\beta\left(1-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha c}\right)} + \frac{\alpha c^2\left(\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha c}\right)^2 ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right)}{\beta\left(1-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha c}\right)^2}\right) = 0 \qquad (21)$$

٦- توزيع توب ليون لدالة القوى (Topp Leone Power Function Distribution)

هو توزيع بسيط استخدمه مختلف الإحصائيين كبديل لتوزيع بيتا والذي اقترحه Topp and Leone في عام ١٩٥٥ لإنشاء توزيعات احتمالية جديدة يسمى ((Topp Leone Generalization وهذه العائلة لها القدرة على التوفيق افضل من التوزيعات الاساسية (Al-Shomrani et al.,2016), وان صيغة دالة كثافة الاحتمال المعمم (p. d. f.) ودالة التوزيع التراكمية (c. d. f.) تعطى بالصيغة الاتية :

$$d_{TL}(x) = 2\theta f(x)\big(1-F(x)\big)[1-(\bar{F}(x))^2]^{\theta-1} \;;\theta>0 \qquad (22)$$

التوزيع التجميعي له:

$$D_{TL}(x) = [1-(\bar{F}(x))^2]^{\theta} \quad : 0 \le x \ge 1,\ \theta>0 \qquad (23)$$

حيث أن: θ هي معلمة الشكل (Shape parameter)

$f(x)$ و $F(x)$:تمثلان دالة الكثافة الاحتمالية والدالة التجميعية للتوزيع الاساس المطلوب تعميمه $\bar{F}(x)=1-F(x)$ يتم استخدام عائلة توب ليون لتوسيع توزيع دالة القوى إذ أن دالة كثافة الاحتمال لتوزيع دالة القوى تعامل كتوزيع اساسي من خلال تعويض المعادلتين (١) و(٢) في معادلة (22) لنحصل على دالة كثافة الاحتمال لتوزيع (Topp Leone Power Function Distribution)والتي يرمز لها بالرمز (TLPF) وهي (Ahmed, 2023) :-

$$d_{TLPF}(x) = 2\theta\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}}\left(1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)\left(1-\left(1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^2\right)^{\theta-1} \quad ,0<x<\beta \qquad (24)$$

حيث أن:0< α,θ هي معلمات الشكل (Shape parameter),0< β هي معلمة القياس (Scale parameter)

اما الدالة التجميعية له وفق المعادلة (23) هي:-

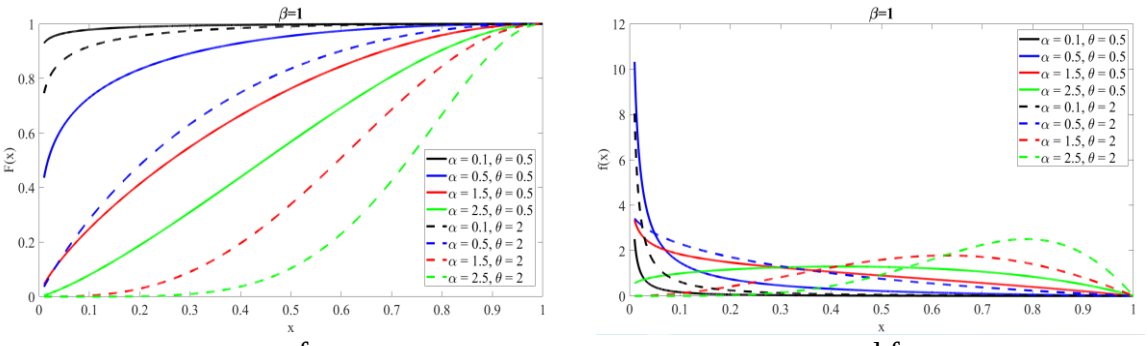
$$D_{TLPF}(x) = \left(1-\left(1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^2\right)^{\theta} \qquad (25)$$

- وتعرف دالة البقاء(Survival function) لتوزيع (TLPF) وفق الصيغة الآتية:-

$$S_{TLPF}(x) = 1-D_{TLPF}(x) = 1-\left(1-\left(1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^2\right)^{\theta} \qquad (26)$$

- وتعرف دالة المخاطرة (Risk function) لتوزيع (TLPF) وفق الصيغة الآتية :-

$$h_{TLPF}(x) = \frac{d_{TLPF}(x)}{S_{TLPF}(x)} = \frac{2\theta\alpha x^{\alpha-1}\left(1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)\left(1-\left(1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^2\right)^{\theta-1}}{\beta^{\alpha}\left(1-\left(1-\left(1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^2\right)^{\theta}\right)} \qquad (27)$$



c.p.f p.d.f

الشكل (٢): p.d.f وc.d.f المخاطرة لتوزيع توب ليون لدالة القوى (TLPF) عندما β=1 وبأخذ قيم مختلفة لـ α و θ

أ- خصائص التوزيع (Distribution properties)

- **العزم حول الصفر (Moment around zero)**

يتم حساب عزوم توزيع توب-ليون لدالة القوى (Hassan et al.(2021)) باستخدام الصيغة:

$$E(x^r)=\int_0^{\beta} x^r d_{TLPF}(x)dx=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2m+1}\frac{(-1)^{m+j}2\Gamma(\theta+1)}{m!\ \Gamma(\theta-m)(j+1)}\binom{2m+1}{j}\frac{\beta^r\alpha(j+1)}{r+\alpha(j+1)} \qquad (28)$$

- **الوسط والتباين(Mean and Variance)**

فأن العزم الاول حول الصفر, عندما (r=1) في المعادلة (29) نحصل على الوسط الحسابي لتوزيع TLPF.

