AL KUT JOURNAL OF ECONOMIC AND ADMINISTRATIVE SCIENCES
Publisher: College of Economics and Management - Wasit University

مقارنة بين مقدر B & K والتقدير البيزي لمعلمة القياس لتوزيع برينباوم-سوندرز مع تطبيق محاكاة

Comparison of the B&K and the Bayesian Estimators for the Scale Parameter of the Birnbaum-Saunders Distribution with Simulation

محمد نوري عبد الجبار الطه

مديرية تربية الديوانية

المستخلص

يعد توزيع برينبأوم-سوندرز من أهم التوزيعات التي تعني بدراسة وقت الإعياء Fatigue Time ، وهو الوقت الذي تظهر فيه علامات توقف أي نظام قبل توقفه بشكل نهائي. ويعد هذا التوزيع من أهم التوزيعات التي تستخدم في المجال الصناعي مثل: صناعات التعدين وكذلك صناعة الخرسانة. وتعد عملية تقدير معالم هذا التوزيع مهمه لتقدير أوقات الفشل ودوال الخطورة. هناك الكثير من طرائق التقدير الكلاسيكية كطريقة الإمكان الأعظم وطريقة العزوم. يهدف البحث الآتي المقارنة بين تقديرات B & K والتقدير البيزي BE بدالة خطورة قوى-القوى لتقدير لمعلمة القياس في توزيع برينبأوم-سوندرز والمقارنة بين هذه التقديرات باستعمال متوسط مربعات الخطاء لاختيار الطريقة الأفضل باستعمال بيانات تجربة محاكاة.

Abstract

The Birnbaum-Saunders distribution is one of the most important distributions that deals with fatigue time، which is the time that signs of any system stopping appear during it before it stops permanently. This distribution is one of the most important distributions used in the industrial field، such as mining industries as well as the concrete industry. The process of estimating the parameters of this distribution is important for estimating failure times and risk functions. There are many classical estimation methods، such as the maximum likelihood method and the moments method. The research aims to compare the estimates of B & K and the Bayesian estimate BE with power-power Loss function for estimating the scale parameter in the

Birnbaum-Saunders distribution and compare these estimates by using the Mean Square Error MSE to choose the best method using the data of a simulated experiment.

1- المقدمة

إن من أهم التوزيعات الإحصائية وأكدها شيوعا هو التوزيع الطبيعي الذي يعدُّ ركيزة مهمه ومن خلاله تم تطوير الكثير من التوزيعات الجديدة باستعمال بعض التحويلات عليه ومن خلالها تم الحصول على توزيع بيرنبأوم –سوندرز ويرمز له بالرمز BS ذو المعلمتين عام (1969) [1]. تم الحصول على هذا التوزيع من خلال اجراء تحويل رتيب لمتغير يتوزع توزيعا طبيعيا. وان معالم هذا التوزيع هما(α ،β) أي، الشكل والقياس على التوالي. وسمي أيضاً بتوزيع عمر ثنائي المعالم لنموذج عمر الاجهاد لمعدن خاضع للاجهاد الدوري. ومن خلال هذا التوزيع تم تقديم الكثير من التفسيرات المختلفة والطرق العامة والاستنتاجات وتمديدات للحالات ثنائيه المتغير ومتعده المتغير، وقد أعدت أكد من مائتي ورقه ودراسة بحثيه واحدة عن هذا التوزيع ويشار أيضا الآتي هذا التوزيع باسم توزيع التعب والحياة[2]

ظهر هذا التوزيع في الكثير من السياقات المختلفة، مع اشتقاقات متفأوتة تم الحصول عليها بواسطه كنموذج سكون مفيدا في الاختبار. وان اشتقاق بيرنبأوم - سوندرز هو الذي جلب تركيز واضحا لغرض نمذجه حياة التعب للمعادن [3]

سوف نقوم بتعريف هذا التوزيع ونقدم بعض التفسيرات المادية ونناقش خصائص هذا التوزيع وكما يلي :

