استخدام خوارزمية طريقة تطوير مولد قطع المستوي لإيجاد الحل العددي لمسائل البرمجة الكسرية

أ.م:عباس أحمد حسن * م.م: أسراء هادي حسن*

تاريخ التسلم: 2006/7/5
تاريخ القبول:2007/11/1

الخلاصة

هنالك عدة طرق لحل مسائل البرمجة الكسرية يتم من خلالها الحصول على الحل الأمثل للمسألة حيث تكون قيم المتغيرات غالباً أعداد كسرية وليست أعداد صحيحة لكن عندما تكون هنالك شروط في المسألة تتطلب كون الحل الناتج هو الحل العددي الأمثل أي أن تكون قيم المتغيرات الناتجة قيم عددية صحيحة عندها سوف نلجأ إلى طريقة نحصل من خلالها على الحل العددي للمسألة وهذا هو موضوع البحث حيث سنستخدم خوارزمية طريقة (تطوير مولد قطع المستوي لحل مسائل البرمجة الخطية العددية MSCPA) لإيجاد الحل العددي لمسائل البرمجة الكسرية هذا بعد أن نلقي نظرة على مفهوم البرمجة الكسرية والبرمجة بالأعداد الصحيحة .

Abstract

There are many methods for solving Fractional Programming problems that getting the optimal solution of the problem where the values of variables are fractional numbers not integer numbers, But when there are conditions in the problem that requires the result is optimal integer solution, that is the resulted variables values was numerical integer, At that time we must turn to a method that we get from it the integer solution of the problem. That is the subject of the research where we will employ an algorithm of the method (Modify Surrogate Cutting Plane to solve linear integer programming problems) to find integer solution of Fractional Programming problems that after getting a view at Fractional Programming and Integer Programming.

1- البرمجة الكسرية Fractional Programming

أذا كانت دالة الهدف عبارة عن نسبة بين دالتين خطيتين وكانت قيود المسألة خطية ومتغيراتها غير سلبية تدعى المسألة حينئذ بمسألة برمجة دوال الهدف الكسرية Fractional Linear Programming FLP.) ويمكن التعبير عن مسألة البرمجة الكسرية بالنموذج الرياضي التالي:

$$MaxZ = \frac{cx+\alpha}{dx+\beta}$$

S.T ....(*)

$$Ax \le b$$

$$x \ge 0$$

حيث أن:-

x : يمثل متجه المتغيرات العددية (الحقيقية غير السالبة) لدالة الهدف وقيود النموذج الرياضي.

c: تمثل معاملات المتغيرات(x) في دالة هدف البسط.

d : تمثل معاملات المتغيرات(x) في دالة هدف المقام.

α : كمية ثابتة (الحد المطلق) في دالة هدف البسط .

β : كمية ثابتة (الحد المطلق) في دالة هدف المقام .

A: تمثل مصفوفة معاملات المتغيرات لقيود المسألة.

* قسم العلوم التطبيقية/الجامعة التكنولوجية.

https://doi.org/10.30684/ etj.29.4.14
University of Technology-Iraq, Baghdad, Iraq/2412-0758

b : كمية ثابتة تمثل مصفوفة القيم المطلقة لقيود المسألة.

ولحل المسألة الرياضية(*) هناك شرطان يجب توفرهما:

1- $dx + \beta \neq 0$ ، يمثل هذا الشرط وجود قيمة معرفه للدالة $Z(x)$.

2- $dx + \beta = \phi(cx + \alpha)$ ، وهذا شرط اعتماد $Z(x)$ على X حيث أن ϕ كمية ثابتة.

فإذا أستوفى النموذج الرياضي(*) على هذه الشروط فيمكن حل المسألة بعدة طرق تستخدم لحل مسائل البرمجة الكسرية حيث سنتطرق إلى إحدى هذه الطرق كتوضيح لمفهوم البرمجة الكسرية .

الطريقة التكميلية المطورة لحل مسائل البرمجة الكسرية.
Complementary Development Method to Solve FLP.

وهي إحدى الطرق المستخدمة لحل مسائل البرمجة الكسرية حيث يتم الحصول على الحل الأمثل للمسألة باستخدام عدة خطوات للحل مستعينة بجداول السمبلكس المبسط ،وللتوضيح نستعرض هذه الخطوات:

خطوات إيجاد الحل لمسائل البرمجة الكسرية باستخدام الطريقة التكميلية المطورة.