$$E(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2m+1}(-1)^{m+j}\frac{2\Gamma(\theta+1)}{m!\ \Gamma(\theta-m)(j+1)}\binom{2m+1}{j}*\frac{\beta\alpha(j+1)}{1+\alpha(j+1)} \qquad (29)$$

اما التباين

$$\sigma_x^2=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2m+1}(-1)^{m+j}\frac{2\Gamma(\theta+1)}{m!\ \Gamma(\theta-m)(j+1)}\binom{2m+1}{j}*\frac{\beta^2\alpha(j+1)}{2+\alpha(j+1)}$$
$$-\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2m+1}(-1)^{m+j}\frac{2\Gamma(\theta+1)}{m!\ \Gamma(\theta-m)(j+1)}\binom{2m+1}{j}*\frac{\beta\alpha(j+1)}{1+\alpha(j+1)}\right)^2 \qquad (30)$$

- **الدالة المولدة للعزوم(Moment Generating Function)**

يتم ايجاد الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي x مع الاستناد الى المتسلسلة الاسية $e^{tx}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(tx)^r}{r!}$ كالاتي :

$$M_x(t)=Ee^{tx}=\int_0^{\beta}e^{tx}.d_{TLPF}(x)dx=\int_0^{\beta}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(tx)^r}{r!}.d_{TLPF}(x)dx$$

وبالتعويض معادلة (29) في المعادلة اعلاه نحصل على:-

$$M_x(t)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2m+1}(-1)^{m+j}\frac{2\Gamma(\theta+1)}{m!\ \Gamma(\theta-m)(j+1)}\binom{2m+1}{j}\frac{(t)^r}{r!}*\frac{\beta^r\alpha(j+1)}{r+\alpha(j+1)} \qquad (31)$$

- **المنوال والوسيط (Mode and Median)**

ويمكن الحصول على المنوال لتوزيع TLPF من المعادلة (24) بأخذ مشتقة الى x مع مساواة المعادلة بالصفر وحلها عددياً لنحصل على (Abbas et al., 2017) :

$$\frac{d}{dx}\left(2\theta\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}}\left(1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)\left(1-\left(1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^2\right)^{\theta-1}\right)=0$$

اما الوسيط لقيم المتغير العشوائي x التي تحقق المعادلة التالية :

$$D_{TLPF}(x)=\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad x_{TLPF}=\beta\left(1-\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (32)$$

- **التواء والتفلطح (Skewness and Kurtosis)**

يتم ايجاد الالتواء لتوزيع TLPF من خلال الصيغة $Skewness=\frac{\mu_3}{\sqrt{(\mu_2)^3}}$ و التفلطح من الصيغة $Kurtosis=\frac{(\mu_4)}{(\mu_2)^2}$ بالاعتماد على العزم الاول والثاني والثالث والرابع حول الصفر. وتم تطبيق خصائص توزيع TLPF والموضح في الجانب التجريبي ومن ضمنها قيم الالتواء والتفلطح عند قيم مختلفة للمعلمات .

ب- تقدير معلمات توزيع توب ليون لدالة القوى بطريقة دالة الامكان الاعظم

بتوفر n من المشاهدات العينة المسحوبة من توزيع توب ليون لدالة القوى(TLPF) وبالرجوع الى دالة الكثافة في المعادلة (2.41) فأن :

$$L(\alpha,\beta,\theta)=\prod_{i=1}^{n} d_{TLPF}(x)=2^n\theta^n\frac{\alpha^n}{\beta^{n\alpha}}e^{\sum_{i=1}^{n} ln\left(x_i{}^{\alpha-1}\left(1-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right)\left(1-\left(1-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^2\right)^{\theta-1}\right)} \quad (33)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادلة (33) نحصل على :-

$$lnL(\alpha,\beta,\theta)=nln2+nln\theta+nln\alpha-n\alpha ln\beta+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)+\sum_{i=1}^{n} ln\left(1-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right)$$
$$+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n} ln\left(1-\left(1-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^2\right) \quad (34)$$

ووفق المعادلة (34) سوف نناقش الحالات المختلفة في عملية تقدير معلمات توزيع علماً ان θ قيمة ثابتة وعلى النحو الاتي:

(١) تقدير معلمة الشكل α عندما تكون β معلومة.

$$\frac{\partial lnL}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}-nln\beta+\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}-\frac{\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha} ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right)}{1-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}}+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{2\left(1-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right)\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha} ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right)}{\left(1-\left(1-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^2\right)}=0 \quad (35)$$

(٢) تقدير معلمة القياس β عندما تكون α معلومة.

$$\frac{\partial lnL}{\partial\beta}=-\frac{n\alpha}{\beta}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}\alpha}{\beta\left(1-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right)}+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}-\frac{2\left(1-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right)\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}\alpha}{\beta\left(1-\left(1-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^2\right)}=0 \quad (36)$$

(٣) تقدير المعلمات عندما معلمة الشكل α, ومعلمة القياس β مجهولتين .

