مقارنة لمقدرات بيز لمعلمة القياس للتوزيع Nakagami باستعمال دوال أولية مضاعفة مختلفة

Comparative to the Bayes Estimators for the Scale Parameter of the Nakagami Distribution Under Different Double Prior Functions

ألاستاذ المساعد الدكتور جنان عباس ناصر العبيدي
الكلية التقنية الإدارية – بغداد

الخلاصة

في هذا البحث , استعملنا أسلوب بيز لتقدير معلمة القياس لتوزيع Nakagami. بافتراض إن معلمة القياس تخضع لعد من التوزيعات الأولية المضاعفة, والتي تعني بانه لدينا معلومتين مختلفة حول التوزيع الاولي لمعلمة القياس. إذ تم افتراض عدد من التوزيعات الأولية المضاعفة لمعلمة القياس لتوزيع Nakagami متمثلة بمقلوب التوزيع الاسي – توزيع Levy ومقلوب التوزيع الاسي – توزيع كامبل من النوع الثاني وتوزيع Levy– توزيع كامبل من النوع الثاني ومقلوب التوزيع الاسي – توزيع غير معلوماتية و توزيع Levy– توزيع غير معلوماتية و توزيع كامبل من النوع الثاني – توزيع غير معلوماتية.

فقد اشتقينا التوزيع اللاحق لمعلمة القياس لمعلمة القياس لتوزيع Nakagami وفقا لكل من التوزيعات الأولية المضاعفة المفترضة في البحث.وكذلك اشتقينا مقدرات بيز لمعلمة القياس لتوزيع Nakagami باستعمال دالة الخسارة التربيعية . وقد استعمالنا أسلوب المحاكاة لغرض المقارنة بين تلك المقدرات .إذ تم توليد البيانات ولإحجام مختلفة من العينات (صغيرة ,متوسطة, كبيرة) من توزيع Nakagamiبكتابة برامج باستخدام MATLAB–R2017b.

ونتائج المحاكاة تبين بان أفضل تقدير لمعلمة القياس وفقا لمقياس اصغر قيمة لـ MSE ولكل إحجام العينات,عندما يكون التوزيع الأولي المضاعف توزيع كامبل من النوع الثاني –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين (b_1, c) عندما تكون القيمة المفترضة للمعلمتين $\beta = 0.5$ و $\lambda = 1.5$ و $\beta = 2$ و $\lambda = 2$ و $\beta = 1$ و $\lambda = 5$. كذلك عندما يكون التوزيع الأولي المضاعف مقلوب التوزيع الاسي – توزيع كامبل من النوع الثاني بالمعلمتين (α, b_1) ,عندما تكون القيمة المفترضة لـ $\beta = 3$ و $\lambda = 1.5$. وكذلك عندما يكون التوزيع الأولي المضاعف توزيع Levy –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين (b, c) عندما تكون القيمة المفترضة لـ $\beta = 0.5$ و $\lambda = 2$.وكذلك عندما يكون التوزيع الأولي المضاعف مقلوب التوزيع الاسي– توزيعLevyبالمعلمتين (α, b) عندما تكون القيمة المفترضة لـ $\beta = 5$ و $\lambda = 5$.

مفاتيح الكلمات : خصائص توزيعNakagami , طريقة بيز, التوزيع الأولي مقلوب التوزيع الاسي, التوزيع الأولي Levy , التوزيع الأولي توزيع Gumbel type–II,التوزيع الأولي Non–informative , دالة الخسارة المربعة (SLF).

Abstract

In this study, we used Bayesian method to estimate scale parameter for the Nakagami distribution. By considering several of double prior distributions for the scale parameter of the Nakagami distribution ,it means we have two different information about the prior distributions , such as inverted exponential- levy distribution and inverted exponential -gumbel type-II distribution and levy - gumbel type-II distribution and Inverted exponential- non- informative distribution and levy- Non- informative distribution and gumbel type-II - non- informative distribution.

We derived the posterior distribution for the scale parameter of the Nakagami distribution according to each of double prior distributions. Also, we derived bayes estimators for the scale parameter of the Nakagami distribution based on squared error loss function. we used simulation technique to compare between these estimators. Several cases from Nakagami distribution for data generating, or different sample sizes (small, medium, and large),by programs written using MATLAB-R2017b program.

Simulation results shown that the best estimation for the scale parameter for the Nakagami distribution according to the smallest value of MSE all sample sizes, when the double prior distribution is gumbel type-II- Non- Informative distribution with the parameters (b_1, c) for $\lambda = 1.5$ و $\beta = 0.5$ and $\lambda = 2$ و $\beta = 2$ and $\lambda = 5$ و $\beta = 1$.Also, when the double prior distribution is inverted exponential -gumbel type-II distribution with the parameters (α, b_1) for $\lambda = 1.5$ و $\beta = 3$.Also, when the double prior distribution is levy-non- informative distribution with the parameters (b, c) for $\lambda = 2$ و $\beta = 0.5$.Also, when the double prior distribution is inverted exponential- levy distribution with the parameters (α, b) with $\lambda = 5$ و $\beta = 5$.

Key words: The properties of the Nakagami distribution, Bayes method, inverted exponential distribution, Levy distribution , Gumbel type-II distribution ,Non-informative distribution , Squared Loss Function (SLF).

1. المقدمة

لقد استعمل توزيع Nakagami على نطاق واسع في نظرية المعولية والمعولية الهندسية كأنموذج معدل نسبة مخاطرة ثابتة لكونه يمتلك خاصية فقدان الذاكرة .فقد طبق توزيع Nakagami كأنموذج لأوقات الفشل لمنتجات متنوعة مثل المعدات الكهربائية كالعزل الكهربائي.فضلا عن ذلك فقد استعمل في المجالات الطبية الحيوية, فقد اعتمد كأنموذج لحدوث الأورام وظهور سرطان. ونتناول في هذا البحث أسلوب بيز لتقدير معلمة القياس لتوزيع Anagram . فقد تناول العديد من الباحثين دراسة توزيع Nakagami من خلال طرق التقدير لمعلمتي الشكل والقياس نذكر منهم بإيجاز تجنبا للإطالة:-

فقد تناول الباحثين Abdi و Kaveh [1] عام (2000) طرق مختلفة لتقدير معلمة الشكل لتوزيع Nakagamiمتمثلة بمعكوس التباين القياسي و Tolparev– Polyakov و لورنز باستعمال محاكاة مونتي كارلو.وتوصلا إلى إن طريقة التقدير للمعلمة الشكل لتوزيع Nakagami المستندة على معكوس التباين القياسي قد تفوق على بقية المقدرات المستعملة في البحث.

فقد اقترح الباحثين Cheng و Beaulieu [6] عام (2001)مقدرين للإمكان الأعظم لمعلمة الشكل لتوزيعNakagami. إذ تم مقارنة بين مقدرين للإمكان الأعظم وطريقة العزوم بالاعتماد على المتوسط والتباين لتلك المقدرات . وتوصلا إلى إن مقدرين للإمكان الأعظم لمعلمة الشكل لتوزيعNakagami يمتلك اقل تباين مقارنة بتباين المقدر المستحصلة بطريقة العزوم .فضلا عن ذلك فان اعتماد مقدرين للإمكان الأعظم يكون مفيد في التقليص العملي للبيانات التجريبية .

فقد ناقش الباحث Schwartzوآخرون معه [10] عام (2011)طرق تعديل التحيز التحليلية في حدود عامة , فضلا عن إعطاء تفاصيل تطبيقها لمقدر الإمكان الأعظم لمعلمة الشكل لتوزيعNakagami.

وقد استعمل الباحثون محاكاة مونتي كارلو لتقييم التحيز في تقدير معلمة الشكل لتوزيعNakagami ومقارنة التحيزات المصححة التحليلية مع التحيزات المستندة إلى bootstrap.

واستعمل الباحثينZaka وAkhter [13] عام (2014) أسلوب بيز لاشتقاق تقديرات مقدرات معلمة القياس لتوزيع Nakagami . فقد اشتق الباحثين التوزيع اللاحق لمعلمة القياس باستعمال ثلاثة توزيعات اولية متمثلة بالتوزيع المنتظم ومقلوب التوزيع الاسي وتويع لافي .وكذلك استعمل ثلاث دوال خسارة لاشتقاق تقدير معلمة القياس .وقد استعمل المحاكاة للحصول على نتائج البحث

استعمل الباحثين Ahamed و Rehman [2] عام (2015) طريقتي العزوم –L(MLM) والعزوم (MOM) لتقدير معلمة القياس لتوزيع Nakagami .إذ قاما باشتقاق العزمين الأول والثاني لطريقة العزوم –L لتقدير معلمة القياس باستعمال بيانات مولدة باستعمال المحاكاة لحجوم مختلفة من العينات .وقد تم احتساب معياري الجذر التربيعي لمتوسط مربعات الخطاء والتحيز. وتبين من نتائج تجارب المحاكاة بان طريقة العزوم –L تعطي تقديرات أفضل من طريقة العزوم لحجوم العينات الصغيرة والكبيرة . إذ أعطت طريقة العزوم –L اقل قيمة معياري الجذر التربيعي لمتوسط مربعات الخطاء والتحيز مقارنة بطريقة العزوم .

استعمل الباحثين ,Yaseenو Feroze[12] عام (2015) أسلوب بيز لتقدير معلمة القياس لتوزيع Nakagami . فقد قاما باشتقاق التوزيع اللاحق لمعلمة القياس عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس يخضع لتوزيع معكوس كاما والتوزيع المنتظم . وباستعمال ثلاثة دوال خسارة متضمنة دالة الخسارة الموزونة (WLF)ودالة الخسارة المتوازنة الموزونة (WBLF) ودالة الخسارة الوقائية (PLF). وقد نفذت تجارب المحاكاة لحجوم مختلفة من العينات ولعدة توليفات من القيم لمعلمتي توزيع Nakagami . وتبين من نتائج تجارب المحاكاة بأنه عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس يخضع لتوزيع معكوس كاما وباستعمال ودالة الخسارة المتوازنة الموزونة (WBLF) أعطت اقل قيمة لدالة المخاطرة مقارنة بدوال الخسارة المستعملة في البحث.

فقد قارن الباحثAhamed وآخرون معه [3] عام (2016) بين مقدر الإمكان الأعظم ومقدرات بيز لمعلمة القياس لتوزيعNakagami. فقد افترض الباحثون ثلاثة توزيعات أولية لمعلمة القياس لتوزيع Nakagami متمثلة بالتوزيع الأولي Quasi والتوزيع الأولي Jeffreys و امتداد Jeffreys لاشتقاق التوزيع اللاحق لمعلمة القياس . ومن ثم اشتقاق مقدرات بيز باستعمال ثلاثة دوال للخسارة متمثلة بدالة الخسارة التربيعية و دالة الخسارة للبياتي ودالة الخسارة للانتروبي . وقد استعمل الباحثون المحاكاة للحصول على نتائج البحث.

