Warith Scientific Journal

مقارنة طريقتي الإمكان الأعظم والمربعات الصغرى لتقدير دالة البقاء لتوزيع بيور الثلاثي المعدّل الجديد (دراسة محاكاة)

Comparison of the maximum potential and least squares methods for estimating the survival function for the new modified Pure triangular distribution (simulation study)

ا.م.د مشتاق كريم عبدالرحيم
Asst. Prof. Dr. Mushtaq Karim Abd Al-Rahem
mushtag.k@uokerbala.edu.iq
كلية الادارة والاقتصاد / جامعة كربلاء / قسم الاحصاء
College of Administration and Economics / University of Karbala

آمال محمد جواد عبد الكاظم
AMAL MOHAMEDJAWAD ABDLKADHIM
Mohammed@s.uokerbala.edu.iq
كلية الادارة والاقتصاد / جامعة كربلاء / قسم الاحصاء
College of Administration and Economics / University of Karbala

ا.م.د بهاء عبد الرزاق قاسم
Asst. Prof. Dr. Bahaa Abdul Razak Qasim
bahaa.Kasem@uobasrah.edu.iq
كلية الادارة والاقتصاد / جامعة البصرة / قسم الاحصاء
College of Administration and Economics / University of Basrah

المستخلص

تم في هذا البحث مقارنة بين طريقتي الإمكان الأعظم والمربعات الصغرى الاعتيادية لتقدير دالة البقاء لتوزيع بيور الثلاثي المعدّل الجديد (NMBIII) ، حيث تم استعمال أسلوب المحاكاة للمقارنة بين الطريقتين باستعمال برنامج (Mathematica13) ، إذ تم افتراض ثلاث حالات للمعلمات وعدد من أحجام العينات ، حيث تم استعمال المقياس الاحصائي (IMSE) لمعرفة أي الطريقتين افضل في التقدير وقد أظهرت النتائج افضلية طريقة الإمكان الأعظم على المربعات الصغرى الاعتيادية .

الكلمات المفتاحية : دالة البقاء ، توزيع بيور الثلاثي المعدّل الجديد ، محاكاة ، (MLE,OLS).

Abstract

In this paper , the comparison was made between the methods greatest possibility and least squares to estimate the survival function of the new modified burr iii distribution (NMBIII) , where the simulation method was used to compare the to methods using the (Mathematica 13) program, as a number of cases were assumed for the parameters and a number of the two methods sample sizes, where the statistical scale (IMSE) was used to find out which were better in estimation, and the results showed the preference of the method of greatest possibility on ordinary least squares .

Keywords : Survival function , new modified burr iii distribution , Simulation , (MLE,OLS)

1- المقدمة

في القرن العشرين بدأت النمذجة الإحصائية لبيانات مدى الحياة و التي تعرف الآن باسم تحليل الموثوقية او تحليل البقاء ، وتهتم بشكل أساسي بنماذج بيانات وقت الحياة التي يتم الحصول عليها من المكونات والأنظمة في العلوم الهندسية .

تعنى نماذج تحليل البقاء بشكل أساسي ببيانات مدى الحياة التي يتم الحصول عليها في العلوم البيولوجية او علوم الحياة . يمكن تعريف وقت البقاء او وقت الفشل او وقت الحدث على انه وقت الانتظار حتى وقوع حدث معين ، قد يكون هذا الحدث هو الموت في علوم الحياة و الفشل في العلوم الهندسية و الطلاق في علم الاجتماع وتغير محل الإقامة في الديموغرافيا وما الى ذلك .

ونظرا لكون فترة الحياة ذات طبيعة مستمرة ، لذلك من غير الطبيعي التعامل بيانات مدار الحياة كأرقام دقيقة و انما كأرقام غامضة الى حد ما .

2- هدف البحث

هدف البحث هو المقارنة بين طريقتي الإمكان الأعظم (MLE) والمربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) لتقدير دالة البقاء لتوزيع بيور الثلاثي المعدّل الجديد (NMBIII) باستعمال المحاكاة وتحديد أي الطريقتين افضل في تقدير معلمات و دالة البقاء من خلال المعيار الاحصائي (IMSE) .

3- الجانب النظري

1- دالة البقاء

تعرّف دالة البقاء بأنها احتمال بقاء الكائن الحي على قيد الحياة بعد فترة زمنية محددة (t) و تعرّف كذلك باسم دالة النجاة ، و تعرّف رياضيا على انها مكملة لدالة التوزيع التراكمية F(x) ويرمز لها بالرمز S(t) و المعادلة (1-2) أدناه تبيّن ذلك .
إذ أن :

$F(t) = P_r(T < t)$

$F(t) = \int_0^t f(u)\, du$

$S(t) = P_r(T \geq t)$

$S(t) = 1 - F(t)$ … (1)