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial lnL}{\partial\alpha}\right)=\frac{1}{\beta}\left(-n+\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}\alpha ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right)+\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{2\alpha}}{\left(\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}-1\right)^2}\right.$$
$$-2\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{3\alpha}\alpha ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right)+2\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{2\alpha}-3\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{3\alpha}+\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{4\alpha}}{\left(2\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{2\alpha}\right)^2}$$
$$\left.+2\sum_{i=1}^{n}\frac{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{3\alpha}\alpha ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right)+2\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{2\alpha}-3\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{3\alpha}+\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{4\alpha}}{\left(2\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{2\alpha}\right)^2}\right)=0 \quad (37)$$

٧- الجانب التجريبي (Experimental Aspect):-

تم إجراء محاكاة باستخدام طريقة مونت كارلو(Monte Carlo) من خلال اختيار احجام عينة مختلفة (n=25, 100) مع قيم اولية للمعلمات المتمثلة بـ(α=0.5, 2.5) (β=1, 3, 5, 10) (θ=0.5,2)، حيث تم توليد اعداد عشوائية بأحجام العينات نفسها المذكورة انفاً من التوزيع المنتظم القياسي المستمر $u\sim(0,1)$ بتكرار (N=1000) باستخدام الدالة العكسية لتوزيع لكي نحصل على x ، ودراسة خصائص التوزيعات الثلاثة من خلال الحصول على قيم النزعة المركزية وباستخدام طريقة دالة الامكان الاعظم تم تقدير معلمات التوزيع PF والتوزيعيين المعممين McPF وTLPF بمختلف الحالات المدروسة، وبالاعتماد على معيار متوسط مربعات الخطأ(MSE) فضلاً عن استخدام معيار اكايكي(AIC), ومعيار(BIC), للمقارنة بين التوزيعات, وقد تم كتابة برامج بلغة R من اجل التوصل الى النتائج.

أ- تقدير قيم النزعة المركزية للتوزيع الاساسي وتعميمها.

بالاعتماد على المعادلات الاساسية التي تم التوصل اليها في الجانب النظري تم دراسة خصائص توزيع دالة القوى PF وتوزيع McPF وتوزيع TLPF المعممين للحصول على التوقع والتباين والمنوال والوسيط فضلاً عن الالتواء والتفلطح للتوزيعات المدروسة وعلى نحو الاتي:-

الجدول (١): التوقع والتباين والمنوال والوسيط والالتواء والتفلطح لتوزيع PF لقيم معلمات مختلفة

α	β	Mx_{PF}	Mo_{PF}	Me_{PF}	Var_{PF}	SD_{PF}	Sk_{PF}	Kur_{PF}
0.5	3	1.0000	0	0.7500	0.8000	0.8944	0.6389	2.1429
	10	3.3333	0	2.5000	8.8889	2.9814	0.6389	2.1429
2.5	3	2.1429	3	2.2736	0.4082	0.6389	-0.7318	2.7566
	10	7.1429	10	7.5786	4.5351	2.1296	-0.7318	2.7566

الجدول (٢) التوقع والتباين والمنوال والوسيط والالتواء والتفلطح لتوزيع McPF لقيم معلمات مختلفة

No.	α	β	a	b	c	Mx_{McPF}	Mo_{McPF}	Me_{McPF}	Var_{McPF}	SD_{McPF}	Sk_{McPF}	Kur_{McPF}
١	0.5	3	0.5	0.5	0.5	0.7383	1.7586	0.1875	0.9782	0.9890	1.0914	2.6718
٢	0.5	3	2.5	2.5	2.5	1.6972	1.8087	1.7231	0.3305	0.5749	-0.1882	2.3649
٣	0.5	10	0.5	0.5	0.5	2.4610	5.8631	0.6250	10.8683	3.2967	1.0914	2.6718
٤	0.5	10	2.5	2.5	2.5	5.6578	6.0287	5.7435	3.6698	1.9157	-0.1887	2.3698
٥	2.5	3	0.5	0.5	0.5	1.5484	1.3688	1.7230	1.0721	1.0354	-0.0863	1.5453
٦	2.5	3	2.5	2.5	2.5	2.6468	2.7714	2.6851	0.0446	0.2112	-1.3303	8.7561
7	2.5	10	0.5	0.5	0.5	5.1614	4.5628	5.7435	11.9123	3.4514	-0.0863	1.5453
٨	2.5	10	2.5	2.5	2.5	8.8232	9.2381	8.9503	0.4898	0.6998	-1.2259	7.8680

الجدول (٣): التوقع والتباين والمنوال والوسيط والالتواء والتفلطح لتوزيع TLPF لقيم معلمات مختلفة.

No.	α	β	θ	Mx_{TLPF}	Mo_{TLPF}	Me_{TLPF}	Var_{TLPF}	SD_{TLPF}	Sk_{TLPF}	Kur_{TLPF}
١	0.5	3	1	0.5000	0.0000	0.2574	0.3500	0.5916	1.5178	4.7668
٢	0.5	3	2	0.8000	0.0000	0.6315	0.4314	0.6568	0.8913	3.0186
٣	0.5	10	1	1.6667	0.0000	0.8579	3.8889	1.9720	1.5178	4.7668
٤	0.5	10	2	2.6667	0.0000	2.1050	4.7937	2.1894	0.8913	3.0186
٥	2.5	3	1	1.7857	2.0264	1.8357	0.3827	0.6186	-0.3114	2.3546
٦	2.5	3	2	2.1390	2.3615	2.1967	0.2178	0.4666	-0.5717	2.8868
٧	2.5	10	1	5.9524	6.7548	6.1190	4.2517	2.0620	-0.3114	2.3546
٨	2.5	10	2	7.1301	7.8716	7.3224	2.4195	1.5555	-0.5717	2.8868

ب- تقدير α عندما تكون β معلومة لتوزيع دالة القوى PF وتوزيعMcPF وتوزيع TLPF

الجدول (٤): المقدرات دالة الامكان الاعظم للمعلمة α عندما تكون معلمة β معلومة للتوزيعات الثلاثة