فقد استعمل الباحثين Huang وLin [7] عام (2016)توزيع كاما لاشتقاق مقدر العزوم ومقدر الإمكان الأعظم لمعلمة الشكل لتوزيعNakagami لعدم امتلاك توزيعNakagami دالة مولدة للعزوم وبسبب التعقيدات في حساب دالة الإمكان .إذ توصل الباحثين إلى إن مقدر العزم لمعلمة الشكل لتوزيعNakagami يمتلك تحيز اقل وانحراف معياري اكبر مقارنة بمقدر الإمكان الأعظم لمعلمة الشكل لتوزيعNakagami الذي يمتلك اقل انحراف معياري .فضلا عن حساب فترة الثقة لنسبة وسيطين من توزيعين مستقلين لتوزيعNakagami. فقد كانت فترة الثقة المستندة على مقدر الامكان الأعظم اقصر مقارنة بفترة الثقة المستندة على مقدر العزم .

وبذلك فان هدفنا في هذا البحث استحصال مقدرات بيز لمعلمة القياس لتوزيعNakagami باستعمال توزيعات أولية معلوماتية وغير معلوماتية مضاعفة.فقد تناول عدد قليل من الباحثين التوزيعات الأولية المضاعفة في حالة التوزيعات المستمرة نذكر منهم. الباحثين Radha و Vekatesan [8] عام (2015) الذين تناولا دراسة

التوزيع الأولي المضاعف في حالة التوزيعات المستمرة بالتحديد توزيع Maxwell فقد اشتقاق الباحثين التوزيع الاحق لمعلمة القياس لتوزيع Maxwell بافتراض معلومتين مختلفة حول معلمة القياس والتي يكون فيها التوزيع الأولي المضاعف يخضع للتوزيع المنتظم العام – توزيع معكوس كاما .وكذلك الباحثين Ronak و Achyut[9] عام (2017) الذين تناولا دراسة ثلاثة توزيع الأولية مضاعف في حالة التوزيعات المستمرة متضمنة : التوزيع الاسي– توزيع كاما وتوزيع كاما – توزيع مربع كاي و توزيع مربع كاي – التوزيع الاسي , وكذلك استعملا توزيع كاما كتوزيع الأولي لتقدير معلمة التوزيع الاسي ودالة المعولية عند وقت محدد (t) باستعمال أسلوب بيز للبيانات مراقبة من النوع الثاني.

وفي بحثنا هذا تم اختيار أربعة توزيعات الأولية لتكوين ستة توزيعات أولية معلوماتية وغير معلوماتية مضاعفة منها , ومن ثم اشتقاق التوزيع اللاحق لمعلمة القياس لتوزيعNakagami باستعمال أسلوب بيز .ومحاولة ايجاد أفضل طريقة تقدير لمعلمة القياس لتوزيعNakagami, التي تصغر قيمة متوسط مربعات الخطأ (MSE)المحسوب لمعلمة القياس.وذلك بالاعتماد على مربع دالة الخسارة لمقدر بيز .إذ اعتمد معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) لغرض المقارنة بين طرائق التقدير المستعملة في البحث.وقد استعملت عدة حالات من توزيعNakagami لتوليد البيانات ولإحجام مختلفة من العينات (صغيرة, متوسطة, كبيرة).وقد تم كتابة برامج البحث باستعمال برنامج MATLAB–R2017b للحصول على نتائج المحاكاة .

2. توزيع Nakagami TheNakagamiDistribution

يقال إن المتغير العشوائي t يتوزع وفق توزيع Nakagami بالمعلمتين (λ , β),إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) وفق الصيغة الآتية [13]:

$$f(t;\lambda,\beta)=2(\frac{\lambda}{\beta})^{\lambda}\ \frac{1}{\Gamma\lambda}\ t^{2\lambda-1}\exp(-\frac{\lambda}{\beta}t_i^2) \qquad \text{for} \quad t>0 \qquad ...(1)$$

إذ إن $\lambda \geq \mathbf{0}$تمثل معلمة الشكل (Shape parameter),وان $\beta \geq 0$ تمثل معلمة القياس(Scale parameter) . و ان الوسط الحسابي يكون وفق الصيغة الآتية:

$$E(t)=\mu_t=\frac{\Gamma(\lambda+(1/2))}{\lambda}(\frac{\beta}{\lambda})^{1/2} \qquad ...(2)$$

والتباين لهذا التوزيع يكون وفق الصيغة الآتية:

$$\sigma^2=\beta\ (1-\frac{1}{\lambda}(\frac{\Gamma(\lambda+(1/2))}{\Gamma(\lambda\ )})^{1/2}\ ) \qquad ...(3)$$

إذ إن $\Gamma(.)$ تمثل دالة كاما. وفي بحثنا هذا سيتم البحث عن أفضل طريقة تقدير لمعلمة القياس (β)تحت افتراض بان قيمة معلمة الشكل قيمة ثابتة ($\lambda = \text{constant}$), إذ سيتم افتراض عدة قيم لها في بحثنا هذا.

3. طريقة تقدير بيز Bayes Estimation Method

في هذا المبحث , نستعمل تقدير بيز لاشتقاق مقدرات بيز لمعلمة القياس لتوزيع Nakagami, تحت افتراض توزيعات أولية مضاعفة مختلفة .لتكن $\underline{t}=(t_1,t_2,\dots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم (n) بدالة كثافة احتمالية معطاة في الصيغة (1), ودالة الإمكان لهذا التوزيع تكون وفق الصيغة الآتية[4]:

$$L(\underline{t}\backslash\lambda,\ \beta)=\prod_{i=1}^{n} f(t;\lambda,\ \beta)=\left(\frac{2\lambda}{\Gamma\lambda}\right)^{n\lambda}\prod_{i=1}^{n} t^{2\lambda-1}\,\beta^{-n\lambda}\exp\left(-\frac{\lambda}{\beta}\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right) \quad \dots(4)$$

في هذا البحث التوزيعات اللاحقة لمعلمة القياس المجهولة (β) باستعمال ستة توزيعات أولية معلوماتية وغير معلوماتية مضاعفة , ومن ثم نحصل تقدير بيز إذ افترضنا

- مقلوب التوزيع الاسي[11]– توزيع Levy .
- مقلوب التوزيع الاسي – توزيع كامبل من النوع الثاني .
- توزيع Levy– توزيع كامبل من النوع الثاني.
- مقلوب التوزيع الاسي – توزيع غير معلوماتية.
- توزيع Levy– توزيع غير معلوماتية.
- توزيع كامبل من النوع الثاني – توزيع غير معلوماتية.

كتوزيعات أولية مضاعفة . لاستحصال مقدر بيز لمعلمة القياس لتوزيع Nakagami.

3.1 التوزيع اللاحق باستعمال توزيعات أولية مضاعفة مختلفة

في هذا المبحث نشتق التوزيعات اللاحقة . بافتراض بان β يتبع أربعة أنواع من التوزيعات الأولية بدالة كثافة احتمالية معطاة في الجدول (1).

جدول (1) الأنواع الأربعة للتوزيعات الأولية $f_i(\beta)$ بدالة كثافة احتمالية (pdf) لـ β.

Prior distribution	$f_i(\beta)\quad ,i=1,2,3,4$
β ~ Inverted exponential dist^n. (α)	$f_1(\beta)=\frac{1}{\beta^2\ \alpha}\ \exp(-\frac{1}{\beta\alpha})\quad$ for $\beta\ ,\alpha>0$
β ~ Levy dist^n. (b)	$f_2(\beta)=\sqrt{\frac{b}{2\pi}}\ \beta^{-\frac{3}{2}}\ \exp(-\frac{b}{2\beta})\quad$ for $b,\ \beta>0$
β ~Gumbel type-II dist^n. (b_1)	$f_3(\beta)=b_1\ \beta^{-2}\ \exp(-\frac{b_1}{\beta})\quad$ for $b_1,\ \beta>0$
β ~ Non-informative dist^n. (c)	$f_4(\beta)=\frac{1}{\beta^c}\quad$ for $\beta, c>0$

والتوزيعات الاولية المضاعفة لها مع دالة كثافة احتمالية معطاة في جدول (2).

جدول (2) الأنواع الستة للتوزيعات الأولية المضاعفة $(P(\beta))$ بدالة كثافة احتمالية (p d f) لـ β.

Double prior dist^n.	$P_i(\beta)\quad ,i=1,2,3,4,5,6$
$\beta\sim$ Inverted exponential dist^n. (α) - $\beta\sim$ Levy dist^n. (b)	$P_1(\beta)\ \alpha\ f_1(\beta)\ f_2(\beta)$ $P_1(\beta)\ \alpha[\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{b}{2\pi}}]\ \beta^{-\frac{7}{2}}\exp(-\frac{1}{\beta}(\frac{1}{\alpha}+\frac{b}{2}))\quad$ for $b,\alpha,\beta>0$
$\beta\sim$ Inverted exponential dist^n. (α) - $\beta\sim$ Gumbel type-II dist^n. (b_1)	$P_2(\beta)\ \alpha\ f_1(\beta)\ f_3(\beta)$ $P_2(\beta)\ \alpha\frac{b_1}{\alpha}\beta^{-4}\exp(-\frac{1}{\beta}(\frac{1}{\alpha}+b_1))\quad$ for $b_1,\alpha,\beta>0$
$\beta\sim$ Levy dist^n. (b)- $\beta\sim$ Gumbel type-II dist^n. (b_1)	$P_3(\beta)\ \alpha\ f_2(\beta)\ f_3(\beta)$ $P_3(\beta)\ \alpha\sqrt{\frac{b}{2\pi}}\ b_1\ \beta^{-\frac{7}{2}}\exp(-\frac{1}{\beta}(\frac{b}{2}+b_1))\quad$ for $b,b_1,\beta>0$
$\beta\sim$ Inverted exponential dist^n. (α) - $\beta\sim$ Non-Informative dist^n. (c)	$P_4(\beta)\ \alpha\ f_1(\beta)\ f_4(\beta)$ $P_4(\beta)=\frac{1}{\alpha}\beta^{-2-c}\exp(-\frac{1}{\beta\alpha})\quad$ for $\beta,\alpha,c>0$
$\beta\sim$ Levy dist^n. (b)- $\beta\sim$ Non-informative dist^n. (c)	$P_5(\beta)\ \alpha\ f_2(\beta)\ f_4(\beta)$ $P_5(\beta)=\sqrt{\frac{b}{2\pi}}\ \beta^{-\frac{3}{2}-c}\exp(-\frac{b}{2\beta})\quad$ for $b,\beta,c>0$
$\beta\sim$ Gumbel type-II dist^n. (b_1)- $\beta\sim$ Non-informative dist^n. (c)	$P_6(\beta)\ \alpha\ f_3(\beta)\ f_4(\beta)$ $P_6(\beta)=b_1\ \beta^{-2-c}\exp(-\frac{b_1}{\beta})\quad$ for $\beta,b_1,c>0$

وان التوزيع اللاحق للمعلمة القياس (β) لتوزيع Nakagami لبيانات معطاة $\underline{t}=(t_1,t_2,...,t_n)$ يكون بالصيغة الآتية [4]:

$$P(\beta\setminus t)=\frac{L(\underline{t}\setminus\beta)\ P(\beta)}{\int_{\beta}L(\underline{t}\setminus\beta)\ P(\beta)d\beta}\qquad ...(5)$$

بتعويض المعادلة (4) ولكلا من الدوال الأولية المضاعفة $(P_i(\beta))$ كما مبينة في الجدول (2) في الصيغة (5) , نشتق التوزيع اللاحق للمعلمة المجهولة (β)باستعمال الستة أنواع من التوزيعات الأولية المضاعفة (لمزيد من التفاصيل حول الاشتقاقات انظر الملحق A–).