1- نجزئ دالة الهدف الكسرية إلى دالتين خطية تمثل الأولى دالة البسط والثانية دالة المقام، ولكي تكون قيمة دالة الهدف أعظم مايمكن يجب أن تكون دالة البسط أكبر مايمكن($MaxZ_1$) بينما تكون دالة المقام أقل مايمكن($MinZ_2$) .

2- يتم استخراج دالة MaxZ* من حاصل طرح دالة المقام من دالة البسط ،ثم توضع هذه الدالة في نموذج رياضي مكون من قيود المسألة الأصلية بالإضافة إلى شروط عدم السالبية ،ولحل مسألة البرمجة الخطية الناتجة نذهب للخطوة (3).

3- نحول النموذج الرياضي إلى الصيغة القياسية بإضافة المتغيرات المهملة(Si) ،بعدها يتم حل المسألة باستخدام طريقة السمبلكس المبسط وعند الحصول على نتائج لقيم x_j يتم تعويضها بدالة الهدف الأصلية وبذلك نستخرج قيمة MaxZ* .

4- يتم مقارنة قيمة MaxZ* الناتجة مع قيمة Z في الجدول السابق فإذا كانت القيمة الجديدة أكبر من القيمة السابقة نستمر بالحل، أما إذا كانت أقل من لقيمة السابقة نتوقف وتكون بذلك قيم x_j القديمة هي الحل الأمثل للمسألة.

2- البرمجة بالأعداد الصحيحة
Integer Programming

يمكن أن نعبر عن مسألة البرمجة الخطية بمجموعة من القيود الخطية والتي تكون على شكل متباينات مع دالة هدف خطية. أن مسائل البرمجة الخطية التي تشترط أن تكون جميع متغيراتها ذات قيم عددية صحيحة تدعى بمسائل البرمجة العددية أو **البرمجة بالأعداد الصحيحة** وموضوع بحثنا هو إيجاد الحل العددي لمسائل البرمجة الكسرية باستخدام طريقة تطوير مولد قطع المستوي لحل مسائل البرمجة الخطية العددية(MSCPA) ولمعرفة خطوات إيجاد الحل العددي لمسائل البرمجة الكسرية سوف نستعرض خوارزمية طريقةMSCPA لكي يتسنى لنا استخدامها فيما بعد .

خوارزمية طريقة تطوير مولد قطع المستوي (MSCPA).

1- نحول مسألة البرمجة الخطية إلى الصيغة القياسية وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات بإضافة المتغيرات المهملة (Si) إلى قيود المسألة بمعدل متغير واحد لكل قيد ، بعدها نكون جدول الحل الابتدائي للمسألة ثم نذهب إلى الخطوة (2).

2- يتم اختيار العمود المولد (عمود المتغير الداخل) والذي يحمل أكبر أشارة سالبة في حالة التعظيم(MaxZ) وأكبر قيمة موجبة في حالة التصغير(MinZ)،إذا لم يتحقق ذلك فالحل الموجود هو الحل الأمثل وبذلك نتوقف، وبخلافه نذهب للخطوة(3).

3- يتم اختيار السطر المولد(سطر المتغير الخارج) والذي يمثل أقل ناتج قسمة قيم عمود الحلول الأساسية (B) على قيم عمود المتغير الداخل،إن العنصر الذي ينتج من تقاطع العمود المولد مع السطر المولد يسمى **بمحور الارتكاز،** بعدها بقسمة عناصر السطر المولد على قيمة محور الارتكاز وأخذ دالة العدد الصحيح لكل مقدار ينتج القطع الأول(Sc1) ،أما العنصر الناتج من تقاطع العمود المولد مع سطر القطع المولد يسمى **بعنصر المحور** ،وبإجراء الحسابات التالية على الجدول الأول يتم الوصول إلى جدول جديد وهي كما يلي :

أ-إذا كانت قيمة عنصر المحور في سطر القطع المولد تساوي (1) فأن قيم العمود المولد في الجدول الجديد تكون نفس القيم القديمة مضروبة (1-).أما باقي قيم الجدول الجديد فتحسب من العلاقة التالية:

$$a(i,j)_{new} = a(i,j) - a(r,j) * a(i,c)$$

$i = 1,2,\ldots,n+m+1$

$j = 1,2,\ldots,n+1$

حيث أن:-

r : يمثل رقم سطر القطع المولد(r=n+m+2).

c : يمثل رقم العمود المولد في الجدول.
n : يمثل عدد متغيرات المسألة.
m : يمثل عدد قيود المسألة.

ب- أما أذا كانت قيمة عنصر المحور في سطر القطع المولـد تساوي (1-) فأن قيم العمود المولد في الجدول الجديد تكون نفسها وباقي قيم الجدول نحصل عليها باسـتخدام العلاقـة السابقة.