Initial values			Estimation		β=1	β=3	β=5	β=10
n=25	α=0.1		α_{PF}	Mean	0.10448	0.10411	0.10433	0.10455
				MSE	4.915E-04	4.846E-04	4.919E-04	4.927E-04
n=100			α_{PF}	Mean	0.10110	0.10090	0.10119	0.10113
				MSE	1.035E-04	1.026E-04	1.035E-04	1.072E-04
n=25	α=2.5		α_{PF}	Mean	2.60694	2.60705	2.60493	2.61199
				MSE	0.31055	0.30650	0.29935	0.30114
n=100			α_{PF}	Mean	2.52796	2.52598	2.52468	2.51906
				MSE	0.06505	0.06591	0.06423	0.06402
n=25	α=0.1	a=0.5 b=1.5 c=2.5	α_{McPF}	Mean	0.09679	0.10046	0.09547	0.10325
				MSE	0.00165	0.00129	0.00176	0.00178
n=100			α_{McPF}	Mean	0.10331	0.10107	0.10453	0.10273
				MSE	0.00108	0.00091	0.00123	0.00120
n=25		a=2.5 b=2.5 c=1.5	α_{McPF}	Mean	0.10493	0.09796	0.10036	0.09137
				MSE	0.00090	0.00088	0.00085	0.00102
n=100			α_{McPF}	Mean	0.09906	0.10273	0.09947	0.09865
				MSE	0.00063	0.00058	0.00058	0.00072
n=25	α=2.5	a=0.5 b=1.5 c=2.5	α_{McPF}	Mean	2.50111	2.48676	2.47953	2.48275
				MSE	0.19936	0.16638	0.13211	0.22877
n=100			α_{McPF}	Mean	2.49127	2.48392	2.43947	2.52720
				MSE	0.05894	0.05524	0.04013	0.03600
n=25		a=2.5 b=2.5 c=1.5	α_{McPF}	Mean	2.48488	2.49928	2.49181	2.48377
				MSE	0.10047	0.10729	0.10660	0.08563
n=100			α_{McPF}	Mean	2.49581	2.47198	2.51328	2.49055
				MSE	0.02674	0.02352	0.02180	0.02145
n=25	α=0.1	θ=0.5	α_{TLPF}	Mean	0.10264	0.10238	0.10188	0.10272
				MSE	3.113E-04	3.230E-04	3.031E-04	2.988E-04
n=100			α_{TLPF}	Mean	0.10039	0.10057	0.10106	0.10059
				MSE	6.195E-05	6.841E-05	7.535E-05	7.012E-05
n=25	α=2.5		α_{TLPF}	Mean	2.56622	2.56015	2.54557	2.56173
				MSE	0.18557	0.18904	0.17117	0.17109
n=100			α_{TLPF}	Mean	2.51110	2.52271	2.51685	2.51087
				MSE	0.03826	0.04268	0.04127	0.04207
n=25	α=0.1	θ=2	α_{TLPF}	Mean	0.10160	0.10175	0.10108	0.10184
				MSE	1.944E-04	2.053E-04	1.992E-04	1.965E-04
n=100			α_{TLPF}	Mean	0.10070	0.10031	0.10095	0.10046
				MSE	5.278E-05	4.832E-05	4.782E-05	4.938E-05
n=25	α=2.5		α_{TLPF}	Mean	2.55650	2.56023	2.54183	2.55284
				MSE	0.13077	0.13431	0.12498	0.12906
n=100			α_{TLPF}	Mean	2.50459	2.51571	2.50826	2.51025
				MSE	0.03055	0.02988	0.03015	0.03026

في حالة α مجهولة وβ معلومة تم الحصول على افضل المقدرات لـ α لتوزيع دالة القوى عندما α=0.1, بقيمة اولية لـ β=3 بمختلف احجام العينة. وتكون الافضلية لتوزيع McPF عندما α=0.1 وβ=,5 وبمعلمات شكل مضافة a=2.5,b=2.5,c=1.5 بمختلف احجام العينة. اما الافضلية تكون لتوزيع TLPF عندما كانت القيمة الاولية لمعلمة الشكل α=0.1 ومعلمة القياس β=5 عند قيمة اولية لمعلمة شكل مضافة الى التوزيع الاساسي θ=2 , بمختلف احجام العينة المدروسة.

ت- تقدير β عندما تكون α معلومة لتوزيع دالة القوى PF وتوزيعMcPF وتوزيع TLPF

الجدول (٥): المقدرات دالة الامكان الاعظم للمعلمة β عندما تكون معلمة α معلومة للتوزيعات الثلاثة