وتكتب بالصيغة الآتية :(p.d.f)

$$f_T\left(t،\alpha،\beta\right) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\alpha\,\beta}\left[\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{t}{\beta}+\frac{\beta}{t}-2\right)\right] ،\ t>0،\ \alpha،\beta>0 \quad (1)$$

حيث إن هذه الدالة $B_s(\alpha،\beta)$ لمعلمتين هما: α معلمة القياس، و β معلمة الشكل عندما تكون $B_s(\alpha،\beta)$ تسأوي صفر يكون $t\to 0$ ويكون $t\to\infty$ لقيم مختلفه احاديه النسق [1] .

داله التوزيع التراكمية تكون بالشكل الآتي:

$$F_T\left(t،\alpha،\beta\right) = \Phi\left[\frac{1}{\alpha}\left\{\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right] ، 0<t<\infty ، \alpha>0 ،\beta>0 \quad (2)$$

Φ معكوس دالة التوزيع الطبيعي القياسي لنفس المعالم

يهدف البحث الآتي استخدام الأسلوب البيزي في تقدير معالم توزيع برينبأوم-سأوندرز باستعمال دوال خسارة مختلفة، والمقرنة فيما بينها للحصول على المقدر الأمثل الذي يجعل من مجموع متوسط مربعات الخطاء MSE اقل ما يمكن. كذلك

تنبع أهمية البحث من أنَّ التطبيق مهم، فهو يتعلق بشكل مباشر بصناعة الخرسانة وقياس مذي مقأومتها للضغط المسلط عليها، من خلال دراسة توزيع وقت الأعياء، أي الزمن الذي تستغرقه الخرسانة من ظهور أول تصدع الآتي انهيار الخرسانة بشكل نهائي.[4]

2- الخلفية التاريخية

منذ عام 1969 بعد ما قام برينبأوم – سأوندرز باشتقاق دالة توزيع بيرنبأوم – سأوندرز ثنائي المعالم، ظهرت الدراسات الخاصة لهذا التوزيع لدراسة خصائصه الرياضية.

في عام 1979 قام الباحث Langlands وأخرون [5] بدراسة دالة البقاء، لعدة توزيعات منها: برينبأوم – سأوندرز مع تطبيق مرض السرطان، وقاموا باستعمال طريقة الإمكان الأعظم لتقدير المعالم للتوزيع ولحساب دالة البقاء وتوصلوا الآتي أن طريقة الإمكان الأعظم هي الأفضل.

وفي عام 1982 قام الباحث Bhattacharyya [6] بقياس العلاقات بين نسبة الفشل لبعض مركبات توزيع بيرنبأوم – سأوندرز حيث قام بدراسة الدالة التوزيعية لتوزيع برينبأوم – سأوندرز وقام باشتقاق الخصائص التقاربية لها باستعمال نموذجين ودراسة تطبيقية للضغط المسلط على الياف الكاربون وتوصلوا الآتي أن طريقة الإمكان الأعظم، هي الأفضل لدراسة وقت الفشل لتوزيع برينبأوم – سأوندرز.

وفي عام 1998 قام الباحث Owen [7] بدراسة نموذج برينبأوم – سأوندرز وعلاقته مع التوزيع الطبيعي القياسي؛ إذ أثبت بأن توزيع برينبأوم – سأوندرز، هو تحويل غير سالب لمتغير بتوزيع طبيعي قياسي مع اشتقاق لجميع خصائص التوزيع . حيث تمكن من اشتقاق الكثير من الدوال المرتبطة بهذا التوزيع من خلال الخصائص الرياضية للتحويل الذي قدمهُ. وكذلك تمكن من اشتقاق اختبار حُسن مطابقة لهذا التوزيع عن طريق توزيع Z .