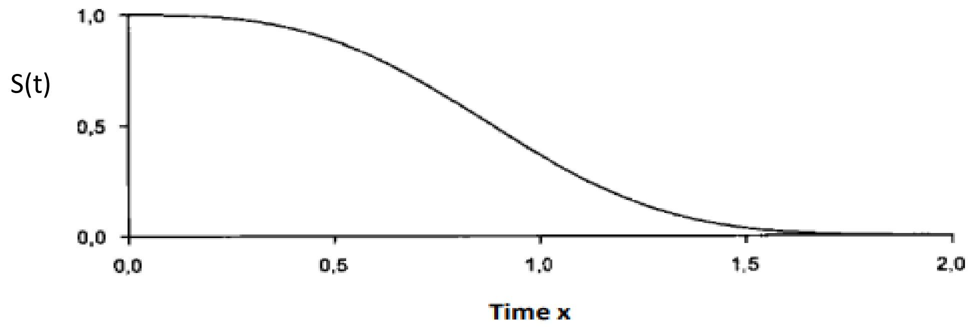
إذ أن :

S(t) : دالة البقاء عند الزمن (t)

وتتميز دالة البقاء بمجموعة من الخصائص نلخصها بالآتي :-

- دالة احتمالية وقيمتها محصورة بين الصفر والواحد $0 \leq S(t) \leq 1$
- دالة مستمرة و متناقصة بشكل رتيب أي أن قيمة الدالة عند الزمن (t=0) تساوي واحد اي $S(0) = 1$ وتبدأ بعد ذلك بالتناقص إلى أن تكون (t=∞) قيمتها تساوي صفر أي $S(\infty) = 0$ وكالآتي : $S(u) \leq S(t) \quad u > t$

هذا يعني ان احتمال بقاء الكائن الحي يقترب من الصفر كلما ازداد عمره .
والشكل (1) يبيّن الخصائص أعلاه لمنحني دالة البقاء .



الشكل (1) : العلاقة بين الزمن و دالة البقاء

Time (t)

أذ نلاحظ من الشكل أن هناك تناسب عكسي بين قيمة الدالة S(t) والزمن (t)

2- توزيع بيور الثلاثي المعدّل الجديد

يعتبر من التوزيعات الاحتمالية المستمرة (Continuous Distribution) تم اقتراحه عام 2021 من قبل الباحث (Jamal and etal) ، وهو امتداد لتوزيعات Burr المطورة عام 1942 والمؤلفة من اثني عشر نوعا من دوال التوزيع بناءا على انشاء معادلة بيرسون التفاضلية ، وله اشكال متناقصة ، متزايدة ، احادي الوسائط وحوض الاستحمام ومعدّل خطر تقريبا ثابت ، تظهر فائدة هذا النموذج من خلال التطبيقات على عينات كاملة وخاضعة للرقابة و أضاف هذا التعديل الجديد مرونة التوزيع الكلاسيكي مع القدرة على نمذجة جميع اشكال دالة معدّل الخطر ، ليكن(X_i) متغير عشوائي يتبع توزيع بيور الجديد المعدّل فإن دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) تكون بالشكل الآتي :

$$f(x;c,k,\boldsymbol{\lambda}) = \frac{k(\lambda+\frac{c}{x})}{x^{c}e^{\lambda x}}\left(1 + x^{-c}e^{-\lambda x}\right)^{-k-1}, \quad x > 0 \text{, with } c,k,\lambda > 0 \quad \dots (2)$$

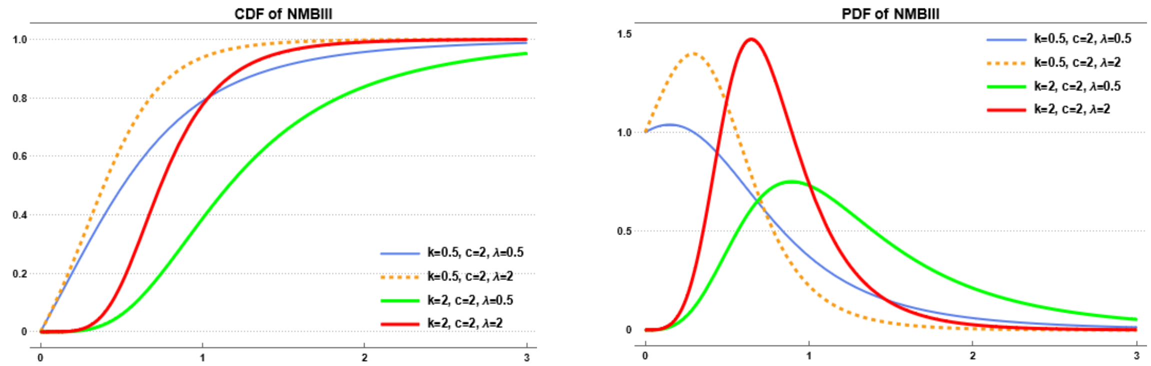
وان دالة التوزيع التراكمية (C.D.F) للتوزيع تكون بالشكل الآتي :

$$F(x;c,k,\boldsymbol{\lambda}) = \left(1 + x^{-c}e^{-\lambda x}\right)^{-k} \quad \dots (3)$$

إذ ان :

(c,k,**λ**) : معلمات التوزيع .

والشكل (2) يوضح رسم دالة الكثافة الاحتمالية و الدالة التراكمية لتوزيع NMBIII و لقيم معلمات مختلفة .



