



**Evaluation the Parameters of the Suggestion Truncated Inverse
Weibull Burr type X Distribution using Simulation (with
Practical Application)**

Researcher: Muneer I. hameed
Collage of Computer Science and Mathematics
Tikrit University

muneer.i.hameed35428@st.tu.edu.iq

Assist. Prof. Dr. Mundher Abdullah Khaleel
Collage of Computer Science and Mathematics
Tikrit University

mun880088@tu.edu.iq

Abstract:

We introduce a new extension distribution for Burr type X with two parameters. We called it [0,1] Truncated Invers Weibull Burr Type X Distribution. The new distribution has been expanded to become a four-parameter distribution. Several important properties of the new extension distribution are derived like the quantile function and moment. The maximum likelihood estimation is used to estimate the parameters involved. The distribution was applied to real data, which is the failure times of (50) vehicles in a time of (1000) hours. It gives a better fit compared to several other distributions. The parameters that were estimated were evaluated using simulation.

Keywords: Family of [0,1] Truncated Invers Weibull, moments, maximum likelihood estimation method, Burr distribution.

**تقييم معالم توزيع معكوس ويبل بور العاشر المبتور المقترح باستخدام المحاكاة
(مع تطبيق عملي)**

أ.م.د. منذر عبد الله خليل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة تكريت

الباحث: منير ابراهيم حميد
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة تكريت

المستخلص:

في هذا البحث تم اقتراح توسيعا جديدا لتوزيع بور العاشر ذو المعلمتين وبعنوان [0,1] توزيع معكوس ويبل بور العاشر المبتور، وقد تم توسيع التوزيع الجديد بحيث أصبح توزيعا ذو أربع معلمات. وتم اشتقاق بعض الخواص الاحصائية المهمة من الدالة الموسعة مثل الدالة الكمية والعزوم. وتم استخدام طريقة الامكان الاعظم لتقدير المعلمات. وتم تطبيق التوزيع على بيانات حقيقية وهي عبارة عن اوقات فشل (50) مركباً في زمن قدره (1000) ساعة. واثبت التوزيع الجديد المقترح انه يعطي ملاءمة أفضل مقارنة بالعديد من التوزيعات الأخرى. وتم تقييم المعلمات المقدره باستخدام المحاكاة.

الكلمات المفتاحية: عائلة توزيع معكوس ويبل المبتور، العزم، طريقة الامكان الاعظم، توزيع بور.

١. المقدمة **Introduction**: للتوزيعات الاحصائية فائدة كبيرة كونها تصف ظواهر العالم الحقيقي. لذلك يميل البعض من الاحصائيين الى البحث عن عوائل تمتلك بعض الخصائص الرياضية تضم تحت خيمتها توزيعات يمكن استخدامها في وصف مجموعات من البيانات الحقيقية. يكاد يجمع اغلب الإحصائيين ان اغلب التوزيعات الموجودة لا يمكنها ان تصف كل انواع البيانات الحقيقية وخواصها.

ان هدف البحث الحالي هو توليد توزيع مستمر جديد بإضافة معلمتي شكل اليه ويطلق عليه [0,1] Truncated Invers Weibull Burr. العاشر المبتور. باستخدام العائلة: [0,1] معكوس ويبل المبتورة Type X Distribution ([0,1] TIWBX)، ودراسة جزء من الخصائص الرياضية والاحصائية واثبات انه يمتلك مرونة اكبر وملائمة اكثر للبيانات الحقيقية من التوزيعات السابقة له.

وقد قسم البحث الحالي الى عدة اقسام: مقدمة عن البحث، عرض موجز لبعض الدراسات السابقة، العائلة المستخدمة في توليد التوزيع الجديد (عائلة القطع [0,1] معكوس ويبل المبتور) ([0,1] Truncated Invers Weibull)، كيفية توليد التوزيع الجديد، توسيع الدالتين التراكمية Cdf والكثافة الاحتمالية Pdf، الخصائص الرياضية مثل العزم والاحصاءات المرتبة، تقدير معالم النموذج باستخدام طريقة الامكان الاعظم، التطبيق، المحاكاة والاستنتاجات.