جدول (3) التوزيعات اللاحقة المشتقة $(P(\beta \backslash t))$ للمعلمة المجهولة (β) باستعمال الأنواع الستة من التوزيعات الأولية المضاعفة

Double prior dist^{n}.	The posterior distribution $(P(\beta \backslash t))$
$\beta \sim$ Inverted exponential dist^{n}. (α) - $\beta \sim$ Levy dist^{n}. (b)	$P_1(\beta \backslash t) \sim$ Inverted gamma Distribution $(a=(n\lambda+\frac{5}{2}), b=(\frac{1}{\alpha}+\frac{b}{2}+\lambda\Sigma_{i=1}^{n} t^2))$ $P_1(\beta \backslash t)=\frac{(\frac{1}{\alpha}+\frac{b}{2}+\lambda\Sigma_{i=1}^{n} t^2)^{(n\lambda+\frac{5}{2})}}{\Gamma(n\lambda+\frac{5}{2})}\beta^{-((n\lambda+\frac{5}{2})+1)} \exp(-\frac{1}{\beta}(\frac{1}{\alpha}+\frac{b}{2}+\lambda\Sigma_{i=1}^{n} t^2))$ for $\beta, \alpha, b, \lambda>0$
$\beta \sim$ Inverted exponential dist^{n}. (α) - $\beta \sim$ Gumbel type-II dist^{n}. (b_1)	$P_2(\beta \backslash t) \sim$ Inverted gamma Distribution $(a=(n\lambda+3), b=(\frac{1}{\alpha}+b_1+\lambda\Sigma_{i=1}^{n} t^2))$ $P_2(\beta \backslash t)=\frac{(\frac{1}{\alpha}+b_1+\lambda\Sigma_{i=1}^{n} t^2)^{(n\lambda+3)}}{\Gamma(n\lambda+3)}\beta^{-((n\lambda+3)+1)} \exp(-\frac{1}{\beta}(\frac{1}{\alpha}+b_1+\lambda\Sigma_{i=1}^{n} t^2))$ for $\beta, \alpha, b_1, \lambda>0$
$\beta \sim$ Levy dist^{n}. (b)-$\beta \sim$ Gumbel type-II dist^{n}. (b_1)	$P_3(\beta \backslash t) \sim$ Inverted gamma Distribution $(a=(n\lambda+\frac{5}{2}), b=(\frac{b}{2}+b_1+\lambda\Sigma_{i=1}^{n} t^2))$ $P_3(\beta \backslash t)=\frac{(\frac{b}{2}+b_1+\lambda\Sigma_{i=1}^{n} t^2)^{(n\lambda+\frac{5}{2})}}{\Gamma(n\lambda+\frac{5}{2})}\beta^{-((n\lambda+\frac{5}{2})+1)} \exp(-\frac{1}{\beta}(\frac{b}{2}+b_1+\lambda\Sigma_{i=1}^{n} t^2))$ for $b_1, b, \beta, \lambda>0$
$\beta \sim$Inverted exponential dist^{n}. (α) - $\beta \sim$Non-Informative dist^{n}. (c)	$P_4(\beta \backslash t) \sim$ Inverted gamma Distribution $(a=(n\lambda+c+1), b=(\frac{1}{\alpha}+\lambda\Sigma_{i=1}^{n} t^2))$ $P_4(\beta \backslash t)=\frac{(\frac{1}{\alpha}+\lambda\Sigma_{i=1}^{n} t^2)^{(n\lambda+c+1)}}{\Gamma(n\lambda+c+1)}\beta^{-((n\lambda+c+1)+1)} \exp(-\frac{1}{\beta}(\frac{1}{\alpha}+\lambda\Sigma_{i=1}^{n} t^2)$ for $\beta, \alpha, c, \lambda>0$
$\beta \sim$ Levy dist^{n}. (b)-$\beta \sim$ Non-informative dist^{n}. (c)	$P_5(\beta \backslash t) \sim$ Inverted gamma Distribution $(a=(n\lambda+0.5+c), b=(\frac{b}{2}+\lambda\Sigma_{i=1}^{n} t^2))$ $P_5(\beta \backslash t)=\frac{(\Gamma(n\lambda+0.5+c)+\lambda\Sigma_{i=1}^{n} t^2)^{(n\lambda+0.5+c)}}{\Gamma(n\lambda+0.5+c)}\beta^{-((n\lambda+0.5+c)+1)} \exp(-\frac{1}{\beta}(\frac{b}{2}+\lambda\Sigma_{i=1}^{n} t^2)$ for $b, \beta, c, \lambda>0$
$\beta \sim$ Gumbel type-II dist^{n}. (b_1)-$\beta \sim$ Non-informative dist^{n}. (c)	$P_6(\beta \backslash t) \sim$ Inverted gamma Distribution $(a=(n\lambda+c+1), b=(b_1+\lambda\Sigma_{i=1}^{n} t^2))$ $P_6(\beta \backslash t)=\frac{(\Gamma(n\lambda+c+1)+\lambda\Sigma_{i=1}^{n} t^2)^{(n\lambda+c+1)}}{\Gamma(n\lambda+c+1)}\beta^{-((n\lambda+c+1)+1)} \exp(-\frac{1}{\beta}(b_1+\lambda\Sigma_{i=1}^{n} t^2)$ for $b_1, \beta, c, \lambda>0$

3.2 مقدرات بيز

في هذا المبحث نشتق مقدر بيز .لاستحصال مقدرات بيز لمعلمة القياس β لتوزيع Nakagami المفترضة باستعمال الأنواع الستة من التوزيعات الأولية المضاعفة. وباستعمال مربع دالة الخسارة (Squared Loss Function) $\ell(\hat{\beta}-\beta)=(\hat{\beta}-\beta)^2$,عندما تكون $\hat{\beta}$ مقدر لـ β باستعمال الأنواع الستة من التوزيعات الأولية المضاعفة.وباستعمال مربع دالة الخسارة.وفيما يلي اشتقاق مقدرات بيز .

مقدر بيز لـ β باستخدام مربع دالة الخسارة $\ell(\hat{\beta}-\beta)=(\hat{\beta}-\beta)^2$, وان دالة المخاطرة تكون مساوية لـ

$$R(\hat{\beta}-\beta)=\hat{\beta}^{2}-2\hat{\beta}E(\beta\setminus t)+E(\beta^{2}\setminus t) \qquad ...(6)$$

, وبالتبسيط , نحصل $(\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}}R(\hat{\beta}-\beta)=0)$ ومساواتها بالصفر $\hat{\beta}$بالنسبة لـ (6)وبإيجاد المشتقة الأولى للصيغة

للتوزيعات الأولية المضاعفة تكون كالأتي : $\hat{\beta}$ ويرمز له بـ βعلى مقدر بيز لـ

$$\hat{\beta}_{SE}=E(\beta\setminus t)=\int_{0}^{\infty}\beta\,P(\beta\setminus t)\,d\beta \qquad ...(7)$$

وبذلك , ندرج نتائج اشتقاق مقدرات بيز باستعمال دالة الخسارة التربيعية عند كل من التوزيعات الأولية المضاعفة الستة(لمزيد من التفاصيل انظر الملحق –B)

جدول (4) مقدرات بيز ($\hat{\beta}_{SE}$) باستعمال دالة الخسارة التربيعية عند كل من التوزيعات الأولية المضاعفة الستة.

Double Prior distribution	$\hat{\beta}_{SE}=E(\beta\setminus t)=\int_{0}^{\infty}\beta\,P(\beta\setminus t)\,d\beta$
$\beta\sim$ Inverted exponential dist^n. (α) - $\beta\sim$ Levy dist^n. (b)	$\hat{\beta}_{SE1}=(\frac{1}{\alpha}+\frac{b}{2}+\lambda\sum_{i=1}^{n}t^2)\frac{1}{(n\lambda+\frac{3}{2})}$, $b,\alpha\ n,\lambda>0$
$\beta\sim$ Inverted exponential dist^n. (α) - $\beta\sim$ Gumbel type-II dist^n. (b_1)	$\hat{\beta}_{SE2}=(\frac{1}{\alpha}+b_1+\lambda\sum_{i=1}^{n}t^2)\frac{1}{(n\lambda+2)}$, $b_1,\alpha,n,\lambda>0$
$\beta\sim$ Levy dist^n. (b)- $\beta\sim$ Gumbel type-II dist^n. (b_1)	$\hat{\beta}_{SE3}=(\frac{b}{2}+b_1+\lambda\sum_{i=1}^{n}t^2)\frac{1}{(n\lambda+\frac{3}{2})}$, $b_1,b,\ n,\lambda>0$
$\beta\sim$ Inverted exponential dist^n. (α) - $\beta\sim$Non- Informative dist^n. (c)	$\hat{\beta}_{SE4}=(\frac{1}{\alpha}+\lambda\sum_{i=1}^{n}t^2)\frac{1}{(n\lambda+c)}$ $\alpha,c,\ n,\lambda>0$
$\beta\sim$ Levy dist^n. (b)- $\beta\sim$ Non-informative dist^n. (c)	$\hat{\beta}_{SE5}=(\frac{b}{2}+\lambda\sum_{i=1}^{n}t^2)\frac{1}{(n\lambda-0.5+c)}$, $b,c,n,\lambda>0$
$\beta\sim$ Gumbel type-II dist^n. (b_1)- $\beta\sim$ Non-informative dist^n. (c)	$\hat{\beta}_{SE6}=(b_1+\lambda\sum_{i=1}^{n}t^2)\frac{1}{(n\lambda+c)}$, $b_1,\lambda,c,\lambda>0$