شكل (2) دالة الكثافة الاحتمالية والدالة التراكمية لتوزيع NMBIII لقيم معلمات مختلفة

الشكل : اعداد الباحث

يتضح من الشكل أعلاه ان التوزيع يأخذ شكل ثنائي القمة بالنسبة لدالة الكثافة الاحتمالية وهذا يفسر إمكانية تعامله مع بيانات ثنائية النسق .

2-1 دالة البقاء لتوزيع بيور المعدّل الجديد

تعرّف دالة البقاء لتوزيع بيور المعدّل الجديد بالمعادلة (2-8) من خلال تعويض المعادلة (2-6) في المعادلة (2-7) وكالآتي :

$$S(t) = 1 - F(t;c,k,\boldsymbol{\lambda}) \qquad \dots (6)$$

$$S(t) = 1 - \left[1 + t_i^{-c} e^{-\lambda t_i}\right]^{-k} \qquad \dots (7)$$

3- طرائق التقدير

يعرّف التقدير على أنه استعمال طرق رياضية معيّنة لتقدير المعلمة المجهولة لأنموذج المجتمع بناءا على المعلومات المتوفرة في العينة ، ولصعوبة دراسة بعض الظواهر بصورة شاملة يحتم علينا معرفة سلوك الظاهرة قيد الدراسة وفق توزيع احتمالي معيّن يحتوي على معلمات غير معلومة ويمكن تقديرها بإحدى طرق التقدير المعروفة ، وفي هذه الدراسة سيتم استعمال طريقتين لتقدير معلمات توزيع (NMBIII) متمثلة بـ (طريقة الإمكان الأعظم ، طريقة المربعات الصغرى) .

3-1 طريقة الإمكان الأعظم

تعتبر طريقة الإمكان الأعظم من الطرق الإحصائية التي تستعمل في مجال التقدير وأول من اقترحها الاحصائي المشهور Fisher في عام 1920 ، وتعد طريقة الإمكان الأعظم افضل طريقة وذلك لتميزها بالثبات والدقة والاتساق والكفاية في التقدير مقارنة بالطرائق الاخرى وهي طريقة عامة بالنسبة للعينات الكبيرة أي عندما $n \rightarrow \infty$ ، والمبدأ الذي تقوم عليه هذه الطريقة هو إيجاد مقدرات للمعلمات عن طريق جعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى ويرمز لها بالرمز (L) .

لنفرض ان ($x_1, x_2, \dots\dots, x_n$) عينة عشوائية بحجم (n) تتبع توزيع (NMBIII) فان دالة الإمكان الأعظم تمثل الدالة المشتركة للعينة العشوائية المستقلة ($x_1, x_2, \dots\dots, x_n$) وكالآتي :

$$L(x_i, x_i, \dots, x_n; c,k,\boldsymbol{\lambda}) = g(x_i; c,k,\boldsymbol{\lambda}) \cdot g(x_i; c,k,\boldsymbol{\lambda}) \dots g(x_n, c,k,\boldsymbol{\lambda})$$

$$\dot{L}(x_i; c,k,\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{i=1}^{n} g(xi; c,k,\lambda) \qquad \dots \mathbf{(8)}$$

وبتعويض دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (NMBIII) في الصيغة (2) نحصل على :

$$L(x_i; c,k,\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{K^n \left(\lambda + \frac{c}{xi}\right)}{x_i^c e^{\lambda x_i}} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + x_i^{-c} e^{-\lambda x_i}\right)^{-k-1}$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي (Ln) للطرفين :

$$LnL = n\ln k + \sum_{i=0}^{\infty} \ln\left(\lambda + \frac{c}{x_i}\right) - \sum_{i=0}^{\infty} \ln xi - \lambda \sum_{i=0}^{\infty} xi + (-k-1) \sum_{i=0}^{\infty} \ln\left(1 + x_i^{-c} e^{-\lambda x_i}\right) \quad \dots (9)$$

ومن أجل الحصول على مقدرات طريقة الإمكان الأعظم للمعلمات (c,k,λ) نعمل على اشتقاق المعادلة (7) بالنسبة لكل معلمة ومساواتها بالصفر

$$\frac{\partial Ln\, L}{\partial\, c} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\lambda + \frac{c}{xi}\right)} * \frac{1}{x} - \sum_{i=0}^{\infty} \ln xi - (k+1) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{x_i^{-c} e^{-\lambda x_i}} * -x_i^{-c} \ln xi\, e^{-\lambda x_i}$$

$$\frac{\partial Ln\, L}{\partial\, c} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\lambda + \frac{c}{xi}\right)} * \frac{1}{x} \sum_{i=0}^{\infty} \ln xi + (k+1) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i^{-c} \ln xi\, e^{-\lambda x_i}}{x_i^{-c} e^{-\lambda x_i}}$$

$$\frac{\partial Ln\ L}{\partial\ c} = -\sum_{i=0}^{\infty} \ln xi + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{xi}\left(\lambda + \frac{C}{Xi}\right)^{-1} + (k+1)\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i^{-c} \ln xi\, e^{-\lambda x_i}}{x_i^{-c} e^{-\lambda x_i}} = 0 \quad \dots (10)$$

$$\frac{\partial\ LnL}{\partial\ k} = \frac{n}{k} - \sum_{i=0}^{\infty} \ln\left(1 + x_i^{-c} e^{-\lambda x_i}\right) = 0 \quad \dots (11)$$