٢. دراسات السابقة **Previous studies**: قدم العديد من الباحثين الكثير من العائلات لتوليد توزيعات جديدة تمتاز بالمرونة. حيث قدمت العائلة "Exponentiated Weibull-H family" من قبل الباحثين (Cordeiro et al., 2011)، و قدم ايضاً (Ristic, M. M., & Balakrishnan, N., 2012) العائلة "Gamma-G family"، والعائلة "Logistic-G family" التي قدمها الباحثان (Torabi & Montazeri 2014)، و قدم الباحثون (Alizadeh et al., 2015) العائلة "The Kumaraswamy marshal-Olkin family" كما اقترح الباحثون (Dias et al., 2016) العائلة "Exponentiated Marshall-Olkin family"، وفي العام التالي قدم الباحثون (Nofal et al., 2017) العائلة الجديدة التي عرفت باسم "generalized transmuted-G family"، وكذلك قدم الباحثون (Alizadeh et al., 2018) عائلة اطلق عليها اسم "Weibull-G family"، وعائلة "The Marshall-Olkin Topp Leone-G family" التي قدمها (Khaleel et al., 2020)، والعائلة "Beta-G family" المقترحة من قبل الباحث (Olanrewaju 2021)، ونذكر اخيراً العائلة المقترحة الجديدة "Exponential-G" من قبل الباحثون (Eghwerido et al., 2022). ابتكر توزيع بور Burr عام (1941) واستمر الجهد البحثي في الاستفادة من مزايا البحث الاصيلي للحصول على مرونة أكثر ووصف لمختلف ظواهر العالم الحقيقي حيث قدموا (Khaleel et al. 2016) دراسة بعنوان "The beta Burr type X distribution properties with application" مستخرجين بعض الخواص الرياضية للتوزيع الجديد. وايضاً قاموا (Khaleel et al., 2016) بتقديم دراسة بعنوان "Some Properties of Gamma Burr Type X Distribution with Application" واستخرجوا بعض الخواص مثل الغاية والدالة الكمية. وقدموا "Beta Burr Type X with Application to Rainfall Data" (Merovci et al., 2017) دراسة بعنوان "Beta Burr Type X with Application to Rainfall Data" واستخرجوا منها بعض الخواص مثل الدالة الكمية والعزوم. كما قدموا ايضاً (Ibrahim et al., 2017) دراسة بعنوان:

"Weibull Burr X Distribution Properties and Application"

حيث قاموا باستخراج بعض الخواص مثل العزوم والدادلة الكمية. وبالمثل الدراسة "New extension of Burr type X distribution properties with application" المقدمة من قبل (Khaleel et al., 2018) واستخرجوا بعض الخواص مثل العزوم. ومن الدراسات السابقة ايضاً دراسة (Ibrahim, N. A., & Khaleel, M. A. (2020) بعنوان "Generalizations of Burr Type X Distribution with Applications" حيث قاموا بتوليد توزيع جديد مستخدمين Beta-G و Gamma-G و Weibull-G وتم تقييم معالم التوزيع باستخدام المحاكاة. وقدموا (Ahmed et al., 2021) دراسة بعنوان "A New Version of the Exponentiated Burr X distribution" واستخرجوا بعض الخواص مثل العزوم والانتروبي. وقدمت الدراسة "A new [0, 1] truncated inverse Weibull rayleigh distribution properties with application to COVID-19" قبل (Khaleel et al., 2022) واستخرجوا دالتي Pdf و Cdf والدادلة الكمية والعزوم والوسيط والانتروبي.

٣. عائلة البتر [0,1] معكوس ويبل المبتور **[0,1] Truncated Invers Weibull**: ان التعميم المقترح لعائلة البتر [0,1] truncated-G family وبدالة توزيع تراكمية (Cdf) ودالة كثافة احتمالية (Pdf) على التوالي وكالاتي (Abid, S. H., & Abdulrazak, R. K. (2017):

$$H(x) = \frac{F[G(x)] - F(0)}{F(1) - F(0)} ; 0 < x < 1 \quad (1)$$

وبما ان $F(0)=0$ فان شكل Cdf:

$$H(x) = \frac{F[G(x)]}{F(1)} ; 0 < x < 1 \quad (2)$$

وبالاشتقاق لدالة Cdf نحصل على دالة Pdf

$$h(x) = \frac{f[G(x)].g(x)}{F(1)} ; 0 < x < 1 \quad (3)$$

وبما ان الشكل الاساسي لدالتي Pdf و Cdf لمعكوس ويبل (Pakungwati, R. M., Widyaningsih, Y., & Lestari, D. (2018, November) هما:

$$F[G(x)] = e^{-\eta[G(x)]^{-\rho}} ; x > 0, \rho, \eta > 0 \quad (4)$$

$$f[G(x)] = \eta\rho e^{-\eta[G(x)]^{-\rho}} [G(x)]^{-\rho-1} g(x) \quad (5)$$

بتعويض (4) في (2) للحصول على Cdf لعائلة [0,1] Truncated Invers Weibull family واختصارا [0,1] TIWG

$$H(x) = \frac{e^{-\eta[G(x)]^{-\rho}}}{e^{-\eta}} \quad (6)$$

وباشتقاق المعادلة الاخيرة نحصل على Pdf للعائلة [0,1] TIWG

$$f(x) = \frac{\eta\rho e^{-\eta[G(x)]^{-\rho}} G(x)^{-\rho-1} g(x)}{e^{-\eta}} \quad (7)$$

٤. التوزيع **[0,1] Truncated Invers Weibull Burr Type X Distribution** ([0,1]TIWBX) المقترح: من المعلوم ان دالتي Pdf و Cdf لتوزيع بور العاشر هما وعلى التوالي:

$$F(x, \gamma, g) = (1 - e^{-(x\gamma)^2})^g \quad (8)$$

$$f(x, \gamma, g) = 2g\gamma^2 x e^{-(x\gamma)^2} (1 - e^{-(x\gamma)^2})^{g-1}; x, \gamma, g > 0 \quad (9)$$

بتعويض المعادلتين (8)، (9) في (6) و (7) على التوالي لاستخراج Pdf و Cdf للتوزيع الجديد ([0,1]TIWBX)

$$F(x; \rho, \eta, \gamma, g) = \frac{e^{-\eta} \left[(1 - e^{-(x\gamma)^2})^g \right]^{-\rho}}{e^{-\eta}} \quad x > 0, \rho, \eta, \gamma, g > 0$$

$$F(x; \rho, \eta, \gamma, g) = \frac{e^{-\eta} (1 - e^{-(x\gamma)^2})^{-\rho g}}{e^{-\eta}} \quad (10)$$

$$f(x; \rho, \eta, \gamma, g)$$

$$= \frac{\rho a e^{-\eta} \left[(1 - e^{-(x\gamma)^2})^g \right]^{-\rho} \left[(1 - e^{-(x\gamma)^2})^g \right]^{-(\rho+1)} (2g\gamma^2 x e^{-(x\gamma)^2}) (1 - e^{-(x\gamma)^2})^{g-1}}{e^{-\eta}}$$

$$= \frac{2\rho\eta g\gamma^2 y e^{-(x\gamma)^2} e^{-\eta} \left[(1 - e^{-(x\gamma)^2})^{-\rho g} \right] \left[(1 - e^{-(x\gamma)^2})^{-g\rho - g + g - 1} \right]}{e^{-\eta}}$$

$$f(x; \rho, \eta, \gamma, g) = \frac{2\rho\eta g\gamma^2 x e^{-(x\gamma)^2} e^{-\eta} (1 - e^{-(x\gamma)^2})^{-g\rho} (1 - e^{-(x\gamma)^2})^{-g\rho - 1}}{e^{-\eta}} \quad (11)$$

تم اختيار قيم مختلفة للمعالم الاربعة وتمت نمذجتها باستخدام برنامج R ومن خلال ملاحظة انماط المنحنيات وجد انها اخذت ثلاثة انماط للتواء؛ التواء اليمين right skewed والتماثل Symmetric او قريب من التماثل ومعكوس الحرف J (reversed-J). ونلاحظ انه عند تثبيت قيم المعلمتين الثانية والرابعة (اقل من واحد) نحصل على الشكل الاسي الاعتيادي، وعند اخذ قيمة للمعلمة الاولى من أكبر من واحد يتغير الشكل بالنسبة للمنحني الى منحني بقمة واحدة والتواءه لليمين.

٥. توسيع دالتي (Pdf, Cdf) للتوزيع [0,1]TIWBX: تم توسيع الدالة التراكمية Cdf ودالة الاحتمال Pdf للتوزيع المقترح وهما المعادلتان (10) و (11) على التوالي لغرض دراسة بعض الصفات والخصائص الاحصائية، ويتم توسيع كلاهما باستخدام مفكوك الصيغة الاسية ومفكوك متسلسلة ذات الحدين لأكثر من مرة وحسب الحاجة حتى نتوصل الى المعادلتين الاتيتين:

$$F(x) = \Omega_{r,n} e^{-n(x\gamma)^2} \quad (12)$$

$$\Omega_{r,n} = \frac{\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\varrho g r + n) (-1)^r \eta^r}{r! n! \Gamma(\varrho g r)}}{e^{-\eta}} \quad \text{حيث ان:}$$

$$f(x) = \Psi_{s,d} x e^{-(d+1)(xy)^2} \quad (13)$$

$$\Psi_{s,d} = \frac{2\varrho \eta g \gamma^2 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \eta^s \Gamma(\varrho g r + g \varrho + 1 + d)}{s! d! \Gamma(\varrho g r + g \varrho + 1)}}{e^{-\eta}} \quad \text{حيث ان}$$