وفي عام 2005 قام الباحث Ismail [8] بدراسة الاختبارات المستخدمة لمعنوية توزيع بيرنبأوم – سأوندرز ككل . وكذلك قام بدراسة معوليه هذا التوزيع في ضل بيانات مراقبة من النوع الثاني باستعمال مقدرات الإمكان الأعظم الموزونة. وكذلك المقدرات البيزية باستعمال ثلاث دوال مختلفة. وأيضا استعمل دراسة محاكاة مونت كارلو حيث دعمت دراستهُ باستعمال المقدرات البيزية.

وفي عام 2021 قام الباحث Balakrishnan [4] جديد بتكوين نموذج انحدار تقسيمي معتمداً على توزيع برينبأوم – سأوندرز للوحدة (unit-Birnbaum-Saunders) حيث تم اشتقاق جميع الخصائص لأنموذج الانحدار التقسيمي الجديد . حيث استعمل الباحث محاكاة مونت كارلو باستعمال برنامج R حيث قام الباحث بتقدير معالم نموذج الانحدار التقسيمي باستعمال طريقة الإمكان الأعظم وطريقة العزوم المحددة. وبذلك تم استخدام توزيع برينبأوم – سأوندرز كنموذج انحدار تقسيمي لأول مرة.

وفي عام 2023 قدم Vilca واخرون [9] بحثاً قاموا فيه باشتقاق دالة توزيع برينبأوم – سأوندرز المتعدد المتغيرات بالاعتماد على توزيعات ملتوية أخرى . حيث قاموا بتطوير صيغة معممة للتوزيع واستعملوا طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معالم التوزيع المتعدد المتغيرات، وكذلك استعملوا أسلوب بيز الهرمي لتقدير المعالم نفسها وتوصلوا الآتي ان الطرائق البيزية هي الأفضل.

3- الطرائق البيزية للتقدير

وهي الطرائق التي تقوم على فكرة وجود توزيع مسبق لمعلم التوزيع، حيث تعتمد في حسابها على إيجاد التوزيع الأحق بعد افتراض توزيع سابق لمعالم التوزيع، وهنا قام بتقدير معالم توزيع بيرنبأوم وسوندرز بالطريقة البيزية، واعتمد على حاله التوزيع المسبق (Jeffreys prior) التي تكون بالصيغة الآتية[10] .

$$\boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{\alpha}\text{،}\boldsymbol{\beta}\right) \propto \left\{\mathbf{det}\ \boldsymbol{I}(\boldsymbol{\alpha}\text{،}\boldsymbol{\beta})\right\}^{1/2} \qquad (3)$$

حيث ان $I\,(\text{،}\alpha\beta)$ يمثل مصفوفه معلومات وتكون بالشكل الآتي

$$\boldsymbol{I}_{(\alpha\text{،}\beta)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L\, f_{(t\text{،}\alpha\text{،}\beta)}}{\partial^2 \alpha} & \dfrac{\partial^2 L\, f_{(t\text{،}\alpha\text{،}\beta)}}{\partial \beta\, \partial \alpha} \\ \dfrac{\partial^2 L\, f_{(t\text{،}\alpha\text{،}\beta)}}{\partial \alpha\, \partial \beta} & \dfrac{\partial^2 L\, f_{(t\text{،}\alpha\text{،}\beta)}}{\partial^2 \beta} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

وتكون بالنسبة الآتي توزيع بيرنبأوم وسوندرز بالشكل الآتي [11]

$$\boldsymbol{I}_{(\alpha\text{،}\beta)} = -\begin{bmatrix} \dfrac{2n}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{n}{\alpha^2\,\beta^2}\left(1+\alpha(2\pi)^{-1/2}\, h(\alpha)\right) \end{bmatrix} \qquad (5)$$

وعليه فان داله التوزيع المسبق (Jeffreys prior) تكون بالشكل الآتي :

$$\pi\left(\alpha\text{،}\beta\right) \propto \frac{1}{\alpha\,\beta}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{4}\right)^{1/2}\text{،} \qquad \alpha > 0\ \text{،}\beta > 0 \qquad \underline{(6)}$$