$$\frac{\partial\ LnL}{\partial\ \lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\lambda + \frac{c}{xi}\right)} - \sum_{i=0}^{\infty} xi - (k+1)\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{x_i^{-c} e^{-\lambda x_i}}\, e^{-\lambda x_i} * -x * x_i^{-c}$$

$$\frac{\partial\ LnL}{\partial\ \lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\lambda + \frac{c}{xi}\right)} - \sum_{i=0}^{\infty} xi + (k+1)\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i^{1-c} e^{-\lambda x_i}}{x_i^{-c} e^{-\lambda x_i}}$$

$$\frac{\partial\ LnL}{\partial\ \lambda} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\lambda + \frac{c}{xi}\right)^{-1} - \sum_{i=0}^{\infty} xi + (k+1)\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i^{1-c} e^{-\lambda x_i}}{x_i^{-c} e^{-\lambda x_i}} = 0 \quad (12)$$

نلاحظ من المعادلات الثلاثة (10) (11) (12) إنها معادلات غير خطية ولا تحل بالطرق التحليلية الاعتيادية ، لذا سنلجأ إلى استعمال إحدى الطرق التكرارية العددية ومنها طريقة (نيوتن – رافسون) لحل هذه المعادلات والحصول على مقدّر المعلمات ($\hat{c}_{MLE}, \hat{k}_{MLE}, \hat{\lambda}_{MLE}$) بطريقة الإمكان الأعظم ، ومن ثم تعويض هذه المقدّرات في المعادلة (7) للحصول على مقدّر دالة البقاء لتوزيع (NMBIII) كما في الصيغة الآتية :

$$\hat{S}_{MLE}(x_i; c,k,\lambda) = 1 - \left(1 + x_i^{-c_{MLE}} e^{-\lambda_{MLE} x_i}\right)^{-k_{MLE}} \quad \dots (13)$$

2-3 طريقة المربعات الصغرى

تعتبر طريقة المربعات الصغرى هي الطريقة الأكثر استعمالا ، والمبدأ الذي تقوم عليه هو تصغير او تدنية مجموع مربعات البواقي بين دالة التوزيع التراكمية النظرية ودالة التوزيع التراكمية التجريبية الى ادنى قيمة لها وان مقدرات هذه الطريقة تمتاز بخاصيتي الاتساق وعدم التحيز ، ويمكن صياغتها على النحو الآتي :

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\left(F(x_i) - \frac{i}{n+1}\right)^2 \quad \dots (14)$$

إذ أن :

$F(x_i)$: تمثل دالة التوزيع التراكمي لتوزيع (NMBIII)

$\frac{i}{n+1}$: مقدّر لامعلمي لدالة التوزيع التراكمي

i : عدد صحيح موجب يمثل مرتبة المشاهدة

وبالتعويض عن قيمة $F(x_i)$ لتوزيع (NMBIII) في الصيغة رقم (14) نحصل على الآتي :

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(1 + x_i^{-c} e^{-\lambda x}\right)^{-k} - \frac{i}{n+1}\right]^2 \quad \dots (15)$$

وبعد الاشتقاق المعادلة (15) بالنسبة لكل معلمة من المعلمات ($c,k,\boldsymbol{\lambda}$) ومساواتها بالصفر نحصل على المعادلات الآتية :

$$Q = 2\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1 + x_i^{-c} e^{-\lambda x_i}\right)^{-k} - \frac{i}{n+1}\right]\left[\frac{\partial F(x_i)}{\partial\ c}\right]\right\} = 0 \quad \dots (16)$$

$$Q = 2\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1 + x_i^{-c} e^{-\lambda x_i}\right)^{-k} - \frac{i}{n+1}\right]\left[\frac{\partial F(x_i)}{\partial\ k}\right]\right\} = 0 \quad \dots (17)$$

$$Q = 2\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1 + x_i^{-c} e^{-\lambda x_i}\right)^{-k} - \frac{i}{n+1}\right]\left[\frac{\partial F(x_i)}{\partial\ \lambda}\right]\right\} = 0 \quad \dots (18)$$

إذ ان :

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial\ C} = K\left(1 + x_i^{-c} e^{-\lambda x_i}\right)^{-k-1} * x_i^{-c} \ln x_i \quad \dots (19)$$

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial\ k} = -\left(1 + x_i^{-c} e^{-\lambda x_i}\right)^{-k} * \ln\left(1 + x_i^{-c} e^{-\lambda x_i}\right) \quad \dots (20)$$

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial\ \lambda} = k\left(1 + x_i^{-c} e^{-\lambda x_i}\right)^{-k-1} * x_i^{1-c} e^{-\lambda x_i} \quad \dots (21)$$