تعتبر كلا المعادلتين (12) و (13) نتائج رئيسية لغرض البحث وتستعمل في ايجاد بعض الخواص الرياضية.

٦. **الخصائص الرياضية Mathematical Properties:** استخرجت بعض الخصائص الرياضية المهمة لتوزيع $[0,1]$ TIWBX، وعلى وجه التحديد دالة الكمية، العزوم، والاحصاءات المرتبة وكما يلي:

أ. دالة الكمية **Quantile Function:**

هي معكوس دالة التوزيع التراكمية Cdf، وتعد طريقة من طرق تحديد دالة الاحتمال. وتعد ضرورية لتوليد البيانات لدراسة المحاكات ولها الصيغة الرياضية التالية Gasthaus et al. (2019).P.2

$$Q(U) = F^{-1}(x) \quad 0 < U < 1 \quad (14)$$

يمكننا ايجادها لتوزيع $[0,1]$ TIWBX المرن كالآتي، بتعويض معادلة (1) في معادلة (14) وباستخدام مجموعة من العمليات الجبرية تم الحصول على:

$$x = \left(\frac{-1}{\gamma^2} \text{Ln} \left\{ 1 - \left[\frac{-1}{\varrho} \text{Ln}(e^{-e u}) \right]^{\frac{-1}{\eta g}} \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

والاخيرة تعد من الصيغ المهمة، ولها استخدامات كإيجاد الوسيط Median والالتواء Skewness والتفلطح Kurtosis. ولإيجاد الوسيط نكتفي بتعويض العدد 0.5 بدلاً عن u في المعادلة (15).

ب. **العزوم Moments:** يعد العزم من الخصائص الرياضية المهمة لإيجاد العديد من الخواص الاحصائية مثل الانحراف المعياري والمتوسط الحسابي والتباين، ويستفاد منه في دراسة منحنى التوزيع التكراري من حيث الالتواء والتفلطح. وتم ايجاد العزم من الدرجة r من العلاقة الآتية اعتماداً على دالة الكثافة الاحتمالية بعد توسيعها:

$$\mu_r = E(x^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)_{[0,1]TIWBX} dx \quad (16)$$

نتعويض (13) في (16):

$$\mu_r = \Psi_{s,d} \int_{-\infty}^{\infty} x^r x e^{-(d+1)(xy)^2} dx$$

نستخدم التحويل $(d+1)(\gamma y)^2$

$$t = (d + 1)(yx)^2 \Rightarrow t = (d + 1)y^2 x^2 \Rightarrow dt = 2(d + 1)y^2 x dx$$

$$x^2 = \frac{t}{(d + 1)y^2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{t}}{y\sqrt{d + 1}} \Rightarrow dx = \frac{dt}{2y\sqrt{d + 1}\sqrt{t}}$$

وبتعويض التحويلات اعلاه في المقدار التالي نحصل على:

$$\Psi \int_0^{\infty} x^{r+1} e^{-(d+1)(xy)^2} dx = \Psi \int_0^{\infty} \left(\frac{\sqrt{t}}{y\sqrt{d+1}} \right)^{r+1} e^{-t} \frac{dt}{2y\sqrt{d+1}\sqrt{t}}$$

$$= \frac{\Psi}{2y^{r+2}(d+1)^{\frac{r+2}{2}}} \int_0^{\infty} t^{\frac{r+1}{2}-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{2y^{r+2}(d+1)^{\frac{r+2}{2}}} \int_0^{\infty} t^{\frac{r}{2}} e^{-t} dt$$

$$= \frac{\Psi}{2y^{r+2}(d+1)^{\frac{r+2}{2}}} \int_0^{\infty} t^{\frac{r+2}{2}-1} e^{-t} dt$$