فإذا كانت قيم دالة الهدف الناتجة في الجدول الجديد $(c_j \geq 0)$ في حالة التعظيم نتوقف لأننا قد وصلنا إلى الحـل الأمثـل للمسألة ، وبخلافه نعود للخطوة (2).

3- أيجاد الحل العددي لمسائل البرمجة الكسرية

Finding Integer Solution to Fractional Programming Problems

عندما تكون لدينا دالة هدف عبارة عن دالة كسرية وشروط في المسألة تتطلب كون الحل الناتج هو الحـل العـددي الأمثـل بالأضافه إلى شروط عدم السالبية سوف نسـتخدم الخطـوات التالية لإيجاد الحل لهذه المسألة.

خطوات إيجاد الحل العددي لمسائل البرمجة الكسرية

1- نحول مسألة البرمجة الكسرية إلى مسألة برمجة خطيـة ويتم ذلك بتحويل دالة الهدف الكسرية إلى دالتين خطيـة دالة البسط ودالة المقام كما في الخطـوة رقـم (1) مـن خطوات الحل باستخدام الطريقة التكميلية المطورة لحـل مسائل البرمجة الكسرية.
2- يتم استخراج دالة *MaxZ من حاصل طرح دالة المقام من دالة البسط وتوضع هذه الدالة في نمـوذج رياضـي مكون من قيود المسألة الأصلية بالإضافة إلى شروط عدم السالبية .
3- تحول المسألة إلى ألصيغه القياسية بإضـافة المتغيـرات المهملة، بعدها بتطبيق خوارزمية طريقة تطـوير مولـد قطع المستوي لحل مسائل البرمجة العدديـة (MSCPA) يتم الحصول على الحل العددي الأمثل للمسألة.
ولتوضيح هذه الخطوات نستعرض الأمثلة التالية:

مثال(3-1):

$$MaxZ = \frac{3x_1 + 2x_2 + 1}{x_1 + x_2 + 1}$$

S.T

$$5x_1 + x_2 \leq 2$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 , x_2 (متغيرات ذات قيم عددية صحيحة)

الحل:

لكي تكون قيمة دالة الهدف (Z) أعظم ما يمكن يجب أن يكون البسط أكبر مايمكن والمقام أقل مايمكن حسب الخطوة(1) مـن خطوات الحل باستخدام الطريقة التكميليـة المطـورة ، لـذاك سوف نجزئ المسألة بالشكل التالي:

$$MaxZ_1 = 3x_1 + 2x_2 + 1$$

S.T

$$5x_1 + x_2 \leq 2$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 , x_2 (متغيرات ذات قيم عددية صحيحة)

$$MinZ_2 = x_1 + x_2 + 1$$

S.T

$$5x_1 + x_2 \leq 2$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 , x_2 (متغيرات ذات قيم عددية صحيحة)

وبتحويل دالة Z_2 إلى صيغة التعظيم نحصل على:

$$MaxZ_2 = -x_1 - x_2 - 1$$

S.T

$$5x_1 + x_2 \leq 2$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 , x_2 (متغيرات ذات قيم عددية صحيحة)

وبطرح دالة المقام من دالة البسط نستخرج $MaxZ^*$ كمـا مبين :

$$MaxZ^* = 2x_1 + x_2$$

S.T

$$5x_1 + x_2 \leq 2$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 , x_2 (متغيرات ذات قيم عددية صحيحة)

الآن نحول النموذج الرياضي أعلاه إلـى الصـيغة القياسـية بإضافة المتغيرات (Si) .

$$MaxZ^* - 2x_1 - x_2 \qquad = 0$$

S.T

$$5x_1 + x_2 + S_1 \qquad = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 + \qquad S_2 = 0$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
x_1 , x_2 (متغيرات ذات قيم عددية صحيحة)

وباستخدام جداول السمبلكس المعدل يتم وضـع المسـألة فـي جدول رقم (1) بالشكل التالي:

	B	**SC$_1$**	**T$_2$**
Z*	0	2	-1
X$_1$	0	1	0
X$_2$	0	0	-1
S$_1$	2	-5	1
S$_2$	3	-2	3

جدول(1)