وبعد تعويض قيم المشتقات من المعادلات (19) (20) (21) في المعادلات الثلاثة (16) (17) (18) سنلاحظ إنها معادلات غير خطية ولا تحل بالطرق التحليلية الاعتيادية ، لذا سنلجأ إلى استعمال إحدى الطرق التكرارية العددية ومنها طريقة (نيوتن – رافسون) لحل هذه المعادلات والحصول على مقدّر المعلمات ($\hat{c}_{LS}$, $\hat{k}_{LS}$, $\hat{\lambda}_{LS}$) بطريقة المربعات الصغرى ، ومن ثم تعويض هذه المقدّرات في المعادلة (7) للحصول على مقدّر دالة البقاء لتوزيع (NMBIII) بطريقة المربعات الصغرى كما في الصيغة الآتية :

$$\hat{S}_{LS}(x_i; c,k,\lambda) = 1 - \left(1 + x_i^{-c_{LS}} e^{-\lambda_{LS} x_i}\right)^{-k_{LS}} \quad \dots (22)$$

4- الجانب التجريبي

4-1 المحاكاة

تعرّف المحاكاة بأنها أسلوب رياضي لحل اغلب المشاكل التي تواجه الباحث مثل عدم توفر البيانات لظاهرة معيّنة او صعوبة تطبيق طرائق التقدير و التحليل وذلك عن طريق بناء انموذج افتراضي قريب للأنموذج الحقيقي من توليد مشاهدات ثم الحصول على النتائج ، فضلا عن ذلك يتميز أسلوب المحاكاة بالمرونة عن

طريق تكرار التجربة لعدة مرات واختبارها ، فضلا عن ذلك توفر الوقت و الجهد و المال . توجد عدة طرق للمحاكاة منها : الطريقة المختلطة Mixed Procedure و الطريقة التناظرية Analog Procedure و طريقة مونت – كارلو Monte Carlo ، و تعد طريقة مونت – كارلو Monte Carlo من افضل طرائق المحاكاة وأكثرها شيوعا ، وذلك يعود الى استعمالها لتوليد البيانات لأغلب التوزيعات الاحتمالية الشائعة التي لها دالة كثافة احتمالية .

4-2 توصيف الجانب التجريبي (المحاكاة)

نفذت المحاكاة باستعمال أربعة حجوم عينات (10 ، 30 ، 70 ، 100) وثلاث نماذج من القيم الافتراضية لمعلمات توزيع الدراسة (NMBIII) و المبينة في الجدول (1) وكررت التجربة 1000 مرة لكل أنموذج من النماذج وذلك لدراسة التغير الذي يحصل في قيم المعلمات مع تغير حجوم العينات والطريقة المستعملة في التقدير ، ويبيّن الجدول (1) نماذج القيم الافتراضية للمعلمات .

الجدول (1) حالات القيم الافتراضية لمعلمات توزيع (NMBIII)

Model	k	c	λ
1	2	1	0.5
2	2	0.5	0.5
3	1	1	1

اعداد الباحث

ان الطريقة المستعملة في توليد القيم العشوائية لتوزيع الدراسة المقترح هي طريقة القبول و الرفض لعدم إمكانية الحصول على المتغير العشوائي (x) من خلال تبسيط دالة التوزيع التراكمية لقيم عشوائية مولدة من توزيع منتظم مستمر أي $u_i \sim U\ (0,1)$. وتم تنفيذ المحاكاة التي كتبت باستعمال برنامج (Mathematica 13) للحصول على النتائج المتمثلة بتقدير قيمة دالة البقاء و متوسط مربعات الخطأ والخطأ التكاملي لها ،

وتم مقارنة نتائج توزيع الدراسة باستعمال المعيارين الاحصائيين متوسط مربعات الخطأ ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (MSE , IMSE) الى جانب استعمال طريقة الرتب في عملية المقارنة والتي تألفت من ثلاث مراحل وهي كالآتي :

- **تحديد افضل طريقة للتقدير :** من اجل تحديد افضل طريقة للتقدير من بين طرائق تقدير المعلمات (MLE , OLS) نعمل على إعطاء الرتبة الأولى للطريقة التي تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي على أساس كل معلمة وكل حجم عينة ولكل حالة لتحديد افضل طريقة لكل حالة (Partial Rank) ، ومن ثم تكرار الطريقة ذاتها على أساس كل الحالات لتحديد افضل طريقة من بين جميع الحالات (Overall Rank)
- **تحديد افضل حجم عينة :** بعد تحديد طريقة التقدير الفضلى في المرحلة الأولى نعمل بعدها على تحديد افضل حجم عينة لهذه الطريقة تكون عن طريق إعطاء الرتبة الأولى لحجم العينة الذي يمتلك اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي على أساس كل معلمة وكل حالة ومن ثم تكرار الطريقة ذاتها على أساس كل الحالات لتحديد افضل حجم عينة من بين جميع الحالات (Overall Rank) .
- **تحديد افضل انموذج للتقدير** : إذ تمثل المرحلة الأخيرة ، اذ نقوم بتحديد افضل أنموذج لطريقة التقدير الأفضل عند حجم العينة الفضلى التي تم تحديدها في المرحلتين الأولى و الاخرى وذلك بإعطاء الرتبة الأولى الى الأنموذج الذي يمتلك متوسط مربعات خطأ تكاملي اقل .

ويتم تكرار الطريقة بحيث يتم ترتيب جميع طرائق التقدير بالترتيب ويتم إعطاء رتب لكل أنموذج من النماذج لتحديد الأفضل من بين جميع أنماذج الدراسة (Overall Rank) .