وباستخدام خاصية التكامل $\Gamma(\eta) = \int_0^{\infty} t^{\eta-1} e^{-t} dx$ نحصل على:

$$\mu_r = \frac{\Psi}{2y^{r+2}(d+1)^{\frac{r+2}{2}}} \Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right) \quad (17)$$

ج. **الاحصاءات المرتبة Order Statistics**: من الادوات الاساسية ذات الاهمية الكبيرة في

الاحصاء هي الاحصاءات المرتبة، ولها استعمالات عديدة في مجالات الحياة كمرقبة الجودة. اذا كانت لدينا العينة (X_1, X_2, \dots, X_n) وتحتوي على n من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتماثلة التوزيع المأخوذة من الدالة التراكمية $F(x)$ ، وكانت لدينا $X_{s:n}$ هي المتغيرات المرتبة تصاعدياً من القيمة الدنيا الى القيمة العليا بحيث تكون اصغر احصاء مرتبة Minimum Order Statistic هي $X_{1:n}$ بينما الاحصاء الثانية الترتيب هي $X_{2:n}$ وصولاً الى اكبر احصاء مرتبة Maximum Order Statistic وهي $X_{n:n}$.

تم ايجاد دالة الكثافة الاحتمالية للاحصاءات المرتبة ذات الرتبة j لتوزيع $([0,1]TIWBX)$ كالآتي:

$$f_{j:n}(x) = \sum_{s=0}^{n-j} k(-1)^s \binom{n-j}{s} [F(x)]^{j+s-1} f(x) \quad (18)$$

$$k = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \quad \text{حيث}$$

وبتعويض المعادلتين ((5) و(6) في المعادلة الاخيرة ((18) يتم الحصول على التالي:

$$f_{j:n}(x) = \sum_{s=0}^{n-j} k(-1)^s \binom{n-j}{s} \left[\frac{e^{-\eta} (1-e^{-(x\gamma)^2})^{-\rho\eta}}{e^{-\eta}} \right]^{j+s-1} * \left[\frac{2\rho\eta\gamma^2 x e^{-(x\gamma)^2} e^{-\eta} (1-e^{-(x\gamma)^2})^{-\rho\eta} (1-e^{-(x\gamma)^2})^{-\rho\eta-1}}{e^{-\eta}} \right] \quad (19)$$

وللحصول على أصغر احصاءة نعوض بـ (j=1) فنحصل على:

$$f_{1:n}(x) = \sum_{s=0}^{n-1} k(-1)^s \binom{n-1}{s} \left[\frac{e^{-\eta} (1-e^{-(x\gamma)^2})^{-\rho\eta}}{e^{-\eta}} \right]^s * \left[\frac{2\rho\eta\gamma^2 x e^{-(x\gamma)^2} e^{-\eta} (1-e^{-(x\gamma)^2})^{-\rho\eta} (1-e^{-(x\gamma)^2})^{-\rho\eta-1}}{e^{-\eta}} \right] \quad (20)$$

وللحصول على أصغر احصاءة نعوض بـ (j=n) فنحصل على:

$$f_{n:n}(x) = n \left[\frac{e^{-\eta} (1-e^{-(x\gamma)^2})^{-\rho\eta}}{e^{-\eta}} \right]^{n-1} * \left[\frac{2\rho\eta\gamma^2 x e^{-(x\gamma)^2} e^{-\eta} (1-e^{-(x\gamma)^2})^{-\rho\eta} (1-e^{-(x\gamma)^2})^{-\rho\eta-1}}{e^{-\eta}} \right] \quad (21)$$

٧. مقدرات الامكان الاعظم (MLE) Maximum Likelihood Estimation: باستخدام طريقة (MLE) تم تقدير المعالم من خلال الاشتقاق الجزئي لدالة الامكان الاعظم للتوزيع بعد ايجادها.

نأخذ عينة عشوائية ... , x_2, x_1, x_n ذات حجم n من التوزيع ([0,1]TIWBX) مع متجه المعالم الغير معروفة $\vartheta = (\rho, \eta, \gamma, \gamma)$

$$f(x; \rho, \eta, \gamma, \gamma) = \frac{2\rho\eta\gamma^2 e^{-(x\gamma)^2} e^{-\eta} (1-e^{-(x\gamma)^2})^{-\rho\eta} (1-e^{-(x\gamma)^2})^{-\rho\eta-1}}{e^{-\eta}} \quad (22)$$

$$L = L\left(\rho, \eta, \gamma, \frac{\gamma}{X_i}\right) = \prod_{i=1}^n f(x)_{[0,1]TIWBX} \quad (23)$$