وعليه فان التوزيع الاحق يكون بالشكل الآتي[12] :

$$\boldsymbol{f}_{(\alpha\text{،}\beta/t_1\ldots t_n)} = \frac{\pi\,(\alpha\text{،}\beta)\ \cdot\ f_{(\alpha\text{،}\beta\text{،}t_1\cdots t_n)}}{\iint_0^\infty \pi(\alpha\text{،}\beta)\, f_{(\alpha\text{،}\beta\text{،}t_1\,\ldots\,t_n)}\, d\alpha\, d\beta}$$

وبعد التعويض المباشر

$$f_{(\alpha،\beta/t_1 \dots t_n)} = \frac{\frac{1}{\alpha\,\beta}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{4}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\alpha\beta}\right)^{n}\cdot\ \prod_{t=1}^{n}\left(\left(\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right)exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t}{\beta}+\frac{\beta}{t}-2\right)\right]}{\iint_0^\infty \pi(\alpha،\beta)\ \cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\alpha\beta}\right)^{n}\prod_{t=1}^{n}\left(\left(\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right)exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t}{\beta}+\frac{\beta}{t}-2\right)\right]\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta}$$

بتبسيط داله التوزيع الاحق لتكون بالشكل الآتي[10]

$$f_{(\alpha،\beta/t_1 \dots t_n)} \propto \frac{\prod_{i=1}^{n}(\beta+t_i)\ exp\{-A(\beta)/\alpha^2\}}{\alpha^{n+1}\ \ \beta^{(n/2)+1}\ H(\alpha^2)} \qquad (7)$$

حيث ان $H(\alpha^2)$ تكون بالصيغة الآتيه:

$$H(\alpha^2)=\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{4}\right)^{-1/2} \qquad (8)$$

وكذلك من الممكن التعبير عن $\mathbf{A(\beta)}$

$$\mathbf{A(\beta)} = \frac{\mathbf{ns}}{\mathbf{2\beta}}+\frac{\mathbf{n\beta}}{\mathbf{2r}}-\mathbf{n} \qquad (9)$$

باستعمال مقاربات لابلاس يكون التوزيع اللاحق لمعلمة القياس كالآتي [13]

$$\mathbf{f_{(\alpha/t_1 \dots t_n)} \propto \alpha^{-(n+1)}(4+\alpha^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{n}{\alpha^2}\left(\sqrt{s/r}-1\right)\right\}} \qquad (10)$$

وبعد إيجاد التوزيع الاحق α يمكن إيجاد تقديرها بطريقه بيز باستعمال دوال الخسارة؛ إذ استعمل دالة خسارة قوى-القوى Power-power loss function التي تكون بالشكل الآتي[14] [15]

$$\boldsymbol{PPLS = \sqrt{\frac{E(\alpha/x)}{E\left(\frac{1}{\alpha}/x\right)}}} \qquad (11)$$

بالنسبة للبسط في معادلة (11)

$$\boldsymbol{E(\alpha/x) = \int_0^\infty \alpha^{1-n}\ e^{-\frac{(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}}-1)n}{\alpha^2}}\ d\alpha} \qquad (12)$$

باستعمال برنامج Mathematica نحصل على حل التكامل في معادلة وكالآتي

$$\boldsymbol{= \frac{(\sqrt{s}-\sqrt{r})\, n^{1-\frac{n}{2}}\ r^{\frac{n-2}{4}}\Gamma\left(\frac{n-2}{2},\ \frac{(\sqrt{s}-\sqrt{r})n}{\sqrt{r}\alpha^2}\right)}{2\,(\sqrt{r}-\sqrt{s})^{\frac{n}{2}}\,(-1)^{\frac{n}{2}}} = E_1} \qquad (13)$$

حيث ان α هي قيمة أولية للمعلمة ونرمز للمقدار الموجود في معادلة بالرمز $\boldsymbol{E_1}$ للسهولة