ألان سوف نطبق خوارزمية طريقة MSCPA على الجـدول رقم(1) حيث سنختار عمود المتغير T_1 كعمود للمتغير الداخل وبقسمة قيم عمود B على قيم عمود المتغير الداخل وأخذ أقـل ناتج قسمة ((Min(2/5,3/2) نحدد سـطر المتغيـر الخـارج (السطر المولد) حيث سيكون المتغير S_1 هو المتغير الخـارج وبذلك سيكون محور الارتكاز(5) ، ولاستخراج القطـع الأول Sc_1 نقسم قيم السطر المولد S_1 على قيمة محور الارتكاز(5) مع اخذ دالة العدد الصحيح لكل مقدار لينتج بذلك القطع الأول Sc_1 وكما مبين أدناه :

Sc$_1$=([2/5],[5/5],[1/5])=(0,1,0)

حيث[.] تمثل دالة العدد الصحيح، وبذلك سيصبح جـدول (1) كمـــا مبين:

	B	**T$_1$**	**T$_2$**
Z*	0	-2	-1
X$_1$	0	-1	0
X$_2$	0	0	-1
S$_1$	2	(5)	1
S$_2$	3	2	3
Sc$_1$	0	((1))	0

بما أن قيمة عنصر المحور تساوي(1) كما مبين في الجـدول (1) لذلك فأن قيم عمود (T1) في الجدول الجديد تكون نفـس القيم مضروبة (-1) أما باقي القيم فتحسب من العلاقة التالية:

$$a(i,j)_{new} = a(i,j) - a(r,j) * a(i,c)$$
$$i = 1,2,\ldots,n+m+1$$
$$j = 1,2,\ldots,n+1$$

حيث أن c=2، r=6، n=2، m=2

فعلى سبيل المثال أن قيمة a(4,1) الجديدة تكون:

$$a(4,1)_{new} = a(4,1) - a(6,1) * a(4,2) = 2 - 0 * 5 = 2$$

وبذلك ينـتج جدول (2)كما يلي:

	B	**T$_1$**	**T$_2$**
Z*	0	-2	-1
x$_1$	0	-1	0
x$_2$	0	0	-1
S$_1$	2	5	1
S$_2$	3	2	3

جدول(2)

نلاحظ إننا لم نحصل على الحل الأمثل في الجدول (2) لـذلك سنعود للخطوة (2) من خوارزمية طريقة (MSCPA) ونختار T_2 عمود للمتغير الداخل و S_2 سطر للمتغير الخـارج حيـث ستكون قيمة محور الارتكاز(3) وبذلك سنحصل على القطـع الثاني(Sc_2) وكما مبين في الجدول أدناه:

جدول(3)

	B	**SC$_1$**	**SC$_2$**
Z*	1	1	1
X$_1$	0	1	0
X$_2$	1	-1	1
S$_1$	1	-4	-1
S$_2$	0	1	-3

وبأجراء نفس الخطوات السابقة نحصل على جدول (3).

إن عمود B يشير إلى إن الحل الناتج هو الحل العددي الأمثـل للمسألة لأن القيم الناتجة في صف دالة الهدف جميعها أعـداد موجبة وبذلك فأن الحل العددي الأمثل للمسألة هو:

$X_1=0$

$X_2=1, Z^*=1$

وبذلك فأن قيمة MaxZ ستكون :

$$MaxZ=\frac{3*0+2*1+1}{0+1+1}=\frac{3}{2}=1.5$$

مثال (3-2) :

$$MaxZ = \frac{2x_1+6x_2}{3x_1+4x_2+1}$$

S.T

$$3x_1+5x_2 \geq 15$$
$$x_1+x_2 \leq 9$$
$$6x_1+4x_2 \geq 24$$
$$x_1+x_2 \leq 7$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 , x_2 (متغيرات ذات قيم عددية صحيحة)

الحل:

بتطبيق الخطوة رقم (1) و(2) من خطوات إيجاد الحل العددي الأمثل لمسائل البرمجة الكسرية يتم استخراج دالـة MaxZ* من طرح دالة البسط من دالة المقام وهي كما يلي:

$$MaxZ^* = -x_1+2x_2-1$$

لذاك فأن المسألة ستصبح بالشكل التالي:

$$MaxZ^* = -x_1+2x_2-1$$

S.T

$$3x_1+5x_2 \geq 15$$
$$x_1+x_2 \leq 9$$
$$6x_1+4x_2 \geq 24$$
$$x_1+x_2 \leq 7$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 , x_2 (متغيرات ذات قيم عددية صحيحة)

$$\therefore\ MaxZ^* = -x_1+2x_2-1$$

S.T

$$-3x_1-5x_2 \leq -15$$
$$x_1+x_2 \leq 9$$
$$-6x_1-4x_2 \leq -24$$
$$x_1+x_2 \leq 7$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 , x_2 (متغيرات ذات قيم عددية صحيحة)