نأخذ دالة اللوغاريتم لدالة الامكان الأعظم:

$$\begin{aligned} \ln(L) = & n\ln(\varrho) + n\ln(\eta) + n\ln(\gamma) + 2n\ln(\gamma) + \ln \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n (\gamma x)^2 \\ & - \eta(1 - e^{-(x\gamma)^2})^{-\gamma\varrho} \\ & - (\gamma\varrho + 1)\ln \sum_{i=1}^n (1 - e^{-(x\gamma)^2}) - n\eta \quad (24) \end{aligned}$$

نشق جزئياً لكل معلمة:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L)}{\partial \varrho} = & \frac{n}{\varrho} - \eta(1 - e^{-(x\gamma)^2})^{-\gamma\varrho} \ln(1 - e^{-(x\gamma)^2})^\gamma \\ & - \gamma \ln \left(\sum_{i=1}^n (1 - e^{-(x\gamma)^2}) \right) \quad (25) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \eta} = \frac{n}{\eta} + (1 - e^{-(x\gamma)^2})^{-\gamma\varrho} - n \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L)}{\partial \gamma} = & \frac{2n}{\varrho\gamma} - 2 \sum_{i=1}^n (x)^2 \gamma - 2\gamma\varrho\eta\gamma x^2 e^{-(x\gamma)^2} (1 - e^{-(x\gamma)^2})^{-(\gamma\varrho+1)} \\ & + \frac{2(\gamma\varrho + 1)x^2\gamma}{\sum_{i=1}^n (1 - e^{-(x\gamma)^2})} e^{-(x\gamma)^2} \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L)}{\partial \gamma} = & \frac{n}{\gamma} + (1 - e^{-(x\gamma)^2})^{-\gamma\varrho} \ln(1 - e^{-(x\gamma)^2})^\varrho \\ & - \varrho \ln \sum_{i=1}^n (1 - e^{-(x\gamma)^2}) \quad (28) \end{aligned}$$

وبمساواة المعادلات الاربع الاخيرة بالصفير وحلها سوف نحصل على مقدرات الامكان

الاعظم

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \eta} = \frac{\partial \ln(L)}{\partial \varrho} = \frac{\partial \ln(L)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \ln(L)}{\partial \lambda} = 0$$

ويتضح بعد مساواتها بالصفير انه لا يمكن ايجاد حلول لهذه المعادلات الا عن طريق

استخدام بعض البرامج الرياضية مثل برنامج Mathematical وبرنامج R.

٨. **التطبيق Application:** لغرض بيان قدرة التطبيق للتوزيع ([0,1]TIWBX) على البيانات الحقيقية المتمثلة باوقات فشل (50) مركباً في زمن قدره (1000) ساعة والتي تم تحليلها سابقاً من قبل (Tung et al.,2021). وباستخدام طريقة الامكان الاعظم تم تقدير قيم المعالم الاربع ($\varrho, \eta, \gamma, \gamma$) لتوزيع ([0,1]TIWBX) ولبقية التوزيعات التي تم اختيارها كونها قريبة منه للمقارنة معه، حيث تمت المقارنة مع بعض التوزيعات التي لها علاقة مع التوزيع المقترح مثل:

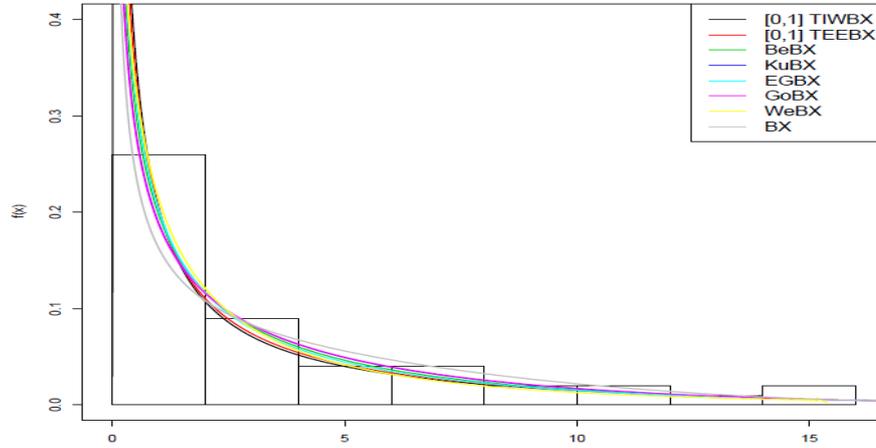
Beta Burr X distribution (BeBX), Kumaraswamy Burr X distribution (KuBX), Exponential Generalized Burr X distribution (EGBX), Gompertz Burr X distribution (GoBX), Burr X distribution (BX).