4. دراسة المحاكاة

تم استخدام المحاكاة لغرض الحصول على مقدرات بيز لمعلمة القياس (β) لتوزيعNakagamiالمتقدم ذكرها في المبحث (3), فقد تم كتابة برامج البحث باستخدام برنامج الـ MATLAB–R2008a . فقد تم بناء التجارب وفق الفروض والمواصفات التالية:

1. تم استخدام إحجام العينات n= 15, 25,50, 100,150.
2. إن توزيع Nakagami يرتبط بتوزيع كاما [8], فقد تم توليد عينات عشوائية من توزيع كاما بالمعلمتين (a , b), إي إن $X \sim Gamma(a , b)$, وللحصول على عينات عشوائية من توزيع Nakagami بالمعلمتين (λ , β), إي إن $t \sim Nakagami(\lambda , \beta)$, وبأخذ الجذر التربيعي لـ X ,اي $t = \sqrt{X} \sim Nakagami(\lambda , \beta)$ [5], يتم جعل المعلمتين (a,b) مساوية لـ $(a = \lambda ,\ b = \frac{\beta}{\lambda})$, إي عندما تكون قيمة λ قيمة معلومة وثابتة لتكون القيم المفترضة لـ $(\lambda = a)$, ولعدة قيم مفترضة للمعلمة القياس $(\beta = b\ \lambda)$ وكما مبين أدناه :-

No. of case	$X \sim Gamma(a , b) \Rightarrow t = \sqrt{X} \sim Nakagami(\lambda , \beta)$
1	$X \sim Gamma(a = 1.5,\ b = 1/3) \Rightarrow t = \sqrt{X} \sim Nakagami(\lambda = a = 1.5,\ \beta = b\ \lambda = 0.5)$
2	$X \sim Gamma(a = 1.5,\ b = 2) \Rightarrow t = \sqrt{X} \sim Nakagami(\lambda = a = 1.5,\ \beta = b\ \lambda = 3)$
3	$X \sim Gamma(a = 2,\ b = 1/4) \Rightarrow t = \sqrt{X} \sim Nakagami(\lambda = a = 2,\ \beta = b\ \lambda = 0.5)$
4	$X \sim Gamma(a = 2,\ b = 1) \Rightarrow t = \sqrt{X} \sim Nakagami(\lambda = a = 2,\ \beta = b\ \lambda = 2)$
5	$X \sim Gamma(a = 5,\ b = 0.2) \Rightarrow t = \sqrt{X} \sim Nakagami(\lambda = a = 5,\ \beta = b\ \lambda = 1)$
6	$X \sim Gamma(a = 5,\ b = 1) \Rightarrow t = \sqrt{X} \sim Nakagami(\lambda = a = 5,\ \beta = b\ \lambda = 5)$

3. نفترض قيم عشوائيا لمعلمتي التوزيع الأولي المضاعف مقلوب التوزيع الاسي بالمعلمة (α)– توزيع لافي بالمعلمة (b), لتكن القيم المفترضة $(\alpha ,\ b) = (2,3) - (2,2) - (3,2)$.
4. نفترض قيم عشوائيا لمعلمتي التوزيع الأولي المضاعف مقلوب التوزيع الاسي بالمعلمة (α)– توزيع كامبل من النوع الثاني بالمعلمة (b_1) , لتكن القيم المفترضة $(\alpha , b_1) = (3,4) - (3,3) - (4,3)$.
5. نفترض قيم عشوائيا لمعلمتي التوزيع الأولي المضاعف توزيع لافي بالمعلمة (b)– توزيع كامبل من النوع الثاني بالمعلمة (b_1), لتكن القيم المفترضة $(b\ ,\ b_1) = (3,4) - (4,4) - (4,3)$
6. نفترض قيم عشوائيا لمعلمتي التوزيع الأولي المضاعف توزيع غير معلوماتية (c)– مقلوب التوزيع الاسي بالمعلمة (α), لتكون القيم المفترضة $(\alpha,\ c) = (2,1) - (2,3) - (3,5)$.
7. نفترض قيم عشوائيا لمعلمتي التوزيع الأولي المضاعف توزيع غير معلوماتية بالمعلمة (c)– توزيع لافي بالمعلمة (b) , لتكن القيم المفترضة $(b , c) = (3,1) - (3,3) - (2,5)$.
8. نفترض قيم عشوائيا لمعلمتي التوزيع الأولي المضاعف توزيع غير معلوماتية بالمعلمة (c)– توزيع كامبل من النوع الثاني بالمعلمة (b_1) , لتكن القيم المفترضة $(b_1 , c) = (4,1) - (3,3) - (3,5)$.
9. ثم يتم إجراء التجارب المختلفة وفقا لجميع التوليفات الممكنة للفروض المتقدم ذكرها أعلاه من خلال تكرار هذا التوليد لتوزيع Nakagami لـ 1000 مرة لكل تجربة ولكل حجم عينة (n).

وقد لخصت النتائج المستحصلة من تجارب المحاكاة في الجداول,(4.1−4.6) والمتمثلة بمقدرات معلمة القياس $\hat{\beta}_{SE}$ لتوزيع Nakagami باستعمال دالة الخسارة التربيعية , ووفقا للتوزيعات الأولية المضاعفة الستة .إذ تم كتابة برنا مج المحاكاة باستعمال برنامج الـ Matlab−R2017b . بعد تقدير المعلمة β , يتم حساب متوسط مربعات الخطاء ((Mean Squared Error (MSE)) لمعرفة أفضلية التقديرات.

$$MSE = \frac{1}{r}\sum_{r=1}^{1000} (\hat{\beta}_{SE}(r) - \beta)^2 \qquad ...(8)$$

انظر الملحق −C يتضمن خوارزمية توليد البيانات وخوارزمية حساب مقدرات معلمة القياس مع قيم MSE لكل حجم عينة. وقد لخصت النتائج المستحصلة من تجارب المحاكاة في الجداول (4.6−4.1) , المبينة فيها أربعة قيم مقدرة للمعلمة القياس βلتوزيع Nakagami , مع قيم MSE لكل حجم عينة ولكل قيم المعلمات المفترضة في التوزيعات الأولية المضاعفة المفترضة لمعلمة القياس βلتوزيع.Nakagami باستعمال طرائق تقدير بيز عند افتراض التوزيع الأولي للمعلمة βووفقا للتوزيعات الأولية المضاعفة الستة . وان أفضل طريقة تقدير من بين الطرائق المستخدمة هي الطريقة التي تعطي اقل قيمة لكل من قيم MSE. وقد لخصت النتائج في الجداول (4.6 − 4.1)المبينة أدناه.

جدول (4.1) يبين القيم لـ $\hat{\beta}_{SE}$ باستعمال دالة الخسارة التربيعية (MSE) .

Method	parameters				Estimate for β $(\hat{\beta})$					MSE $(\hat{\beta})$				
					Sample Size(n)					Sample Size(n)				
					15	25	50	100	150	15	25	50	100	150
Bayes	λ	β	α	b	$(P_1(\theta \backslash t))$ when double prior is (Inverted exponential- Levy) dist[n].									
	1.5	0.5	2	3	0.55038	0.53613	0.51313	0.50844	0.50622	0.01209	0.00783	0.00328	0.00171	0.00111
			2	2	0.52954	0.52331	0.50659	0.50514	0.50401	0.01042	0.00707	0.00315	0.00167	0.00109
			3	2	0.5226	0.51904	0.50441	0.50404	0.50328	0.01006	0.00689	0.00312	0.00166	0.00109
Bayes	λ	β	α	b_1	$(P_2(\theta \backslash t))$ when double prior is (Inverted exponential -Gumbel type-II) dist[n].									
	1.5	0.5	3	4	0.63438	0.58842	0.5401	0.52212	0.51539	0.02722	0.01418	0.00467	0.00212	0.00131
			3	3	0.59357	0.5631	0.52711	0.51554	0.51098	0.01792	0.01034	0.00380	0.00187	0.00119
			4	3	0.59016	0.56099	0.52603	0.51499	0.51061	0.01729	0.01008	0.00374	0.00186	0.00118
Bayes	λ	β	b	b_1	$(P_3(\theta \backslash t))$ when double prior is (Levy - Gumbel type-II) dist[n].									
	1.5	0.5	3	4	0.69621	0.62588	0.55888	0.53154	0.52167	0.04805	0.02237	0.00657	0.00264	0.00155
			4	4	0.71704	0.6387	0.56542	0.53484	0.52388	0.05666	0.02576	0.00738	0.00286	0.00165
			4	3	0.67538	0.61306	0.55234	0.52824	0.51947	0.04031	0.01931	0.00584	0.00244	0.00146
Bayes	λ	β	α	c	$(P_4(\theta \backslash t))$ when double prior is (Inverted exponential- Non- Informative) dist[n].									
	1.5	0.5	2	1	0.49826	0.50413	0.49677	0.50019	0.5007	0.00996	0.00671	0.00316	0.00165	0.00108
			2	3	0.45918	0.47924	0.48403	0.49365	0.49631	0.01013	0.00648	0.00324	0.00165	0.00108
			3	5	0.41972	0.45276	0.46985	0.48621	0.49127	0.01372	0.00773	0.00375	0.00176	0.00112
Bayes	λ	β	b	c	$(P_5(\theta \backslash t))$ when double prior is (Levy - Non- Informative) dist[n].									
	1.5	0.5	3	1	0.55257	0.53708	0.5133	0.5085	0.50625	0.01316	0.00825	0.00336	0.00174	0.00112
			3	3	0.50836	0.51023	0.5000	0.50183	0.5018	0.00887	0.00631	0.00303	0.00162	0.00107
			2	5	0.45219	0.47403	0.48119	0.4921	0.49525	0.00983	0.00630	0.00323	0.00164	0.00107
Bayes	λ	β	b_1	c	$(P_6(\theta \backslash t))$ when double prior is (Gumbel type-II - Non- Informative) dist[n].									
	1.5	0.5	4	1	0.64719	0.59504	0.54282	0.52337	0.51619	0.03163	0.01573	0.00498	0.00220	0.00134
			3	3	0.55722	0.54097	0.51608	0.50999	0.50728	0.01173	0.00773	0.00325	0.00171	0.00112
			3	5	0.51669	0.51551	0.50318	0.50341	0.50287	0.00755	0.00574	0.00285	0.00158	0.00105

جدول (4.2) يبين القيم لـ $\hat{\beta}_{SE}$ باستعمال دالة الخسارة التربيعية (MSE) .