جدول (2) : تقدير دالة البقاء لتوزيع (NMBIII) ولجميع المقدّرات (MLE,OLS) وجميع حجوم العينات (100,70,30,10) بالنسبة للأنموذج الأول

t	S_real	ML				OLS			
		10	30	70	100	10	30	70	100
0.167	0.976392	0.976033	0.976018	0.974392	0.975132	0.947517	0.961952	0.96663	0.97121
0.526186	0.834867	0.863814	0.848703	0.840753	0.83611	0.821671	0.829537	0.829877	0.83108
0.795495	0.706085	0.738129	0.720975	0.714749	0.705932	0.706292	0.707101	0.706584	0.70243
1.1996	0.529313	0.543623	0.535484	0.536051	0.525644	0.532586	0.533267	0.534405	0.524713
1.37335	0.464425	0.470721	0.466382	0.469386	0.45965	0.46939	0.46847	0.470389	0.459608
1.51491	0.416834	0.417782	0.415776	0.420277	0.411414	0.4235	0.420751	0.423169	0.411974
1.57264	0.398749	0.397867	0.3966	0.401584	0.393128	0.406186	0.402588	0.405167	0.393903
2.19889	0.245781	0.236351	0.237029	0.243539	0.239731	0.262573	0.249025	0.251842	0.242021
2.29148	0.22887	0.219429	0.219818	0.226167	0.222941	0.246956	0.232146	0.234814	0.225372
2.33452	0.221424	0.212044	0.212276	0.218531	0.215562	0.24009	0.224727	0.227315	0.218053

جدول (3) : المعيارين (MSE , IMSE) عند حجوم العينات (100,70,30,10) للأنموذج الأول

	ML				OLS			
t	10	30	70	100	10	30	70	100
0.167	0.000919	0.000302	0.000174	0.000122	0.002851	0.000889	0.000442	0.00022
0.526186	0.007598	0.002742	0.001157	0.00075	0.008514	0.003241	0.001462	0.000871
0.795495	0.013007	0.004485	0.001816	0.001258	0.01236	0.004731	0.002086	0.001327
1.1996	0.016996	0.005544	0.002413	0.001981	0.018022	0.005776	0.002692	0.001986
1.37335	0.017062	0.005603	0.002491	0.002123	0.017676	0.005753	0.002721	0.002093
1.51491	0.016656	0.005525	0.002486	0.002148	0.017081	0.005578	0.002658	0.002097
1.57264	0.016409	0.005466	0.002469	0.002138	0.016812	0.005478	0.002616	0.002082
2.19889	0.012191	0.004197	0.00199	0.001619	0.013332	0.004059	0.001982	0.001639
2.29148	0.011473	0.003964	0.0019	0.001519	0.012798	0.003856	0.001893	0.001565
2.33452	0.011141	0.003856	0.001858	0.001474	0.012553	0.003764	0.001854	0.001531
IMSE	0.012345	0.004168	0.001875	0.001513	0.0132	0.004313	0.002041	0.001541

جدول (4) : تقدير دالة البقاء لتوزيع (NMBIII) ولجميع المقدّرات (MLE,OLS) وجميع حجوم العينات (100,70,30,10) بالنسبة للأنموذج الثاني

R_real	ML				OLS			
	10	30	70	100	10	30	70	100
0.976389	0.978002	0.977428	0.975297	0.975611	0.947555	0.962723	0.967244	0.971439
0.834847	0.86606	0.848616	0.840564	0.836092	0.827053	0.832663	0.83161	0.832419
0.706063	0.733255	0.716755	0.71232	0.704379	0.708066	0.707418	0.706491	0.702213
0.529325	0.532361	0.529427	0.532346	0.523772	0.529781	0.53145	0.533168	0.52385
0.464445	0.459969	0.460913	0.465855	0.458076	0.465995	0.466707	0.469237	0.458951
0.416834	0.408298	0.411081	0.417077	0.410133	0.420308	0.419288	0.422213	0.411546
0.398754	0.389053	0.392285	0.398572	0.391989	0.403225	0.401313	0.404332	0.393593
0.245793	0.235481	0.236993	0.243073	0.239999	0.264026	0.250499	0.252636	0.2429
0.228882	0.21952	0.22031	0.226062	0.223373	0.249087	0.234011	0.235832	0.226381
0.221431	0.212547	0.212994	0.218582	0.21606	0.242521	0.226761	0.228427	0.219113

جدول (5) : المعيارين (MSE , IMSE) عند حجوم العينات (100,70,30,10) للأنموذج الثاني