اما بالنسبة للمقام في معادلة:

$$\boldsymbol{E\left(\frac{1}{\alpha}/x\right) = \int_0^\infty \alpha^{-n-1}\ e^{-\frac{(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}}-1)n}{\alpha^2}}\ d\alpha} \qquad (14)$$

باستعمال برنامج Mathematica نحصل على حل التكامل في معادلة وكالآتي:

$$= \frac{\mathbf{r}^{\frac{\mathbf{n}}{4}}\,\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{\mathbf{n}}{2}, -\frac{\left(1-\frac{\sqrt{\mathbf{s}}}{\sqrt{\mathbf{r}}}\right)\mathbf{n}}{\alpha^2}\right)}{2\left(\sqrt{\mathbf{r}}-\sqrt{\mathbf{s}}\right)^{\frac{\mathbf{n}}{2}}(-1)^{\frac{\mathbf{n}}{2}}\,\mathbf{n}^{\frac{\mathbf{n}}{2}}} = \boldsymbol{E_2} \quad (15)$$

ونرمز للمقدار الموجود في معادلة بالرمز $\boldsymbol{E_2}$ للسهولة اذ ان مقدر بيز لمعلمة القياس في توزيع برينبأوم-سوندرز يكون بالصيغة الآتية

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{BE} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \quad (16)$$

4- طريقة B&Z

أُقترحت هذه الطريقة للتقدير من Balakrishnan and Zho [16]عام 2021، تعدُّ من الطرائق البسيطة، وكذلك تتمتع بخاصية الحصانة ضد القيم الشاذة والمتطرفة، حيث قام الباحثان بإجراء تحويل يعتمد في الأساس على نسبة بين متغيرين، يتوزعان حسب توزيع برينبأوم سوندرز وكالآتي:[17]

$$\boldsymbol{z_{ij}} = \frac{\boldsymbol{t_i}}{\boldsymbol{t_j}} \quad (17)$$

وعليه يكون التوقع لهذا المتغير النسبي بالشكل الآتي:

$$\boldsymbol{E}\left(\frac{\boldsymbol{t_i}}{\boldsymbol{t_j}}\right) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{t_i})\boldsymbol{E}\left(\frac{1}{\boldsymbol{t_j}}\right) = \left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{2}\right)^2 \quad (18)$$

وبالتعويض عن قيمة التوقع بقيمة الوسط الحسابي للمتغير z وحل المعادلة أعلاه نصل الآتي صيغة مقدر BZ لمعلمة القياس وبالصيغة الآتية:[16]

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{BZ} = \left(\mathbf{2}\left(\sqrt{\bar{\boldsymbol{z}}} - \mathbf{1}\right)\right)^{1/2} \quad (19)$$

5- المحاكاة

قمنا بتوليد متغيرات تتبع توزيع برينبأوم-سوندرز بمعلمات مقترحة لمعلمة القياس α ، وتثبيت معلمة الشكل بأحجام عينات مختلفة باستعمال برنامج $MATLAB$ ، وتم تكرار التجربة 3000 مرة واحتساب متوسط مربعات الخطاء $MSE = \left[\hat{F}_i - F_i\right]^2/n$