Method	parameters				Estimate for β ($\hat{\beta}$)					MSE($\hat{\beta}$)				
					Sample Size(n)					Sample Size(n)				
					15	25	50	100	150	15	25	50	100	150
Bayes	λ	β	α	b	($P_1(\theta \backslash t)$) when double prior is (Inverted exponential- Levy) dist^n.									
	1.5	3	2	3	2.8804	2.9376	2.9742	2.9846	2.988	0.3393	0.23136	0.11308	0.05952	0.03815
			2	2	2.8596	2.9248	2.9677	2.9813	2.9858	0.3447	0.23312	0.11346	0.05963	0.03820
			3	2	2.8526	2.9205	2.9655	2.9802	2.9851	0.3467	0.23378	0.11361	0.05968	0.03822
Bayes	λ	β	α	b_1	($P_2(\theta \backslash t)$) when double prior is (Inverted exponential - Gumbel type-II) dist^n.									
	1.5	3	3	4	2.9168	2.9595	2.9852	2.9902	2.9917	0.3188	0.22338	0.11118	0.05899	0.03790
			3	3	2.876	2.9342	2.9722	2.9836	2.9873	0.3273	0.22608	0.11173	0.05916	0.038
			4	3	2.8726	2.9321	2.9711	2.9831	2.987	0.32815	0.22636	0.11179	0.05918	0.03801
Bayes	λ	β	b	b_1	($P_3(\theta \backslash t)$)when double prior is (Levy - Gumbel type-II) dist^n.									
	1.5	3	3	4	3.0262	3.0273	3.02	3.0077	3.0035	0.3257	0.22821	0.11281	0.05935	0.03801
			4	4	3.0471	3.0402	3.0265	3.011	3.0057	0.3272	0.22907	0.11312	0.05941	0.03803
			4	3	3.0054	3.0145	3.0134	3.0044	3.0013	0.3250	0.22767	0.1126	0.05931	0.03800
Bayes	λ	β	α	c	($P_4(\theta \backslash t)$) when double prior is (Inverted exponential- Non- Informative) dist^n.									
	1.5	3	2	1	2.8778	2.9368	2.974	2.9846	2.988	0.3539	0.23741	0.11457	0.05992	0.03831
			2	3	2.6521	2.7918	2.8978	2.9456	2.9618	0.4089	0.25429	0.11858	0.06109	0.03896
			3	5	2.4532	2.6565	2.8233	2.9065	2.9353	0.5465	0.30956	0.13403	0.06538	0.04104
Bayes	λ	β	b	c	($P_5(\theta \backslash t)$) when double prior is (Levy - Non- Informative) dist^n.									
	1.5	3	3	1	2.9839	3.0017	3.007	3.0012	2.9991	0.3542	0.23959	0.11546	0.06008	0.03834
			3	3	2.7452	2.8516	2.9294	2.9618	2.9727	0.36451	0.23824	0.11452	0.05997	0.03841
			2	5	2.5233	2.704	2.8494	2.9202	2.9446	0.48407	0.28377	0.12677	0.06337	0.04008
Bayes	λ	β	b_1	c	($P_6(\theta \backslash t)$) when double prior is (Gumbel type-II - Non- Informative) dist^n.									
	1.5	3	4	1	3.0268	3.0277	3.0201	3.0078	3.0035	0.33976	0.23418	0.1143	0.05974	0.03818
			3	3	2.7502	2.8535	2.9298	2.9619	2.9728	0.35036	0.23239	0.11306	0.05958	0.03825
			3	5	2.5502	2.7192	2.8566	2.9237	2.9469	0.44994	0.27039	0.12336	0.06246	0.03967

جدول (4.3) يبين القيم لـ $\hat{\beta}_{SE}$ باستعمال دالة الخسارة التربيعية (MSE) .

Method	parameters				Estimate for β ($\hat{\beta}$)					MSE ($\hat{\beta}$)				
					Sample Size(n)					Sample Size(n)				
					15	25	50	100	150	15	25	50	100	150
Bayes	λ	β	α	b	($P_1(\theta \backslash t)$) when double prior is (Inverted exponential- Levy) dist^n.									
	2	0.5	2	3	0.53812	0.52183	0.51485	0.5068	0.50507	0.00899	0.00499	0.00270	0.00123	0.00078
			2	2	0.52224	0.51212	0.50992	0.50432	0.50341	0.00803	0.00466	0.00258	0.00120	0.00077
			3	2	0.51695	0.50888	0.50828	0.5035	0.50286	0.00782	0.00459	0.00255	0.00120	0.00076
Bayes	λ	β	α	b_1	($P_2(\theta \backslash t)$) when double prior is (Inverted exponential -Gumbel type-II) dist^n.									
	2	0.5	3	4	0.60262	0.56168	0.5352	0.5171	0.51196	0.01783	0.00823	0.00370	0.00147	0.00089
			3	3	0.57137	0.54245	0.5254	0.51215	0.50865	0.01240	0.00623	0.00310	0.00133	0.00083
			4	3	0.56877	0.54085	0.52458	0.51174	0.50837	0.01203	0.00609	0.00306	0.00132	0.00082
Bayes	λ	β	b	b_1	($P_3(\theta \backslash t)$)when double prior is (Levy - Gumbel type-II) dist^n.									
	2	0.5	3	4	0.64923	0.58979	0.54933	0.52417	0.51668	0.02981	0.01257	0.00492	0.00177	0.00103
			4	4	0.6651	0.5995	0.55426	0.52666	0.51833	0.03479	0.01441	0.00543	0.00190	0.00109
			4	3	0.63335	0.58008	0.5444	0.52169	0.51502	0.02532	0.01092	0.00445	0.00166	0.00098
Bayes	λ	β	α	c	($P_4(\theta \backslash t)$) when double prior is (Inverted exponential- Non- Informative) dist^n.									
	2	0.5	2	1	0.49841	0.49753	0.50254	0.5006	0.50092	0.00778	0.00461	0.00251	0.00119	0.00076
			2	3	0.4682	0.47875	0.49279	0.49567	0.49762	0.00788	0.00471	0.00246	0.00119	0.00075
			3	5	0.43669	0.45832	0.48181	0.49002	0.49381	0.01011	0.00569	0.00265	0.00124	0.00078
Bayes	λ	β	b	c	($P_5(\theta \backslash t)$) when double prior is (Levy - Non- Informative) dist^n.									
	2	0.5	3	1	0.53937	0.52226	0.515	0.50684	0.50508	0.00959	0.00519	0.00276	0.00124	0.00079
			3	3	0.50617	0.50236	0.50495	0.50183	0.50174	0.00712	0.00435	0.00246	0.00118	0.00075
			2	5	0.46234	0.47475	0.4905	0.49448	0.49681	0.00770	0.00466	0.00243	0.00118	0.00075
Bayes	λ	β	b_1	c	($P_6(\theta \backslash t)$) when double prior is (Gumbel type-II - Non- Informative) dist^n.									
	2	0.5	4	1	0.61131	0.56616	0.5372	0.51802	0.51255	0.02017	0.00898	0.00389	0.00152	0.00091
			3	3	0.54396	0.52592	0.51706	0.50799	0.50587	0.00880	0.00493	0.00270	0.00123	0.00078
			3	5	0.51288	0.5068	0.50721	0.50303	0.51247	0.00627	0.00400	0.00237	0.00115	0.00090

جدول (4.4) يبين القيم لـ $\hat{\beta}_{SE}$ باستعمال دالة الخسارة التربيعية (MSE) .

Method	parameters				Estimate for β ($\hat{\beta}$) Sample Size(n)					MSE ($\hat{\beta}$) Sample Size(n)				
					15	25	50	100	150	15	25	50	100	150
Bayes	λ	β	α	b	$(P_1(\theta \backslash t))$ when double prior is (Inverted exponential- Levy) dist^n.									
	2	2	2	3	1.9625	1.9824	1.9933	2.0001	1.998	0.10937	0.07763	0.04151	0.01918	0.01338
			2	2	1.9466	1.9727	1.9884	1.9976	1.9964	0.11082	0.07807	0.041603	0.01918	0.01339
			3	2	1.9413	1.9695	1.9868	1.9968	1.9958	0.11141	0.07826	0.04164	0.01919	0.01340
Bayes	λ	β	α	b_1	$(P_2(\theta \backslash t))$ when double prior is (Inverted exponential -Gumbel type-II) dist^n.									
	2	2	3	4	2.0047	2.0082	2.0064	2.0067	2.0024	0.10464	0.07591	0.04110	0.01913	0.01334
			3	3	1.9735	1.989	1.9966	2.0017	1.9991	0.10532	0.07596	0.04107	0.01909	0.01334
			4	3	1.9709	1.9874	1.9958	2.0013	1.9988	0.10547	0.07600	0.04108	0.01908	0.01334
Bayes	λ	β	b	b_1	$(P_3(\theta \backslash t))$ when double prior is (Levy - Gumbel type-II) dist^n.									
	2	2	3	4	2.0736	2.0504	2.0278	2.0174	2.0096	0.11338	0.07986	0.04224	0.01948	0.01347
			4	4	2.0895	2.0601	2.0327	2.0199	2.0113	0.11597	0.08093	0.04254	0.01957	0.01351
			4	3	2.0577	2.0407	2.0229	2.015	2.008	0.1113	0.07898	0.04199	0.01940	0.01344
Bayes	λ	β	α	c	$(P_4(\theta \backslash t))$ when double prior is (Inverted exponential- Non- Informative) dist^n.									
	2	2	2	1	1.9458	1.9724	1.9884	1.9976	1.9963	0.11442	0.079612	0.042016	0.01928	0.01344
			2	3	1.8278	1.898	1.9497	1.9779	1.9832	0.12802	0.083417	0.042795	0.01938	0.01353
			3	5	1.7186	1.826	1.911	1.9578	1.9696	0.16663	0.098092	0.046668	0.02031	0.01400
Bayes	λ	β	b	c	$(P_5(\theta \backslash t))$ when double prior is (Levy - Non- Informative) dist^n.									
	2	2	3	1	2.0104	2.0118	2.0082	2.0076	2.003	0.11527	0.080559	0.042366	0.01943	0.01348
			3	3	1.8867	1.9351	1.969	1.9877	1.9898	0.11426	0.078619	0.041624	0.01914	0.01340
			2	5	1.7629	1.8549	1.9265	1.9658	1.975	0.14625	0.090093	0.044518	0.01978	0.01374
Bayes	λ	β	b_1	c	$(P_6(\theta \backslash t))$ when double prior is (Gumbel type-II - Non- Informative) dist^n.									
	2	2	4	1	2.0587	2.0411	2.023	2.015	2.008	0.11492	0.080537	0.04241	0.01950	0.01349
			3	3	1.9036	1.9452	1.974	1.9902	1.9914	0.10767	0.076019	0.040945	0.01899	0.01332
			3	5	1.7948	1.8744	1.9364	1.9708	1.9784	0.12956	0.083566	0.042793	0.01938	0.01354

جدول (4.5) يبين القيم لـ $\hat{\beta}_{SE}$ باستعمال دالة الخسارة التربيعية (MSE) .