Initial values			Estimation		β=1	β=3	β=5	β=10
n=25	α=0.1		β_{PF}	Mean	0.71391	2.15339	3.56297	7.10731
				MSE	0.12723	1.11916	3.21325	12.96613
n=100			β_{PF}	Mean	0.90933	2.73121	4.54124	9.10979
				MSE	0.01510	0.13149	0.38137	1.45056
n=25	α=٢.٥		β_{PF}	Mean	0.98406	2.95270	4.92028	9.84114
				MSE	0.00049	0.00434	0.01255	0.04941
n=100			β_{PF}	Mean	0.99596	2.98820	4.98007	9.96031
				MSE	0.00003	0.00028	0.00079	0.00313
n=25	α=0.1	a=0.5 b=1.5 c=0.5	β_{McPF}	Mean	0.69580	1.97283	3.21134	6.50860
				MSE	0.12837	1.25186	4.44911	15.09565
n=100			β_{McPF}	Mean	0.84176	2.66402	4.01355	8.25422
				MSE	0.03779	0.14114	1.26904	3.88504
n=25		a=2.5 b=2.5 c=1.5	β_{McPF}	Mean	0.84455	2.52606	4.05050	8.40834
				MSE	0.03016	0.27607	1.07119	3.41457
n=100			β_{McPF}	Mean	0.89162	2.70298	4.58025	9.32766
				MSE	0.01336	0.10700	0.21992	0.50639
n=25	α=2.5	a=0.5 b=1.5 c=0.5	β_{McPF}	Mean	0.83819	2.59628	4.30011	8.63761
				MSE	0.03500	0.24064	0.82077	2.64198
n=100			β_{McPF}	Mean	0.94292	2.82444	4.70785	9.36998
				MSE	0.00475	0.04132	0.13570	0.58249
n=25		a=2.5 b=2.5 c=1.5	β_{McPF}	Mean	0.95676	2.87637	4.76682	9.60436
				MSE	0.00209	0.01719	0.06205	0.17991
n=100			β_{McPF}	Mean	0.97205	2.91130	4.86466	9.70926
				MSE	0.00086	0.00856	0.02018	0.09182
n=25	α=0.1	θ=0.5	β_{TLPF}	Mean	0.88287	2.64623	4.42454	8.72858
				MSE	0.03943	0.35904	0.96810	4.25297
n=100			β_{TLPF}	Mean	0.91757	2.74062	4.59929	9.17333
				MSE	0.02950	0.29095	0.71838	3.07106
n=25	α=2.5		β_{TLPF}	Mean	0.95693	2.86556	4.78689	9.59891
				MSE	0.00531	0.04992	0.13085	0.44657
n=100			β_{TLPF}	Mean	0.98314	2.94395	4.91352	9.81327
				MSE	0.00085	0.01005	0.02440	0.10987
n=25	α=0.1	θ=2	β_{TLPF}	Mean	0.89092	2.68887	4.51240	9.00468
				MSE	0.03853	0.32345	0.82668	3.47460
n=100			β_{TLPF}	Mean	0.88640	2.65481	4.41713	8.83930
				MSE	0.03503	0.30289	0.86967	3.52752
n=25	α=2.5		β_{TLPF}	Mean	0.98085	2.94527	4.90327	9.81508
				MSE	0.00113	0.00976	0.02931	0.10530
n=100			β_{TLPF}	Mean	0.99340	2.98010	4.96584	9.92600
				MSE	0.00014	0.00126	0.00363	0.01611

في حالة β مجهولة وα معلومة تم الحصول على افضل المقدرات لـ β لتوزيع (PF) عندما جميع احجام العينة كانت α=2.5 و β=1. وتكون الافضلية لتوزيع McPF للحصول على مقدر لـ β عندما كانت α=0.1 و β=1 وبمعلمات شكل مضافة الى التوزيع هي a=0.5, b=1.5, c=2.5 بمختلف احجام العينة. وتكون الارجحية لتوزيع TLPF عند قيم اولية لمعلمة الشكل α=2.5 وقيمة اولية لـ β=1 اما قيمة معلمة الشكل المضافة الى التوزيع الاساسي لـ θ=2, بمختلف احجام العينة المدروسة.

ث- تقدير α و β لتوزيع دالة القوى PF وتوزيعMcPF وتوزيع TLPF

الجدول (٦): المقدرات دالة الامكان الاعظم عندما تكون معلمة α و β مجهولين للتوزيعات الثلاثة

Initial values			Estimation		β=1	β=3	β=5	β=10
n=25	α=0.1		α_{PF}	Mean	0.10863	0.10863	0.10883	0.10845
				MSE	6.10E-04	5.95E-04	6.08E-04	6.06E-04
			β_{PF}	Mean	0.71708	2.14956	3.58214	7.14515
				MSE	0.12569	1.12306	3.12431	12.60841
n=100			α_{PF}	Mean	0.10206	0.10198	0.10222	0.10209
				MSE	1.10E-04	1.09E-04	1.13E-04	1.12E-04
			β_{PF}	Mean	0.90922	2.73025	4.53695	9.09369
				MSE	0.01500	0.13282	0.38914	1.50658
n=25	α=2.5		α_{PF}	Mean	2.71472	2.72363	2.71642	2.71843
				MSE	0.37091	0.38870	0.37696	0.39187
			β_{PF}	Mean	0.98435	2.95241	4.92059	9.84137
				MSE	0.00048	0.00446	0.01245	0.04981
n=100			α_{PF}	Mean	2.55119	2.55575	2.55225	2.55771
				MSE	0.06988	0.07118	0.06977	0.07103
			β_{PF}	Mean	0.99605	2.98800	4.98014	9.96020
				MSE	0.00003	0.00029	0.00079	0.00317
n=25	α=0.1	a=0.5 b=1.5 c=0.5	α_{McPF}	Mean	0.08506	0.07623	0.10371	0.08434
				MSE	0.02682	0.02263	0.04450	0.02367
			β_{McPF}	Mean	0.71708	2.14956	3.58214	7.14515
				MSE	0.12569	1.12306	3.12431	12.60841
n=100			α_{McPF}	Mean	0.10357	0.09467	0.09141	0.09343
				MSE	0.03022	0.02056	0.02120	0.02104
			β_{McPF}	Mean	0.90922	2.73025	4.53695	9.09369
				MSE	0.01500	0.13282	0.38914	1.50658
n=25		a=2.5 b=2.5 c=1.5	α_{McPF}	Mean	0.09659	0.11129	0.11324	0.10223
				MSE	0.00219	0.00087	0.00165	0.00059
			β_{McPF}	Mean	0.71708	2.14956	3.58214	7.14515
				MSE	0.12569	1.12306	3.12431	12.60841
n=100			α_{McPF}	Mean	0.10118	0.10623	0.10274	0.10471
				MSE	0.00008	0.00027	0.00005	0.00044
			β_{McPF}	Mean	0.90922	2.73025	4.53695	9.09369
				MSE	0.01500	0.13282	0.38914	1.50658
n=25	α =2.5	a=0.5 b=1.5 c=0.5	α_{McPF}	Mean	2.66696	2.45144	2.42028	2.46878
				MSE	0.49767	0.84504	0.70210	0.57389
			β_{McPF}	Mean	0.86197	2.55628	4.27878	8.63525
				MSE	0.02797	0.30607	0.72530	2.62216
n=100			α_{McPF}	Mean	2.62040	2.60884	2.55874	2.56388
				MSE	0.07331	0.07857	0.09285	0.08331
			β_{McPF}	Mean	0.93242	2.79883	4.69195	9.26608
				MSE	0.00819	0.07751	0.16950	0.79637
n=25		a=2.5 b=2.5 c=1.5	α_{McPF}	Mean	2.73492	2.76393	2.76945	2.74843
				MSE	0.25825	0.30035	0.49310	0.30759
			β_{McPF}	Mean	0.95429	2.87414	4.77129	9.60532
				MSE	0.00240	0.01809	0.06195	0.17179
n=100			α_{McPF}	Mean	2.63545	2.62480	2.65074	2.62731
				MSE	0.06632	0.07399	0.09458	0.08654
			β_{McPF}	Mean	0.97199	2.91105	4.84899	9.70481
				MSE	0.00088	0.00867	0.02564	0.09322
n=25	α=0.1	θ=0.5	α_{TLPF}	Mean	0.09338	0.09773	0.09872	0.09554
				MSE	3.38E-04	3.25E-04	3.68E-04	3.10E-04
			β_{TLPF}	Mean	0.90694	2.70998	4.46074	9.08121
				MSE	0.02407	0.23571	0.78167	2.34511
n=100			α_{TLPF}	Mean	0.09643	0.09616	0.09933	0.09814
				MSE	1.56E-04	1.24E-04	1.09E-04	9.71E-05
			β_{TLPF}	Mean	0.91034	2.73990	4.64509	9.13510