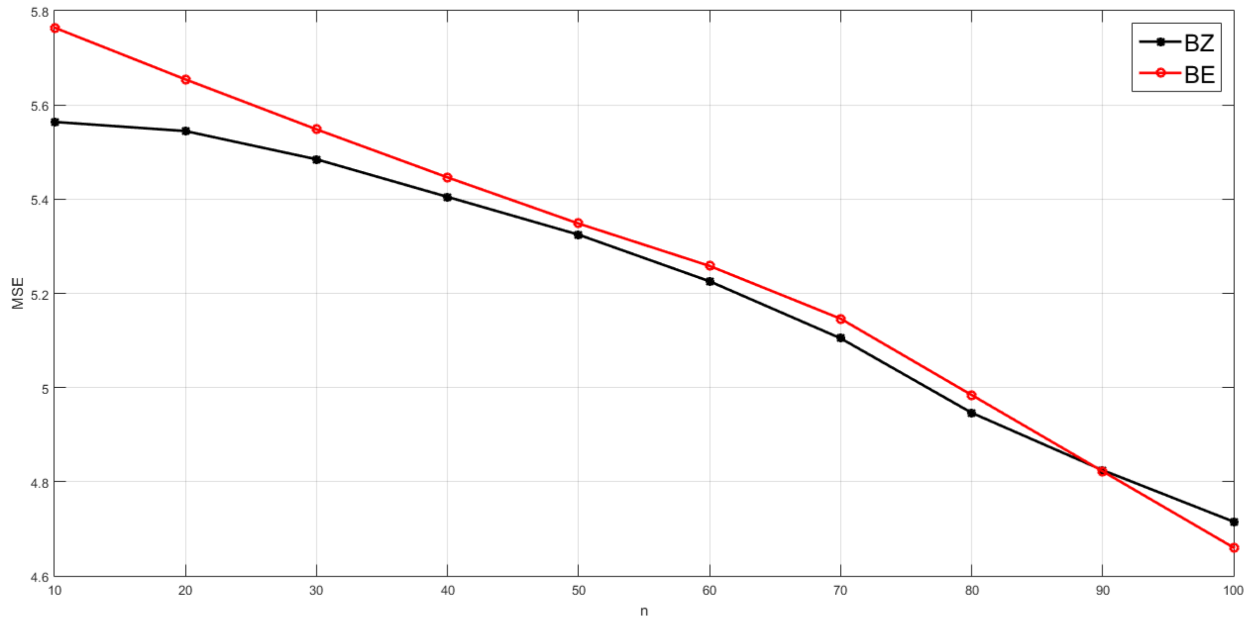
إذ يمثل مربع الفرق بين الدالة التوزيعية للمعالم المقدرة، والدالة التوزيعية للقيم المقترحة مقسوم على حجم العينة حيث كانت النتائج كالآتي:

جدول رقم (1)

قيم المعالم المقدرة وقيمة **MSE** لطريقتي التقدير عندما

$$\boldsymbol{\alpha = 1} \text{ ، } \boldsymbol{\beta = 3}$$

	BZ		BE	
n	$\hat{\alpha}$	**MSE**	$\hat{\alpha}$	**MSE**
10	**1.5642**	**5.5640**	**1.8960**	**5.7642**
20	**1.5224**	**5.5446**	**1.7862**	**5.6542**
30	**1.5074**	**5.4846**	**1.6860**	**5.5482**
40	**1.4822**	**5.4048**	**1.5842**	**5.4462**
50	**1.4402**	**5.3246**	**1.4840**	**5.3482**
60	**1.4030**	**5.2256**	**1.3922**	**5.2582**
70	**1.3428**	**5.1046**	**1.3244**	**5.1462**
80	**1.2842**	**4.9464**	**1.2360**	**4.9842**
90	**1.2002**	**4.8246**	**1.2001**	**4.8222**
100	**1.1196**	**4.7152**	**1.0762**	**4.6602**



شكل رقم (1)