الآن بتطبيق خوارزمية طريقة MSCPA يمكن أن نسـتخرج الحل العددي الأمثل للمسألة بجدولين كما مبين:

جدول(1)

	B	T_1	T_2
Z*	-1	1	-2
X_1	0	-1	0
X_2	0	0	-1
S_1	-15	-3	-5
S_2	9	1	1
S_3	-24	-6	-4
S_4	7	1	(1)
Sc_1	7	1	((1))

جدول(2)

	B	T_1	SC_1
Z*	13	3	2
X_1	0	-1	0
X_2	7	1	1
S_1	20	2	5
S_2	2	0	-1
S_3	4	2	-4
S_4	0	0	-1

وكما نلاحظ فأن الحل العددي الأمثل للمسألة سيكون كالأتي:

$X_1=0$

$X_2=7$

$Z^*=13$

وبذلك فأن قيمة MaxZ ستكون :

$$MaxZ== \frac{42}{29}=1.4482759$$

4- ألاستنتاجات Conclusions

من خلال استخدام طريقة تطوير مولد قطع المستوي لحل مسائل البرمجة العددية (MSCPA) تمكنا من الحصول على النتائج التالية:

1- تم الحصول على الحل العددي الأمثل لمسائل البرمجة الكسرية دون الاستعانة بالحل المستخرج بطرق حل مشاكل البرمجة الخطية(طريقة السمبلكس).

2- إن استخدام جداول السمبلكس المعدل في خوارزمية الحل باستخدام (MSCPA) أضاف سهولة في أجراء العمليات الحسابية وبالتالي إلى سهولة التنقل من جدول إلى أخر.

3- من الملاحظ إن قيمة عنصر المحور في سطر القطع المولد تكون دائما(1) أو(-1) وهذا يحافظ على بقاء القيم في جميع جداول الحل أعداد صحيحة مما يضيف سهولة وسرعة في إيجاد النتائج.

4- عملية إيجاد القطع المولد باستخدام خوارزمية(MSCPA) تكون بسيطة وهذا يسهل علينا الانتقال إلى جدول جديد وبالتالي يمكننا من الوصول إلى الحل العددي الأمثل للمسألة بعدد اقل أو يساوي عدد الجداول باستخدام الطرق الأخرى.

5- ليس هناك شرط يحدد علامة القيود عند تطبيق طريقة (MSCPA) وهذا ما لمسناه في الأمثلة التي تم عرضها حيث تمكنا من إيجاد الحل العددي الأمثل للمسائل الكسرية بنفس عدد الجداول التي نجد فيها الحل غير العددي الأمثل لهذه المسائل أوأقل.

المصادر References

1. أسراء هادي حسن ، "تطوير وبرمجة طريقة مولد قطع المستوي لحل مسائل البرمجة العددية الصحيحة".رسالة ماجستير مقدمة الى قسم العلوم التطبيقية. الجامعة التكنولوجية، 2004.

2. وليد خالد جابر، "دراسة وتحليل طرائق حل مسائل البرمجة الكسرية". رسالة ماجستير مقدمة الى قسم العلوم التطبيقية. الجامعة التكنولوجية، 2004.

3. أ.د.لطفي لويز سيفن، بحوث العمليات، المنهج الكمي لأتخاذ القرارات،دار الجامعات المصرية 1977.

4. Karel lenstra; Fractional Linear Programming, linear time dynamic-programming, Algorithms for new classes of restricted TSPS:

A Computational Study journal on computing, vol. 13, No. 1, winter 2001.

http.//www.Google.com, Fractional Linear programming.

5. Gomory R.E., Gomory's cutting plane method for integer programming. http.//www.som.umd.umich.edu/romagnoil/Gomory.html, 2004

6. Jason I., Integer Programming , 2004 http://ftp.sdsmt.edu/~rwjohnso/Ip.html

7. Michual E. and Harry m., An Advance Start Algorithm for all integer programming, Computer And O.R vol-12 No.3, 1985 .

8. L.Winston, Operation Research Applications and Algorithms WAYNE 1993.

9. Hamdy A.Taha, Operations Research, An Introduction fifth edition, 2000.

10. Prof. Dr. Iosif Kolumb'an., New Interior Point Algorithms in Linear Programming. Advanced Modeling and optimization, volume 5, number 1, 2003.
http.//www.google.com, Fractional Linear programming.

11. J.E.Beasley,Operations Research-Notes, Advanced Linear programming.

http://mscmga.ms.ic.ac.uk/jeb/or/Ipadv.htm ,2005.

12. file://F:\Linear%20Programming \Linear%20 Optimization.htm 2006.