	ML				OLS			
t	10	30	70	100	10	30	70	100
0.031927	0.000922	0.000309	0.000171	0.00014	0.003038	0.000975	0.00047	0.000269
0.335203	0.008221	0.002979	0.001237	0.00076	0.009118	0.003457	0.001506	0.000904
0.697842	0.013323	0.004977	0.002035	0.00134	0.013921	0.005484	0.002245	0.001382
1.30064	0.016887	0.005864	0.00255	0.002037	0.018775	0.006184	0.002766	0.002059
1.56185	0.016861	0.005768	0.002545	0.002115	0.017994	0.005872	0.002702	0.002114
1.77297	0.016368	0.00558	0.002485	0.002094	0.017071	0.005525	0.002584	0.002079
1.8584	0.016085	0.005483	0.002451	0.002069	0.016679	0.005375	0.002527	0.002051
2.75958	0.01165	0.00405	0.001926	0.001527	0.012755	0.003907	0.001923	0.00159
2.88887	0.010943	0.003818	0.00184	0.001437	0.012266	0.003727	0.001849	0.001521
2.94869	0.01062	0.003712	0.0018	0.001396	0.012046	0.003646	0.001815	0.001489
IMSE	0.012188	0.004254	0.001904	0.001491	0.013366	0.004415	0.002039	0.001546

جدول (6) : تقدير دالة البقاء لتوزيع (NMBIII) ولجميع المقدّرات (MLE,OLS) وجميع حجوم العينات (100,70,30,10) بالنسبة للأنموذج الثالث

t	R_real	ML				OLS			
		10	30	70	100	10	30	70	100
0.023614	0.976393	0.973779	0.973799	0.973133	0.973521	0.946788	0.961179	0.96519	0.969122
0.16734	0.834848	0.859876	0.847498	0.840165	0.835907	0.816817	0.827008	0.827237	0.827914
0.30643	0.706062	0.741248	0.726049	0.717384	0.709706	0.703045	0.708228	0.706701	0.702671
0.52569	0.529305	0.554901	0.545221	0.540745	0.531429	0.53182	0.536514	0.536429	0.527097
0.62023	0.464419	0.482893	0.475588	0.473901	0.464947	0.469403	0.470959	0.472223	0.461658
0.696914	0.416825	0.42987	0.423859	0.4244	0.416029	0.423471	0.422274	0.424631	0.413483
0.728066	0.398744	0.409777	0.404129	0.405518	0.397435	0.406374	0.403689	0.406458	0.395165
1.06154	0.245779	0.244535	0.23893	0.245379	0.240945	0.26351	0.246739	0.251524	0.240874
1.11018	0.228871	0.227135	0.22122	0.227779	0.223842	0.247829	0.229656	0.234361	0.224001
1.13276	0.22142	0.219535	0.213469	0.220038	0.216323	0.240926	0.222156	0.2268	0.216583

جدول (7) : المعيارين (MSE , IMSE) عند حجوم العينات (100,70,30,10) للأنموذج الثالث

	ML				OLS			
t	10	30	70	100	10	30	70	100
0.023614	0.000945	0.00034	0.000174	0.000114	0.00291	0.000876	0.000429	0.000201
0.16734	0.006978	0.002554	0.001165	0.000727	0.008011	0.003297	0.001454	0.00085
0.30643	0.012042	0.004118	0.001788	0.001158	0.010789	0.004702	0.002047	0.001306
0.52569	0.016417	0.004736	0.002137	0.00162	0.017925	0.005439	0.002514	0.001814
0.62023	0.016728	0.004744	0.002162	0.001738	0.018633	0.005435	0.002551	0.001938
0.696914	0.016461	0.004754	0.002157	0.001792	0.018711	0.005368	0.00253	0.001994
0.728066	0.01626	0.00476	0.00215	0.001803	0.01839	0.00533	0.002511	0.002005
1.06154	0.012501	0.004413	0.001901	0.001569	0.013726	0.004503	0.002078	0.001788
1.11018	0.011816	0.004249	0.001839	0.001498	0.013136	0.00432	0.001995	0.001722
1.13276	0.011494	0.004164	0.001809	0.001464	0.012868	0.004232	0.001956	0.00169
IMSE	0.012164	0.003883	0.001728	0.001348	0.01351	0.00435	0.002007	0.001531

جدول (8) : الرتب الجزئية و الكلية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي لتقدير دالة البقاء بحسب حجوم العينات ونماذج القيم الافتراضية لتوزيع (NMBIII)

Model	n	MLE	OLS
M1	10	1	2
	30	1	2
	70	1	2
	100	1	2
	$\sum Rank$	4	8
	Partial Rank	1	2
M2	10	1	2
	30	1	2
	70	1	2
	100	1	2
	$\sum Rank$	4	8
	Partial Rank	1	2
M3	10	1	2
	30	1	2
	70	1	2
	100	1	2
	$\sum Rank$	4	8
	Partial Rank	1	2
ΣΣ Rank		12	24
Overall Rank		1	2
Best Sample Size		MLE	

اعداد الباحث

1- أظهرت النتائج أفضلية طريقة الإمكان الأعظم (MLE) في جميع النماذج على بقية طرائق التقدير الثلاث ، إذ انها امتلكت الرتبة الأولى (Partial Rank) لكل حالة من حالات القيم الافتراضية .

2- بشكل عام نجد أن (MLE) اثبتت أفضليتها في التقدير على أساس جميع الحالات وجميع حجوم العينات والمعلمات ، اذ امتلكت الرتبة الأولى (Overall Rank) ثم لحقتها طريقة المربعات الصغرى (OLS) بالرتبة الثانية .