Method	parameters				Estimate for β ($\hat{\beta}$) Sample Size(n)					MSE($\hat{\beta}$) Sample Size(n)				
					15	25	50	100	150	15	25	50	100	150
Bayes	λ	β	α	b	$(P_1(\theta \backslash t))$ when double prior is (Inverted exponential- Levy) dist^n.									
	5	1	2	3	1.0046	1.0054	1.0026	1.0019	1.0014	0.01337	0.00777	0.00375	0.00195	0.00139
			2	2	0.99803	1.0015	1.0006	1.0009	1.0007	0.01335	0.00774	0.00374	0.00195	0.00139
			3	2	0.99585	1.0002	0.9999	1.0005	1.0005	0.01337	0.00774	0.00374	0.00195	0.00139
Bayes	5	1	α	b_1	$(P_2(\theta \backslash t))$ when double prior is (Inverted exponential -Gumbel type-II) dist^n.									
			3	4	1.0283	1.0198	1.0098	1.0055	1.0038	0.01398	0.00807	0.00382	0.00198	0.00140
			3	3	1.0154	1.012	1.0059	1.0035	1.0025	0.01341	0.00782	0.00376	0.00196	0.00139
			4	3	1.0143	1.0113	1.0055	1.0034	1.0024	0.01338	0.00781	0.00375	0.00196	0.00139
Bayes	5	1	b	b_1	$(P_3(\theta \backslash t))$ when double prior is (Levy - Gumbel type-II) dist^n.									
			3	4	1.0503	1.0331	1.0165	1.0088	1.006	0.01588	0.00884	0.00401	0.00203	0.00143
	5	1	4	4	1.0569	1.037	1.0185	1.0098	1.0067	0.01658	0.00911	0.00408	0.00205	0.00144
			4	3	1.0438	1.0291	1.0145	1.0078	1.0054	0.01526	0.00859	0.00395	0.00201	0.00142
Bayes			α	c	$(P_4(\theta \backslash t))$ when double prior is (Inverted exponential- Non- Informative) dist^n.									
	5	1	2	1	0.99144	0.99751	0.99858	0.99986	1	0.01360	0.00781	0.00376	0.00195	0.00139
			2	3	0.96602	0.98192	0.99068	0.99589	0.99737	0.01399	0.00789	0.00378	0.00196	0.00139
			3	5	0.93978	0.96553	0.98226	0.99162	0.99451	0.01583	0.00852	0.00395	0.00199	0.00141
Bayes	5	1	b	c	$(P_5(\theta \backslash t))$ when double prior is (Levy - Non- Informative) dist^n.									
			3	1	1.0113	1.0094	1.0046	1.0029	1.002	0.01383	0.00795	0.00379	0.00197	0.00140
			3	3	0.98515	0.99361	0.9966	0.99887	0.99937	0.01323	0.00766	0.00372	0.00194	0.00139
	5	1	2	5	0.95408	0.97441	0.98681	0.99392	0.99605	0.01447	0.00804	0.00382	0.00196	0.0014
Bayes			b_1	c	$(P_6(\theta \backslash t))$ when double prior is (Gumbel type-II - Non- Informative) dist^n.									
			4	1	1.0375	1.0253	1.0125	1.0069	1.0047	0.01493	0.00844	0.00391	0.00200	0.00141
	5	1	3	3	0.99807	1.0015	1.0006	1.0009	1.0007	0.01284	0.00756	0.00369	0.00194	0.00139
			3	5	0.97312	0.9860	0.9927	0.9969	0.99804	0.01293	0.00752	0.00369	0.00193	0.00138

جدول (4.6) يبين القيم لـ $\hat{\beta}_{SE}$ باستعمال دالة الخسارة التربيعية (MSE) .

Method	parameters				Estimate for β $(\hat{\beta})$					MSE $(\hat{\beta})$				
					Sample Size(n)					Sample Size(n)				
					15	25	50	100	150	15	25	50	100	150
Bayes	λ	β	α	b	$(P_1(\theta \setminus t))$ when double prior is (Inverted exponential- Levy) dist^n.									
	5	5	2	3	4.9184	4.9631	4.9857	4.9931	4.9965	0.31039	0.19576	0.09721	0.04976	0.03236
			2	2	4.9118	4.9591	4.9837	4.9921	4.9958	0.3115	0.19606	0.09727	0.04977	0.03236
			3	2	4.9096	4.9578	4.983	4.9917	4.9956	0.31189	0.19617	0.09729	0.04978	0.03236
Bayes	λ	β	α	b_1	$(P_2(\theta \setminus t))$ when double prior is (Inverted exponential -Gumbel type-II) dist^n.									
	5	5	3	4	4.9167	4.9619	4.9851	4.9928	4.9963	0.30673	0.19432	0.09684	0.04967	0.03231
			3	3	4.9037	4.954	4.9811	4.9908	4.995	0.30906	0.19498	0.09698	0.04970	0.03233
			4	3	4.9027	4.9534	4.9808	4.9906	4.9948	0.30927	0.19504	0.09699	0.04970	0.03233
Bayes	λ	β	b	b_1	$(P_3(\theta \setminus t))$ when double prior is (Levy - Gumbel type-II) dist^n.									
	5	5	3	4	4.9641	4.9907	4.9996	5.0001	5.0012	0.30501	0.19448	0.09701	0.04971	0.03234
			4	4	4.9707	4.9947	5.0016	5.0011	5.0018	0.30458	0.19442	0.09701	0.04971	0.03235
			4	3	4.9576	4.9868	4.9976	4.9991	5.0005	0.30552	0.19457	0.09701	0.04971	0.03234
Bayes	λ	β	α	c	$(P_4(\theta \setminus t))$ when double prior is (Inverted exponential- Non- Informative) dist^n.									
	5	5	2	1	4.931	4.9709	4.9896	4.9951	4.9978	0.3125	0.19679	0.09750	0.04984	0.03239
			2	3	4.8045	4.8932	4.9502	4.9752	4.9846	0.33036	0.20127	0.09834	0.05003	0.03245
			3	5	4.6824	4.8166	4.9107	4.9552	4.9711	0.37863	0.21769	0.10234	0.05103	0.03288
Bayes	λ	β	b	c	$(P_5(\theta \setminus t))$ when double prior is (Levy - Non- Informative) dist^n.									
	5	5	3	1	4.9769	4.9986	5.0036	5.0021	5.0025	0.31236	0.19751	0.09779	0.04992	0.03244
			3	3	4.8484	4.9202	4.964	4.9821	4.9892	0.3189	0.19772	0.09754	0.04983	0.03237
			2	5	4.7202	4.8404	4.923	4.9614	4.9753	0.35953	0.21097	0.10067	0.05061	0.0327
Bayes	λ	β	b_1	c	$(P_6(\theta \setminus t))$ when double prior is (Gumbel type-II - Non- Informative) dist^n.									
	5	5	4	1	4.977	4.9986	5.0036	5.0021	5.0025	0.30826	0.19594	0.09740	0.04982	0.03239
			3	3	4.8366	4.9127	4.9601	4.9802	4.9879	0.31885	0.19748	0.09745	0.04981	0.03236
			3	5	4.7157	4.8372	4.9212	4.9605	4.9747	0.35856	0.21059	0.10058	0.05059	0.0326

4.1مناقشة نتائج المحاكاة

نلاحظ من الجداول $(4.1-4.6)$ عموما بان جودة التقدير تتحسن بزيادة حجم العينة (n), إذ تتناقص قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) بزيادة حجم العينة في كل الحالات قيد البحث ولكل التوزيعات الاولية المضاعفة المختلفة والمستعملة في اشتقاق التوزيع اللاحق لمعلمة القياس βفي البحث.

اذ نلاحظ من الجدول (4.1)عندما تكون القيمة المفترضة لـ$\beta = 0.5$و $\lambda = 1.5$بافتراض ان قيمة λ قيمة ثابتة , نلاحظ بشكل عام بان مقدر بيز للمعلمة β عند استعمال طريقة بيزعندما يكون التوزيع الاولي المضاعف لمعلمة القياس βيخضع:-

- لمقلوب التوزيع الاسي– توزيع Levy بالمعلمتين $(\alpha\ , b)$,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ$\beta = 0.5$.,وان قيمة$(\hat{\beta})$تقترب من قيمة β بزيادة n.و عموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة b عند ثبوت قيمة المعلمة α لكل حجم عينة.في حين تكون متناقصة بزيادة قيمة α عند ثبوت قيمة المعلمة b لكل حجم عينة.

- لمقلوب التوزيع الاسي – توزيع كامبل من النوع الثاني بالمعلمتين (α , b_1) , فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 0.5$.و عموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة b_1 عند ثبوت قيمة المعلمة α لكل حجم عينة. في حين تكون متناقصة بزيادة قيمة α عند ثبوت قيمة المعلمة b_1 لكل حجم عينة.
- لتوزيع Levy– توزيع كامبل من النوع الثاني بالمعلمتين(b, b_1) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 0.5$.وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة b عند ثبوت قيمة المعلمة b_1 لكل حجم عينة. في حين تكون متناقصة بتناقص قيمة b_1 عند ثبوت قيمة المعلمة b لكل حجم عينة.
- لمقلوب التوزيع الاسي –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين (α , c) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 0.5$,وان قيمة $(\hat{\beta})$ تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة c عند ثبوت قيمة المعلمة α لكل حجم عينة.
- لتوزيع Levy –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين(b, c) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 0.5$,وان قيمة $(\hat{\beta})$ تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة c عند ثبوت قيمة المعلمة b لكل حجم عينة.
- لتوزيع كامبل من النوع الثاني –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين(b_1, c) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 0.5$,وان قيمة $(\hat{\beta})$ تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تتناقص قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة c عند ثبوت قيمة المعلمة b_1 لكل حجم عينة.