قيم MSE لطريقتي التقدير

$\boldsymbol{\alpha = 1}$ ، $\boldsymbol{\beta = 3}$

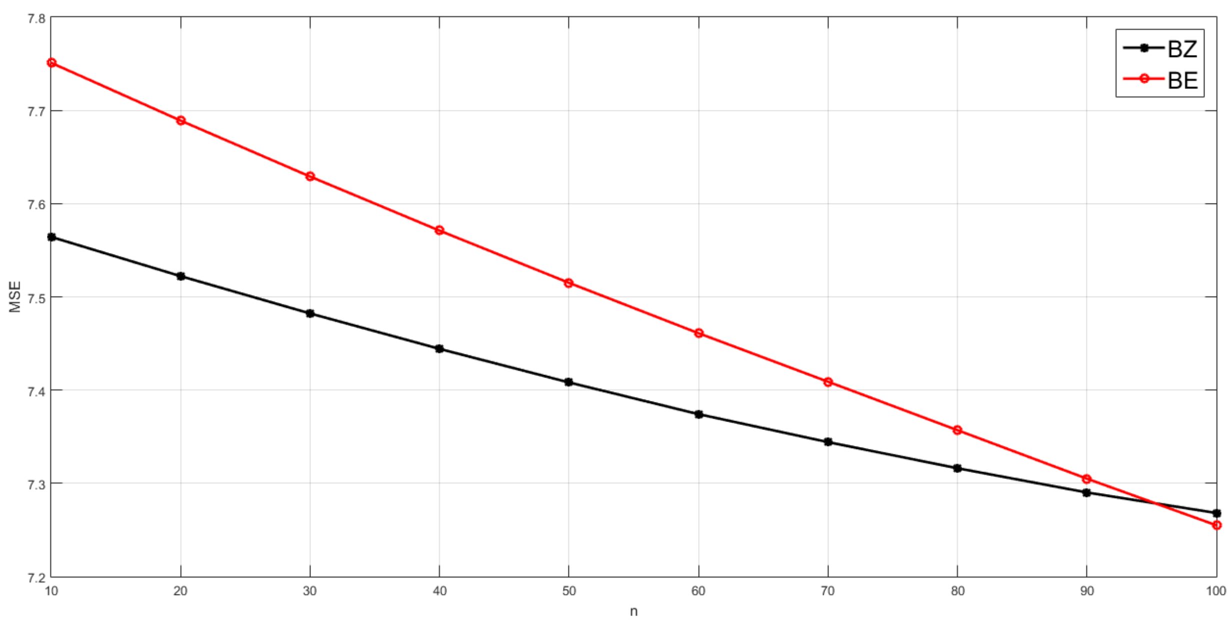
جدول رقم (2)

قيم المعالم المقدرة وقيمة **MSE** لطريقتي التقدير عندما

$\boldsymbol{\alpha = 1.25}$ ، $\boldsymbol{\beta = 3}$

	BE		**BE**	
n	**α^**	**MSE**	$\hat{\alpha}$	**MSE**
10	**1.6742**	**7.5643**	**1.7563**	**7.751**
20	**1.6322**	**7.5222**	**1.7021**	**7.689**

30	**1.5902**	**7.4822**	**1.6702**	**7.629**
40	**1.5522**	**7.4442**	**1.6002**	**7.571**
50	**1.5162**	**7.4082**	**1.5522**	**7.515**
60	**1.4822**	**7.3742**	**1.5062**	**7.461**
70	**1.4502**	**7.3442**	**1.4622**	**7.409**
80	**1.4202**	**7.3162**	**1.4202**	**7.357**
90	**1.3922**	**7.2902**	**1.3802**	**7.305**
100	**1.3662**	**7.2682**	**1.3422**	**7.255**



شكل رقم (2)

قيم MSE لطريقتي التقدير

$\alpha = 1.25$ ، $\beta = 3$

6- الاستنتاجات

من خلال معاينة الأشكال والجداول في الفقرة السابقة، نستنتج ام مقدر *B&Z* يعمل بصورة ممتازة لأغلب حجوم العينات ابتداء من 10 و صولاً الآتي 100 حيث يظهر جلياً تفوق مقدر *B&Z* على طريقة التقدير البيزي عند احجام عينات 10-100 ، بينما يتفوق المقدر البيزي عندما يكون حجم العينة كبير ، حيث يتضح من الأشكال و الجداول السابقة ام المقدر البيزي يظهر أفضليه عندما يكون حجم العينة كبيرو من هنا، يوصي الباحث باعتماد طريقة *B&Z* لتقدير معلمة القياس لتوزيع برينباوم-سوندرز عندما يكون حجم العينة صغير متوسط، و اعتماد التقدير البيزي لنفس المعلمة عندما يكون حجم العينة كبير.

References

[1] Z. W. Birnbaum and S. C. Saunders، "A new family of life distributions،" *Journal of applied probability*، vol. 6، p. 319–327، 1969.