			MSE	0.01799	0.15370	0.33128	1.65739
n=25	α=2.5	α_{TLPF}	Mean	2.70580	2.65710	2.56152	2.55961
			MSE	0.24615	0.27843	0.50524	0.43322
		β_{TLPF}	Mean	0.96059	2.85715	4.83091	9.64110
			MSE	0.00455	0.05121	0.07797	0.33678
n=100		α_{TLPF}	Mean	2.55213	2.51050	2.55995	2.54065
			MSE	0.05734	0.03766	0.08366	0.06126
		β_{TLPF}	Mean	0.98221	2.94183	4.89625	9.79516
			MSE	0.00097	0.00912	0.03773	0.11750
n=25	α=0.1	α_{TLPF}	Mean	0.09139	0.09323	0.09809	0.09639
			MSE	0.00044	0.00031	0.00032	0.00029
		β_{TLPF}	Mean	0.90877	2.81907	4.44032	9.29205
			MSE	0.03583	0.18051	1.01679	2.44100
n=100		α_{TLPF}	Mean	0.10048	0.09870	0.09898	0.10031
			MSE	0.00010	0.00011	0.00010	0.00008
		β_{TLPF}	Mean	0.90698	2.64874	4.51072	8.99608
			MSE	0.02520	0.30733	0.64591	2.83958
n=25	α=2.5	α_{TLPF}	Mean	2.69387	2.69913	2.73799	2.62439
			MSE	0.27437	0.28994	0.30316	0.16956
		β_{TLPF}	Mean	0.97861	2.93969	4.86935	9.80246
			MSE	0.00113	0.01101	0.04140	0.09913
n=100		α_{TLPF}	Mean	2.58427	2.55816	2.55720	2.54780
			MSE	0.09997	0.04459	0.04937	0.04253
		β_{TLPF}	Mean	0.98911	2.97297	4.95286	9.91552
			MSE	0.00048	0.00217	0.00529	0.02181

θ=2

في حالة α مجهولة وكذلك β مجهولة، تم الحصول على افضل المقدرات لـ α وβ بحالات مختلفة لتوزيع (PF) عند قيمة اولية لـ α=0.1, 2.5 وβ=1,3,5 وتزداد كفاءة التقدير بزيادة حجم العينة. وتزداد كفاءة التقدير عند توزيع McPF عند قيم اولية لمعلمة الشكل والقياس لدالة التوزيع الاساسية α=0.1 وβ=1,5,10 اما القيم الاولية لمعلمات الشكل المضافة للتوزيع الاساسي فكانت a=2.5, b=2.5, c=0.1 , اما افضل المقدرات لـ β لتوزيع McPF عند قيم اولية لمعلمة الشكل والقياس للتوزيع الاساسي α=2.5 وβ=1 والقيم الاولية لمعلمات الشكل المضافة هي a=0.5, b=1.5, c=2.5، وتكون ايضاً افضلية في عملية التقدير عن استخدام التوزيع المعمم TLPF عند قيم اولية α=0.1 وβ=5 وبقيمة اولية لمعلمة الشكل المضافة الى التوزيع الاساسي θ=2 , اما افضل حالات التقدير لمعلمة القياس β لتوزيع TLPF كانت القيم الاولية لها α=2.5 وβ=1 وبقيمة اولية للمعلمة المضافة θ=2, بمختلف احجام العينة.

٨- الجانب التطبيقي (Applied Aspect)

في هذا الجانب تم تقدم تطبيق يوضح مرونة وامكانية توزيع دالة القوى PF من خلال تقدير معلمة الشكل α ومعلمة القياس β وكذلك توزيع ماكدونالد لدالة القوى (McPF) وتوزيع توب ليون لدالة القوى (TLPF) المعممين، حيث تم استخدام البيانات التي تمثل عمر التشغيل قطع الغيار حتى العطل (failure Times), حيث تم قياس الزمن الذي تحتاجه القطع لتعطلها وعدد البيانات n=40 عينة والمأخوذة من المصدر(Muhammad et. al. ,2018)، ويتم حساب تقديرات معلمات التوزيعات وإحصاءات معيار المعلومات باستخدام لغة R. فضلاً عن استخدام معيار اكايكي(*AIC*), ومعيار(*BIC*) فضلاً عن معيار (*Log-Lik*), للمقارنة بين التوزيعات مع اختبار البيانات المدروسة بالاعتماد على المختبر الاحصائي Kolmogorov-smirnov(*K-S*) لبيان حسن المطابقة مع التوزيعات. والجدول (٧) ملخصاً للإحصائيات الوصفية لكل مجموعة من البيانات. وتبين ان البيانات ملتوي الالتواءً سالباً. علاوة عن ذلك وجود حالة زيادة في تشتت البيانات عن وسطها الحسابي وهذا ما يظهر في قيمة التباين.