يعد مقدر بيز للمعلمة β $(\hat{\beta})$ الأفضل عندما يكون التوزيع الاولي المضاعف لمعلمة القياس β يخضع لتوزيع كامبل من النوع الثاني –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين (b_1, c) عند قيم المعلمتين $(b_1 = 3, c = 5)$ مقارنة ببقية المقدرات المستحصلة باستعمال بقية التوزيعات الاولية المضاعفة ,وفقا لمقياس اقل قيمة للمعيار MSE ولكل إحجام العينات.

ونلاحظ من الجدول (4.2)عندما تكون القيمة المفترضة لـ$\beta = 3$ و $\lambda = 1.5$ بافتراض ان قيمة λ قيمة ثابتة , نلاحظ بشكل عام بان مقدر بيز للمعلمة β عند استعمال طريقة بيز عندما يكون التوزيع الاولي المضاعف لمعلمة القياس βيخضع:–

- لمقلوب التوزيع الاسي– توزيع Levy بالمعلمتين $(\alpha\ ,b)$,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 3$.,وان قيمة $(\hat{\beta})$ تقترب من قيمة β بزيادة n. و عموما تزداد قيمة المعيار MSE بتناقص قيمة المعلمة b عند ثبوت قيمة المعلمة α لكل حجم عينة.
- لمقلوب التوزيع الاسي – توزيع كامبل من النوع الثاني بالمعلمتين $(\alpha\ ,b_1)$ فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 3$. وعموما تتناقص قيمة المعيار MSE بتناقص قيمة المعلمة b_1 عند ثبوت قيمة المعلمة α لكل حجم عينة.
- لتوزيع Levy– توزيع كامبل من النوع الثاني بالمعلمتين($b,\ b_1$) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اكبر من من القيمة المفترضة لـ $\beta = 3$.وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة b عند ثبوت قيمة المعلمةb_1 لكل حجم عينة. في حين تكون متناقصة بتناقص قيمة b_1 عند ثبوت قيمة المعلمة bلكل حجم عينة.
- لمقلوب التوزيع الاسي –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين $(\alpha\ ,c)$,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 3$,وان قيمة $(\hat{\beta})$ تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة c عند ثبوت قيمة المعلمة α لكل حجم عينة.
- لتوزيع Levy –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين(b, c) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 3$ عندما تكون قيمة $c=3,5$. وان قيمة $(\hat{\beta})$ تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة c عند ثبوت قيمة المعلمة b لكل حجم عينة عدا قيمة $c=3$ لحجوم العينات.
- لتوزيع كامبل من النوع الثاني –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين(b_1, c) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 3$ عندما تكون قيمة $c=3,5$,وان قيمة $(\hat{\beta})$ تقترب من قيمة β بزيادة n. اذ تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة c , عدا الحالة التي تكون فيها قيمة $c=1$ عند ثبوت قيمة المعلمة b_1 لكل حجم عينة.

يعد مقدر بيز للمعلمة β $(\hat{\beta})$ الأفضل عندما يكون التوزيع الاولي المضاعف لمعلمة القياس β يخضع لمقلوب التوزيع الاسي – توزيع كامبل من النوع الثاني عند قيم المعلمتين $(\alpha = 3,\ b_1 = 4)$ مقارنة ببقية المقدرات المستحصلة باستعمال بقية التوزيعات الاولية المضاعفة ,وفقا لمقياس اقل قيمة للمعيار MSE ولكل إحجام العينات.

ونلاحظ من الجدول (4.3)عندما تكون القيمة المفترضة لـ $\beta = 0.5$ و $\lambda = 2$ بافتراض ان قيمة λ قيمة ثابتة , نلاحظ بشكل عام بان مقدر بيز للمعلمة β عند استعمال طريقة بيزعندما يكون التوزيع الاولي المضاعف لمعلمة القياس β يخضع:-

- لمقلوب التوزيع الاسي- توزيع Levy بالمعلمتين $(\alpha\ ,\ b)$,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 0.5$,وان قيمة $(\hat{\beta})$ تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة b عند ثبوت قيمة المعلمة α لكل حجم عينة.في حين تكون متناقصة بزيادة قيمة α عند ثبوت قيمة المعلمة b لكل حجم عينة.
- لمقلوب التوزيع الاسي – توزيع كامبل من النوع الثاني بالمعلمتين $(\alpha\ , b_1)$ وان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 0.5$,.وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة b_1 عند ثبوت قيمة المعلمة α لكل حجم عينة. في حين تكون متناقصة بزيادة قيمة α عند ثبوت قيمة المعلمة b_1 لكل حجم عينة.
- لتوزيع Levy– توزيع كامبل من النوع الثاني بالمعلمتين($b,\ b_1$) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 0.5$,وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة b عند ثبوت قيمة المعلمة b_1 لكل حجم عينة. في حين تكون متناقصة بتناقص قيمة b_1 عند ثبوت قيمة المعلمة b لكل حجم عينة.
- لمقلوب التوزيع الاسي –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين $(\alpha\ , c)$,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 0.5$, عندما تكون قيمة c=3,5 ,وان قيمة $(\hat{\beta})$ تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة c ,عدا الحالة التي تكون فيها قيمة c=1 لحجوم العينات اكبر من 50 عند ثبوت قيمة المعلمة α لكل حجم عينة , اذ تكون القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 0.5$, .
- لتوزيع Levy –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين($b,\ c$) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 0.5$,وان قيمة $(\hat{\beta})$ تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة c ,عدا قيمة c=3 عند ثبوت قيمة المعلمة b لكل حجم عينة.
- لتوزيع كامبل من النوع الثاني –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين($b_1,\ c$) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 0.5$,وان قيمة $(\hat{\beta})$ تقترب من قيمة β بزيادة n.

وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة c ,عدا الحالة التي تكون فيها قيمة $c=3$ عند ثبوت قيمة المعلمة b_1 لكل حجم عينة.

يعد مقدر بيز للمعلمة β ($\hat{\beta}$) الأفضل عندما يكون التوزيع الاولي المضاعف لمعلمة القياس β يخضع لتوزيع Levy –توزيع غير معلوماتية عندما تكون القيم المفترضة لمعلمتين التوزيع مساوية لـ ($b=3$, $c=3$) مقارنة ببقية المقدرات المستحصلة باستعمال بقية التوزيعات الاولية المضاعفة ,وفقا لمقياس اقل قيمة للمعيار MSE ولكل إحجام العينات.

ونلاحظ من الجدول (4.4) عندما تكون القيمة المفترضة لـ $\beta = 2$ و $\lambda = 2$ افتراض إن قيمة λ قيمة ثابتة, نلاحظ بشكل عام بان مقدر بيز للمعلمة β عند استعمال طريقة بيز عندما يكون التوزيع الأولي المضاعف لمعلمة القياس β يخضع:-

- لمقلوب التوزيع الاسي– توزيع Levy بالمعلمتين (α, b) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β ($\hat{\beta}$)تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 2$ عموما ,وان قيمة ($\hat{\beta}$)تقترب من قيمة β بزيادة n. وتزداد قيمة المعيار MSE بتناقص قيمة المعلمة b عند ثبوت قيمة المعلمة α لكل حجم عينة.
- لمقلوب التوزيع الاسي – توزيع كامبل من النوع الثاني بالمعلمتين (α, b_1) فان القيم المقدرة للمعلمة β ($\hat{\beta}$)تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 2$ عدا عندما تكون قيمة $b_1=4$, إذ تكون اكبر من قيمة β. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بتناقص قيمة المعلمة b_1 عدا عندما تكون قيمة $b_1=3$, عند ثبوت قيمة المعلمة α لكل حجم عينة.
- لتوزيع Levy– توزيع كامبل من النوع الثاني بالمعلمتين (b, b_1) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β ($\hat{\beta}$)تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 2$.وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة b عند ثبوت قيمة المعلمةb_1 لكل حجم عينة. في حين تكون متناقصة بتناقص قيمة b_1 عند ثبوت قيمة المعلمة b لكل حجم عينة.
- لمقلوب التوزيع الاسي –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين (α, c) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β ($\hat{\beta}$)تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 2$,وان قيمة ($\hat{\beta}$)تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة c ,عند ثبوت قيمة المعلمة α لكل حجم عينة.
- لتوزيع Levy –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين(b, c), فان القيم المقدرة للمعلمة β ($\hat{\beta}$)تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 2$ عندما تكون قيمة $c=3,5$ ولكل حجوم العينات في حين تكون القيم المقدرة للمعلمة β ($\hat{\beta}$)تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 2$ عندما تكون فيها قيمة $c=1$ ولكل حجوم

العينات, وان قيمة $(\hat{\beta})$ تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة c عدا الحالة التي تكون فيها قيمة c=3 عند ثبوت قيمة المعلمة b عند ثبوت حجم العينة.

- لتوزيع كامبل من النوع الثاني –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين(b_1, c), فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 2$ عندما تكون قيمة c=3,5 ولكل حجوم العينات, في حين تكون القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 2$ عندما تكون فيها قيمة c=1 ولكل حجوم العينات ,وان قيمة $(\hat{\beta})$ تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة c عدا الحالة التي تكون فيها قيمة c=3 عند ثبوت قيمة المعلمة b_1 عند ثبوت حجم العينة.

يعد مقدر بيز للمعلمة β $(\hat{\beta})$ الأفضل عندما يكون التوزيع الأولي المضاعف لمعلمة القياس β يخضع لتوزيع كامبل من النوع الثاني –توزيع غير معلوماتية عندما تكون القيم المفترضة لمعلمتين التوزيع مساوية لـ $(b_1 = 3, c = 3)$ مقارنة ببقية المقدرات المستحصلة باستعمال بقية التوزيعات الأولية المضاعفة ,وفقا لمقياس اقل قيمة للمعيار MSE ولكل إحجام العينات

ونلاحظ من الجدول (4.5) عندما تكون القيمة المفترضة لـ $\beta = 1$ و $\lambda = 5$ بافتراض إن قيمة λ قيمة ثابتة, نلاحظ بشكل عام بان مقدر بيز للمعلمة β عند استعمال طريقة بيزعندما يكون التوزيع الأولي المضاعف لمعلمة القياس β يخضع:-

- لمقلوب التوزيع الاسي– توزيع Levy بالمعلمتين (α, b) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 1$ عموما ,وان قيمة $(\hat{\beta})$ تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة b عند ثبوت قيمة المعلمة α لكل حجم عينة.
- لمقلوب التوزيع الاسي – توزيع كامبل من النوع الثاني بالمعلمتين (α, b_1) فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 1$. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة b_1 ,عند ثبوت قيمة المعلمة α لكل حجم عينة.
- لتوزيع Levy– توزيع كامبل من النوع الثاني بالمعلمتين(b, b_1) , فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 1$.وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة b عند ثبوت قيمة المعلمة b_1 لكل حجم عينة. في حين تكون متناقصة بتناقص قيمة b_1 عند ثبوت قيمة المعلمة b لكل حجم عينة.