جدول (10) : رتب متوسط مربعات الخطأ التكاملي لتقديرات طريقة MLE على أساس حجوم عينات مختلفة ولحالات مختلفة لتوزيع (NMBIII)

Model	Estimater	Sample Size (n)			
		10	30	70	100
M1	IMSE	0.012345(4)	0.004168(3)	0.001875(2)	0.001513(1)
	Rank	4	3	2	1
M2	IMSE	0.012188(4)	0.004254(3)	0.001904(2)	0.001491(1)
	Rank	4	3	2	1
M3	IMSE	0.012164(4)	0.003883(3)	0.001728(2)	0.001348(1)
ΣΣ Rank		8	6	4	2
Overall Rank		4	3	2	1
Best Sample Size		n=100			

اعداد الباحث

نلاحظ من الجدول (10) ان افضل حجم عينة لتقديرات طريقة (MLE) تحدد بالحجم (n=100) ، نتيجة امتلاكه الرتبة الأولى (Overall Rank) من بين جميع حجوم العينات الأربعة ، اما بقية حجوم العينات (70,30,10) فقد جاءت (الرابعة ، الثالثة ، الثانية) على الترتيب وهذه النتيجة تنسجم مع خاصية الاتساق للمقدرات التي تنص على ان متوسط مربعات الخطأ التكاملي للمقدرات تتناقص بزيادة حجم العينة .

جدول رقم (11) : رتب متوسط مربعات الخطأ التكاملي لتقديرات طريقة MLE على أساس حالات مختلفة عند n=100 لتوزيع (NMBIII)

Model	IMSE	Rank	Best
M1	0.001513	3	M3
M2	0.001491	2	
M3	0.001348	1	

اعداد الباحث

نلاحظ من الجدول أعلاه (11) أن افضل نموذج هو الثالث لكونه امتلك الرتبة الأولى (Overall Rank) ، حيث احتل الرتبة الأولى لامتلاكه أقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.001348) وبقية الأنماذج (M1,M2) تأخذ بقية المراتب الأخرى (الثانية ، الثالثة) على التوالي .

5- الاستنتاجات

- بيّن الجانب التجريبي ان قيمة دالة البقاء لتوزيع (NMBIII) تتراوح بي الصفر والواحد الصحيح فضلا عن أنها متناقصة مع الزمن ولجميع قيم المقدّرات (MLE,OLS) وجميع حجوم العينات (10،30،70،100) ولجميع النماذج الثلاث المستعملة وهذا ما يتناسب مع النظرية الإحصائية .
- بيّن الجانب التجريبي وبالاعتماد على المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) ، ان افضل طريقة لتقدير دالة البقاء والتي تمتلك اقل رتبة ولجميع قيم المقدّرات (MLE,OLS) وجميع حجوم العينات (10،30،70،100) ولجميع النماذج الثلاثة المستعملة هي طريقة الإمكان الأعظم (MLE) وتلتها بالأفضلية طريقة المربعات الصغرى العامة (OLS) .
- ان افضل حجم عينة لتقديرات طريقة (MLE) تحدد بالحجم (n=100) ، نتيجة امتلاكه الرتبة الأولى (Overall Rank) من بين جميع حجوم العينات الأربعة ، اما بقية حجوم العينات (70,30,10) فقد جاءت (الرابعة ، الثالثة ، الثانية) على الترتيب وهذه النتيجة تنسجم مع خاصية الاتساق للمقدرات التي تنص على ان متوسط مربعات الخطأ التكاملي للمقدرات تتناقص بزيادة حجم العينة .
- افضل أنموذج هو الثالث لكونه امتلك الرتبة الأولى (Overall Rank) ، اذ احتل الرتبة الأولى لامتلاكه أقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE =0.001146) وبقية الأنماذج (M2,M3) تأخذ المرتبة الأخرى (الثانية) على الترتيب .

7- التوصيات

- استعمال طريقة الإمكان الأعظم (MLE) في تقدير دالة البقاء للتوزيعات الموسعة بالنسبة لأحجام العينات الكبيرة .
- تطبيق توزيع بيور الثلاثي المعدل الجديد على بيانات حقيقية .
- استعمال طرق أخرى لتقدير

المصادر

1- Al-Amiri, Bahaa Abdel-Razzaq Qasim. (2021). Using some truncated distributions in an expert system to estimate the optimal period for replacing machinery and equipment, PhD thesis, University of Karbala, College of Administration and Economics, Department of Statistics.

2- Collett, D. (2003). **Modelling Survival Data in Medical Research Boca Raton:Taylor and Francie**,2023 Chapman & Hall / CRC. (Second1584883251.ISBN.

3- Jamal, F., Nasir, M. A. , Abuzaid, A. H. , Tahir, M. H. , and Mashwani, W. K. (2021). **New Modified Burr iii Distribution , Properties and Applications** . hal-01902854v2 .

4- ul Haq, M. A., Elgarhy, M., and Hashmi, Sh. (2019). **The generalized odd Burr III family of distributions: properties ,applications and characterizations**, Journal of Taibah university for science 13(1), 961-971.

5- ZeinEldin , R. A., Chesneau, Ch., Jamal, F. and Elgarhy , M. (2019). Statistical Properties and Different Methods of Estimation for Type I Half Logistic Inverted Kumaraswmy Distribution , Journal(mathematics) , 7(10), 34.