الجدول (٧): الاحصائيات الوصفية لمجموعات البيانات

n	Min	Median	Mean	Max	Var	SK	Kur
40	1.6	6.5	6.2525	9	3.8241	-0.6626	2.6410

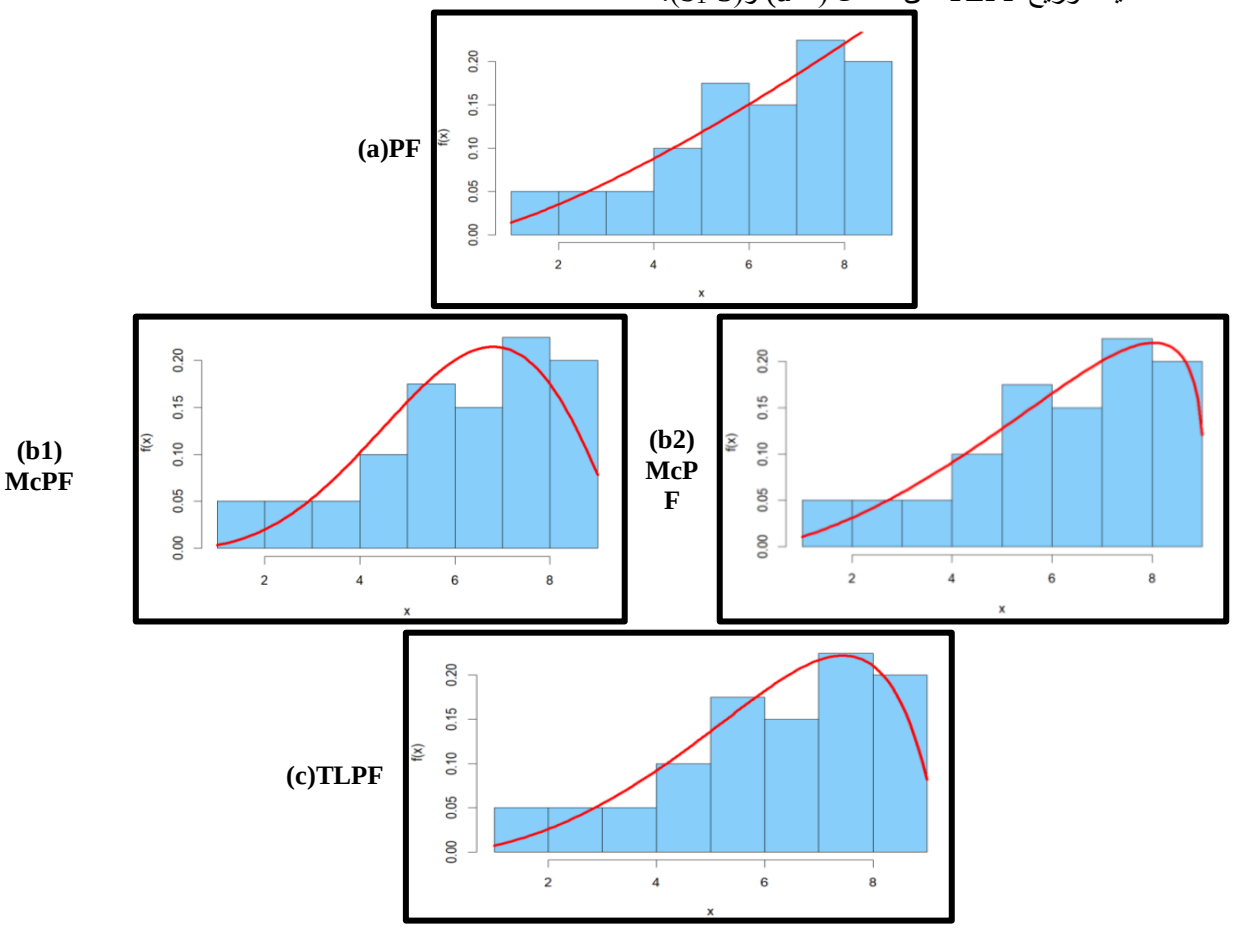
تقديرات معلمات و*AIC*, *BIC* , Log-Lik , *K-S* لتوزيع PF والتوزيعين المعممين.

الجدول (٨): تقدير المعلمتين α وβ مجهولة بطريقة *MLE* مع معايير المقارنة *Log-Lik, BIC, AIC* بين التوزيعات

Dist.	Par.	Log-Lik	AIC	BIC	K-S	p-Value
PF	α=1.1618 β=9	84.6763	173.35	176.73	0.297	0.001726
McPF	α=1.6986, β=9.0357, a=0.5, b=1.25, c=3	**77.1004**	**158.2**	**161.58**	0.046	0.999996
TLPF	α= 5.6623, β= 9.26703, θ=0.5	78.0768	160.15	163.53	0.0852	0.933518
PF	α=1.1618, β=9	84.6763	173.35	176.73	0.297	0.001726
McPF	α=4.7792, β=9.7965, a=1.5, b=2.5, c=0.2	79.8559	163.72	167.09	0.1118	0.70175
TLPF	α= 5.6623, β= 9.26703, θ=0.5	**78.0768**	**160.15**	**163.53**	0.0852	0.933518

نلاحظ من الجدول (٨) ان البيانات المدروسة التي تم استحصالها تلائم او تطابق توزيع McPF وتوزيع TLPF وفق المختبر الاحصائي (Kolmogorov-smirnov) حيث كانت قيمة P-Value للتوزيعين المعممين اكبر من مستوى المعنوية ٠,٠٥ وتم ملائمة البيانات كلا المجموعتين لتوزيع PF الاساسي عند المقارنة.