- لمقلوب التوزيع الاسي –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين (α, c) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β ($\hat{\beta}$)تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 1$ عموما ,وان قيمة($\hat{\beta}$)تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة c ,عند ثبوت قيمة المعلمة α لكل حجم عينة.
- لتوزيع Levy –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين (b, c) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β ($\hat{\beta}$)تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 1$ عندما تكون قيمة المعلمة c=3,5 , في حين تكون المقدرة للمعلمة β ($\hat{\beta}$)تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 1$ عندما تكون فيها قيمة c=1 ولكل حجوم العينات , وان قيمة($\hat{\beta}$)تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة c ,عدا الحالة التي تكون فيها قيمة c=3 بثبوت قيمة المعلمة b وحجم عينة.
- لتوزيع كامبل من النوع الثاني –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين(b_1, c) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β ($\hat{\beta}$)تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 1$ عندما تكون قيمة المعلمة c=1,3 , في حين تكون القيم المقدرة للمعلمة β ($\hat{\beta}$)تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 1$ عندما تكون فيها قيمة c=5 ولكل حجوم العينات , وان قيمة($\hat{\beta}$)تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بتناقص قيمة المعلمة c ,عدا الحالة التي تكون فيها قيمة c=3 بثبوت قيمة المعلمة b_1 وحجم عينة.

يعد مقدر بيز للمعلمة β ($\hat{\beta}$) الأفضل عندما يكون التوزيع الأولي المضاعف لمعلمة القياس β يخضع لتوزيع كامبل من النوع الثاني –توزيع غير معلوماتية عندما تكون القيم المفترضة لمعلمتين التوزيع مساوية لـ b_1=3, c=5 ()مقارنة ببقية المقدرات المستحصلة باستعمال بقية التوزيعات الأولية المضاعفة ,وفقا لمقياس اقل قيمة للمعيار MSE ولكل إحجام العينات.

ونلاحظ من الجدول (4.6)عندما تكون القيمة المفترضة لـ$\beta = 5$و $\lambda = 5$بافتراض ان قيمة λ قيمة ثابتة , نلاحظ بشكل عام بان مقدر بيز للمعلمة β عند استعمال طريقة بيزعندما يكون التوزيع الاولي المضاعف لمعلمة القياس βيخضع:-

- لمقلوب التوزيع الاسي– توزيع Levy بالمعلمتين (α, b) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β ($\hat{\beta}$)تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 5$عموما ,وان قيمة($\hat{\beta}$)تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بتناقص قيمة المعلمة b عند ثبوت قيمة المعلمة α لكل حجم عينة.

- لمقلوب التوزيع الاسي – توزيع كامبل من النوع الثاني بالمعلمتين (α, b_1) فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 5$. وعموما تكون قيمة المعيار MSE تزداد بتناقص قيمة b_1 , وزيادة قيمة المعلمة α لكل حجم عينة.
- لتوزيع Levy– توزيع كامبل من النوع الثاني بالمعلمتين(b, b_1) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 5$,عدا الحالة التي تكون فيها حجوم العينات كبيرة ($n>100$) عند القيمتين b=3,4 . وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بتناقص قيمة المعلمة b عند ثبوت قيمة المعلمة b_1 لكل حجم عينة.
- لمقلوب التوزيع الاسي –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين (α, c) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 5$ عموما ,وان قيمة $(\hat{\beta})$ تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تكون قيمة المعيار MSE متزايدة بزيادة قيمة المعلمة c بثبوت قيمة المعلمة α لكل حجم عينة.
- لتوزيع Levy –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين(b, c), فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 5$ عندما تكون قيمة c=3,5 في حين تكون فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 5$ عندما تكون قيمة c=1 لاحجام العينات الكبيرة والتي تكون اكبر من 50, وان قيمة $(\hat{\beta})$ تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة c ,عدا قيمة c=3 بثبوت قيمة المعلمة b لكل حجم عينة.
- لتوزيع كامبل من النوع الثاني –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين(b_1, c) ,فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اقل من القيمة المفترضة لـ $\beta = 5$ عندما تكون قيمة c=3,5 في حين تكون فان القيم المقدرة للمعلمة β $(\hat{\beta})$ تكون اكبر من القيمة المفترضة لـ $\beta = 5$ عندما تكون قيمة c=1 لاحجام العينات الكبيرة والتي تكون اكبر من 50 ,وان قيمة $(\hat{\beta})$ تقترب من قيمة β بزيادة n. وعموما تزداد قيمة المعيار MSE بزيادة قيمة المعلمة c ,عدا قيمة c=3 بثبوت قيمة المعلمة b_1 لكل حجم عينة.

يعد مقدر بيز للمعلمة β $(\hat{\beta})$ الأفضل عندما يكون التوزيع الاولي المضاعف لمعلمة القياس β يخضع لمقلوب التوزيع الاسي– توزيع Levy بالمعلمتين (α, b) عندما تكون القيم المفترضة لمعلمتين التوزيع مساوية لـ $(\alpha = 2, b = 3)$ مقارنة ببقية المقدرات المستحصلة باستعمال بقية التوزيعات الأولية المضاعفة ,وفقا لمقياس اقل قيمة للمعيار MSE ولكل إحجام العينات.

5. الاستنتاجات

أهم الاستنتاجات التي تم التوصل إليها من خلال نتائج البحث وبشكل عام, نلاحظ بان أفضل تقدير باستعمال أسلوب بيز لمعلمة القياس β ($\hat{\beta}$)لتوزيع Nakagami بافتراض إن قيمة λ قيمة ثابتة ,وفقا لمقياس اصغر قيمة لـ MSE ولكل إحجام العينات مقارنة ببقية المقدرات المستحصلة باستعمال بقية التوزيعات الأولية المضاعفة, عندما يكون التوزيع الأولي المضاعف يخضع

- لتوزيع كامبل من النوع الثاني –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين (b_1, c) عند قيم المعلمتين $(b_1 = 3, c = 5)$,عندما تكون القيمة المفترضة لـ$\beta = 0.5$ و$\lambda = 1.5$ وكذلك لـ$\beta = 1$ و$\lambda = 5$.وعند قيم المعلمتين $(b_1 = 3, c = 3)$,عندما تكون القيمة المفترضة لـ$\beta = 2$ و$\lambda = 2$.
- لمقلوب التوزيع الاسي – توزيع كامبل من النوع الثاني بالمعلمتين (α, b_1) عند قيم المعلمتين $(\alpha = 3, b_1 = 4)$,عندما تكون القيمة المفترضة لـ$\beta = 3$ و$\lambda = 1.5$.
- لتوزيع Levy –توزيع غير معلوماتية بالمعلمتين (b, c) عند قيم المعلمتين $(b = 3, c = 3)$ عندما تكون القيمة المفترضة لـ$\beta = 0.5$ و$\lambda = 2$.
- لمقلوب التوزيع الاسي– توزيع Levy بالمعلمتين (α, b) عند قيم المعلمتين $(\alpha = 2, b = 3)$,عندما تكون القيمة المفترضة لـ$\beta = 5$ و$\lambda = 5$.

6. التوصيات

استنادا لما توصلنا إليه من تجارب المحاكاة نوصي الباحثين الأخذ بنظر الاعتبار الطرق المتقدم ذكرها والتي أعطت اصغر قيمة لـ MSE لإغراض تقدير معلمة القياس لتوزيع Nakagami .

References

1. Abdi, A. and Kaveh, M., (2000). 'Performance comparison of three different estimators for the Nakagami m parameter using Monte Carlo simulation'. IEEE Communications Letter s, 4, 119- 121.
2. Ahmad, I., Rehman, S.-ul, (2015). 'Parameters Estimation of Nakagami Probability Distribution Using Methods of L. Moments', NUST Journal of Engineering Sciences, Vol. 8, No. 1, pp. 10-13.
3. Ahmad, K., Ahmad, S. P., and Ahmed, A. (2016). 'Classical and Bayesian Approach in Estimation of Scale Parameter of Nakagami Distribution', Hindawi Publishing Corporation Journal of Probability and Statistics Volume 2016, Article ID 7581918, 8 pages.
4. Bickel, P.J. & Doksum, K. A., (1977). Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics. Holden- Day, Inc., San Francisco.
5. Bouhlel, N., Sevestre, G.S. and Graffigne, C., (2006). ' New markov random field model based on Nakagami for modeling ultrasound rf envelope',14th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2006), Florence, Italy, September 4-8, 2006.
6. Cheng, J. and Beaulieu, N. C., (2001). ' Maximum- likelihood based estimation of the Nakagami m parameter ', IEEE Communications Letters, vol. 5, No. 3, pp.101-103.
7. Huang, Li-Fei, and Lin, Jen-Jen (2016).'The estimation of the m parameter of the Nakagami distribution'. Wseas Transactions on Biology and Biomedicine. Vol. 13, E-ISSN: 2224-2902.
8. Radha, R.K. & Vekatesan, P., (2015). 'On the double prior selection for the parameter of Maxwell distribution', International Journal of Scientific & Engineering Research, Volume 4, Issue 5. pp, 1238- 1241.
9. Ronak M. Patel and Achyut C. Patel (2017).'The Double Prior Selection for the Parameter of Exponential Life Time Model under Type II Censoring'.Journal of Modern Applied Statistical Methods. Vol. 16, No. 1, 406-427.
10. Schwartz, J., Gowdin, T. R. and Giles, E. D., (2011). ' Improved maximum likelihood estimation of the shape parameter in the Nakagami distribution', Department of Economics, University of Victoria. Econometrics Working Paper EWP1109, ISSN 1485-6441.
11. Singh S. K., Singh U., Vishwakarma, P. K. and Yadav, A. S (2015). 'On the estimation of stress strength reliability parameter of inverted exponential distribution', International Journal of Scientific World, 3 (1) 98-112.
12. Yaseen, W., and Feroze, N., (2015), 'Posrerior analysis of Nakagami Distribution under different Loss functions'Sci.Int.(Lahore),27(3),1819-1824.
13. Zaka, A. and Akhter, A.S. (2014). ' Bayesian Approach in Estimation of Scale Parameter of Nakagami Distribution'. Pak.j.stat.oper.res. Vol.X, No.2, pp217-2