[2] Z. W. Birnbaum and S. C. Saunders، "Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue،" *Journal of applied probability*، vol. 6، p. 328–347، 1969.

[3] A. J. Lemonte، F. Cribari-Neto and K. L. P. Vasconcellos، "Improved statistical inference for the two-parameter Birnbaum–Saunders distribution،" *Computational Statistics & Data Analysis*، vol. 51، p. 4656–4681، 2007.

[4] N. Balakrishnan، V. Leiva، A. Sanhueza and F. Vilca، "Estimation in the Birnbaum-Saunders distribution based on scale-mixture of normals and the EM-algorithm،" *SORT-Statistics and Operations Research Transactions*، vol. 33، p. 171–192، 2009.

[5] A. O. Langlands، S. J. Pocock، G. R. Kerr and S. M. Gore، "Long-term survival of patients with breast cancer: a study of the curability of the disease.،" *Br med J*، vol. 2، p. 1247–1251، 1979.

[6] G. K. Bhattacharyya and A. Fries، "Fatigue Failure Models Birnbaum-Saunders vs. Inverse Gaussian،" *IEEE Transactions on Reliability*، vol. 31، p. 439–441، 1982.

[7] W. J. Owen and W. J. Padgett، "Birnbaum-Saunders-type models for system strength assuming multiplicative damage،" in *Frontiers in Reliability*، World Scientific، 1998، p. 283–294.

[8] S. Ismail، "Reliability estimation for accelerated Birnbaum-Saunders model with censoring،" *Far East Journal of Theoretical Statistics*، vol. 17، p. 43، 2005.

[9] F. Vilca، L. Santana، V. Leiva and N. Balakrishnan، "Estimation of extreme percentiles in Birnbaum–Saunders distributions،" *Computational statistics & data analysis*، vol. 55، p. 1665–1678، 2011.

[10] J. A. Achcar، "Inferences for the Birnbaum—Saunders fatigue life model using Bayesian methods،" *Computational statistics & data analysis*، vol. 15، p. 367–380، 1993.

[11] D. J. Dupuis and J. E. Mills، "Robust estimation of the Birnbaum-Saunders distribution،" *IEEE Transactions on Reliability*، vol. 47، p. 88–95، 1998.

[12] V. Leiva، "The Birnbaum-Saunders Distribution،" 2015.

[13] M. Ferreira، M. I. Gomes and V. Leiva، "On an extreme value version of the Birnbaum–Saunders distribution،" *REVSTAT-Statistical Journal*، vol. 10، p. 181–210، 2012.

[14] S. K. Upadhyay and B. Mukherjee، "Bayes analysis and comparison of accelerated Weibull and accelerated Birnbaum–Saunders models،" *Communications in Statistics-Theory and Methods*، vol. 39، p. 195–213، 2009.

[15] H. K. T. Ng، D. Kundu and N. Balakrishnan، "Modified moment estimation for the two-parameter Birnbaum–Saunders distribution،" *Computational Statistics & Data Analysis*، vol. 43، p. 283–298، 2003.

[16] N. Balakrishnan and D. Kundu، "Birnbaum-Saunders distribution: A review of models، analysis، and applications،" *Applied Stochastic Models in Business and Industry*، vol. 35، p. 4–49، 2019.

[17] K. Mohammadi، O. Alavi and J. G. McGowan، "Use of Birnbaum-Saunders distribution for estimating wind speed and wind power probability distributions: A review،" *Energy Conversion and Management*، vol. 143، p. 109–122، 2017.

[18] A. Sanhueza، V. Leiva and N. Balakrishnan، "The generalized Birnbaum–Saunders distribution and its theory، methodology، and application،" *Communications in Statistics—Theory and Methods*، vol. 37، p. 645–670، 2008.

[19] J. R. Rieck and J. R. Nedelman، "A log-linear model for the birnbaum—saunders distribution،" *Technometrics*، vol. 33، p. 51–60، 1991.