حيث تم تقدير قيم اولية للبيانات المدروسة لمعلمة الشكل α=1.16 ومعلمة القياس β=3 فضلاً عن اعطاء قيم اولية ثابته لمعلمات الشكل المضافة للتوزيعين المعممين (AL-Ani et al.,2020), حيث اظهر تفوق لتوزيع McPF بعملية التقدير لـ α وβ المجهولتين على توزيع TLPF عند قيم اولية (a=0.5,b=1.25,c=3) وبقيم اولية لـ θ=0.5 وفق معايير المقارنة (*Log-Lik, AIC, BIC*) على التوالي بقيم احصائية اقل من توزيع PF الاساسي وتوزيع TLPF المعمم، والشكل (b1-3) يوضح منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع McPF وملائمته لتوزيع البيانات عن باقي المنحنيات عند مقارنتها مع الشكل (٣-a) و(٣-c). وتكون الافضلية الى توزيع TLPF بعملية التقدير عند وبقيم اولية لـ θ=0.5 وقيم اولية a=1.5,) b=2.5 c=0.2) لتوزيع McPF في التقدير وفق معايير المقارنة (*Log-Lik, AIC, BIC*) من خلال حصول التوزيع TLPF على قيم اقل من التوزيع الاساسي وتوزيع McPF المعمم, والشكل(٣-c) الذي يبين الافضلية لتمثيل البيانات وفق منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع TLPF عن الشكل (٣-a) و(b1-3).



الشكل (٣): منحنيات دالة كثافة الاحتمال الملائمة للتوزيعات المدروسة لمجموعة بيانات

٩- الاستنتاجات (Conclusions):-

نستنتج من الدراسة ان دالة McPF تعتمد على معلمات الشكل متنوعة تغيرها يتسبب بتغير شكل التوزيع من الالتواء موجب الى الالتواء سالب مع ذيل اطول مقارنة بدالة TLPF التي تمتلك معلمة شكل واحدة فقط وتغيرها يكون مستقر وخاصة عند اختلاف في القيم الأولية لمعلمات الشكل للتوزيع، وقد أظهرت النتائج أن زيادة حجم العينة n تعزز دقة التقديرات الإحصائية وتخفض مستوى الخطأ (MSE)، مما يجعل النتائج أكثر مصداقية وملاءمة للواقع البيانات المدروسة ، فضلاً عن ذلك أظهرت الدراسة من خلال المقارنة أنه لا يمكن تفضيل أحد التوزيعين المعممين (McPF) و(TLPF) على الآخر، فان اختيار التوزيع الأنسب يتوقف بشكل رئيسي على القيم الأولية المعينة التي تناسب البيانات، ولاسيما فيما يتعلق بمعلمات الشكل المضافة إلى التوزيع الأساسي (PF).

References

1. Abbas, S., Taqi, S., A., Mustafa, F., Murtaza, M., Shahbaz, M., Q., (2017), " Topp-Leone Inverse Weibull Distribution: Theory and Application" , European Journal of Pure And Applied Mathematics, 10(5), 1005-1022.
2. Ahmed, H., A., (2023),", Configure the Top Lion Riley distribution uploaded with the application" College of Basic Education Researches Journal, 19(1), 875-887.
3. AL-Ani B., G., AL-Rassam R., S., Rashed S., N.(2020)." Bayesian estimation for two parameter exponential distribution using linear transformation of reliability function" Periodicals of Engineering and Natural Sciences, 8(1), 2303-4521.
4. Al-Babtain, A., Merovci, F. & Elbatal ,I.(2015), "The McDonald exponentiated gamma distribution and its statistical properties",SpringerPlus,4(1),2.
5. Alexander, C., Cordeiro, G. M., Ortega, E. M., & Sarabia, J. M. (2012), "Generalized beta-generated distributions", Computational Statistics & Data Analysis, 56(6), 1880-1897.
6. Al-Shomrani, A., Arifc ,O. , Shawky, A .,Hanif, S.,& Shahbaz ,M., Q., (2016)" Topp–Leone Family of Distributions: Some Properties and Application", Pakistan Journal of Statistics and Operation Research, 12(3), 443-451.
7. Cordeiro, G. & Brito, R.,(2012) ," The beta power distribution",Brazilian Journal of Probability and Statistics,26(1),88-112.
8. Hassan, A., S., Khaleel, M., A., & Nassr, S., G., (2021), "Transmuted Topp-Leone Power Function Distribution: Theory and Application", Journal of Statistics Applications & Probability, 10(1), 215-227.
9. Meniconi, M., & Barry, D. M. (1996)."The power function distribution: A useful and simple distribution to assess electrical component reliability", Microelectronics Reliability, 36(9), 1207-1212.
10. Mohamed, E., A., & Jabaar, F., H.,(2023), "Constructing a probability distribution of an extended power function with practical application", Iraqi Journal of Administrative Sciences, 19(75), 249-265.
11. Muhammad A. ul-Haq, Rana M. U., Nurbanu B.& Gamze O.,(2018) ,"McDonald Power Function Distribution with Theory and Applications", International Journal of statistics and Economics, 19(2),0973-7022