وللمقارنة بين اداء التوزيعات المذكورة استخدمنا معايير حسن المطابقة ومنها $-LL$, AIC , BIC وحسبت قيمها من تطبيقنا للنماذج على البيانات وعن طريق البرنامج R . ان صغر قيم المعايير دليل لملائمة التوزيع للبيانات. وكانت نتائج تطبيق البيانات كما في جدول رقم (1) وكالتالي:
الجدول (1): نتائج ملائمة المجموعة الحقيقية للبيانات مع توزيع $TIWBX$ والتوزيعات التي قورنت معه

Model	Para Est	-LL	AIC	BIC	CAIC	HQIC
[0,1] TIWBX	$=1.2228\varrho$ $=0.6401\eta$ $\gamma=0.0801$ $g=0.1285$	98.5033	205.0067	212.6548	205.8956	207.9192
[0,1] TEEBX	$=4.5924\varrho$ $=44.6897\eta$ $\gamma=0.0818$ $g=0.0498$	99.3040	206.608	214.2561	207.4969	209.5204
BeBX	$=6.8742\varrho$ $=2.8432\eta$ $\gamma=0.0370$ $g=0.0566$	101.2835	210.5669	218.215	211.4558	213.4793
KuBX	$=0.5278\varrho$ $=2.6275\eta$ $\gamma=0.0445$ $g=0.5284$	101.7379	211.4759	219.124	212.3648	214.3883
EGBX	$=1.8507\varrho$ $=14.4612\eta$ $\gamma=0.0480$ $g=0.0397$	100.8377	209.6754	217.3234	210.5642	212.5878
GoBX	$=2.9467\varrho$ $=0.2393\eta$ $\gamma=0.0341$ $g=0.2761$	101.7096	211.4193	219.0674	212.3082	214.3317
Weibull	$=0.3244\varrho$ $=0.8791\eta$ $\gamma=0.3975$ $g=1.0325$	102.2707	212.5414	220.1895	213.4303	215.4538
BX	$g=0.1055$ $\gamma=0.2212$	102.507	209.014	212.8381	209.2694	210.4702

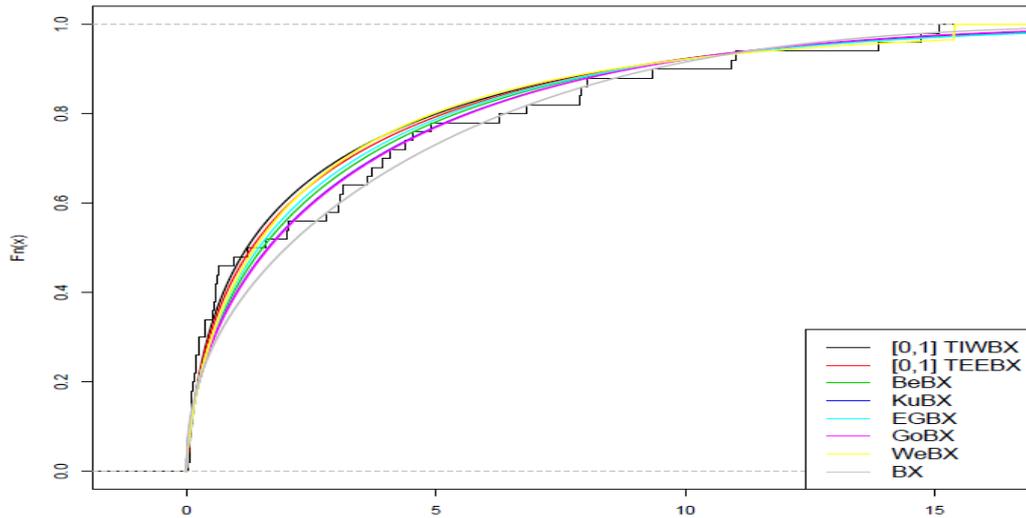
المصدر: من اعداد الباحثان بالاعتماد على مخرجات برنامج R .
اثبت توزيع $TIWBX$ ملائمته العالية للبيانات الحقيقية بالمقارنة مع التوزيعات الاخرى وعن طريق المعايير التي تم استخدامها وكما في جدول (1) بسبب حصوله على ادنى القيم

للمقاييس. والاشكال (١) و(٢) التالية وعلى التوالي تبين مدى ملائمة الدالة Pdf والدالة Cdf وقربهما من المنحني البياني بالمقارنة مع اقرانها من التوزيعات مما يؤكد نجاح توزيع TIWBX في اختبار حسن المطابقة ومن الممكن استخدامه والاستفادة منه في تطبيقات عملية اخرى. الشكل (1) يبين ملائمة الدالة Pdf وقربها من المنحني البياني بالمقارنة مع اقرانها من التوزيعات.



الشكل (١): من اعداد الباحثان بالاعتماد على مخرجات برنامج (R)

والشكل (٢) يبين ملائمة الدالة Cdf وقربها من المنحني البياني بالمقارنة مع اقرانها من التوزيعات



الشكل (٢): من اعداد الباحثان بالاعتماد على مخرجات برنامج R

٩. المحاكاة Simulation: تمت دراسة المحاكاة باستخدام الدالة الكمية للتوزيع ([0,1]TIWBX) معادلة (١٥):

$$x = \left(\frac{-1}{y^2} \ln \left\{ 1 - \left[\frac{-1}{\rho} \ln(e^{-e}u) \right]^{\frac{-1}{\rho g}} \right\} \right)^{\frac{1}{2}}$$

لغرض تقييم المعلمات التي تم تقديرها بطريقة MLE وبرنامج R. وتم استخراج الوسط والجذر التربيعي لمتوسط مربع الخطأ (RMSE) للمعلمات المقدرة. ولوحظ ان متوسطات القيم

المتوقعة لتقدير المعالم لا يساويها، اي ان التحيز فيها متناقص كلما زدنا حجم العينة. وبزيادة ذلك الحجم فان انحراف الجذر التربيعي يقترب الى الصفر، وهو من الادلة على اتساق المدخلات المرصودة.

لاستخراج نتائج المحاكاة تم اخذ العينات $n = 30, 100, 150$ ولقيم مختلفة (0.5, 0.5) الوسط والانحراف للجذر التربيعي الصيغ التالية:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (29)$$

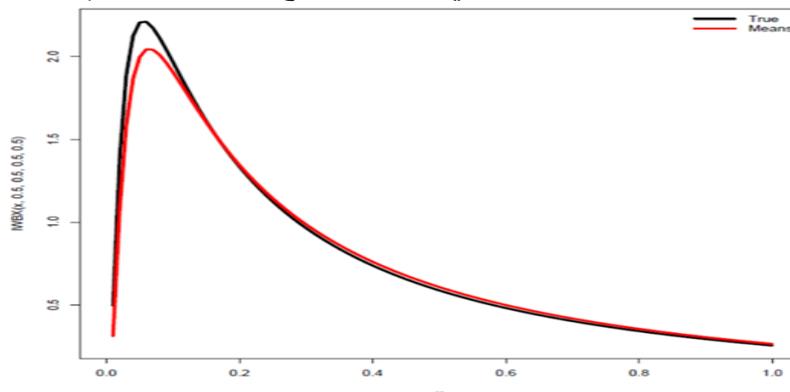
$$Bias(\bar{\theta}) = E(\bar{\theta}) - \theta \quad (30)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_i - \hat{x}_i)^2} \quad (31)$$

وحصلنا على النتائج المبينة في الجداول والاشكال الخاصة بكل جدول وكما يلي:
الجدول (٢): يبين قيم كل من AvE, Bias and RMSE للتوزيع [0,1]TIWBX ولقيم المعلمات (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)

n		$\rho = 0.5$	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 0.5$	$g = 0.5$
30	AvE	0.5071	0.5374	0.5557	0.5422
	Bias	0.0071	0.0374	0.0557	0.0422
	RMSE	0.1091	0.2787	0.1614	0.1161
50	AvE	0.5000	0.5284	0.5305	0.5299
	Bias	0.0000	0.0284	0.0305	0.0299
	RMSE	0.0910	0.2263	0.1190	0.0903
150	AvE	0.4982	0.5128	0.5082	0.5135
	Bias	-0.0018	0.0128	0.0082	0.0135
	RMSE	0.0653	0.1479	0.0657	0.0594

المصدر: الجدول من اعداد الباحثان بالاعتماد على مخرجات برنامج R.
والشكل (٣): يبين انحرافات الجذر التربيعي لمتوسط مربع الخطأ للعينات (0.5,0.5,0.5,0.5)



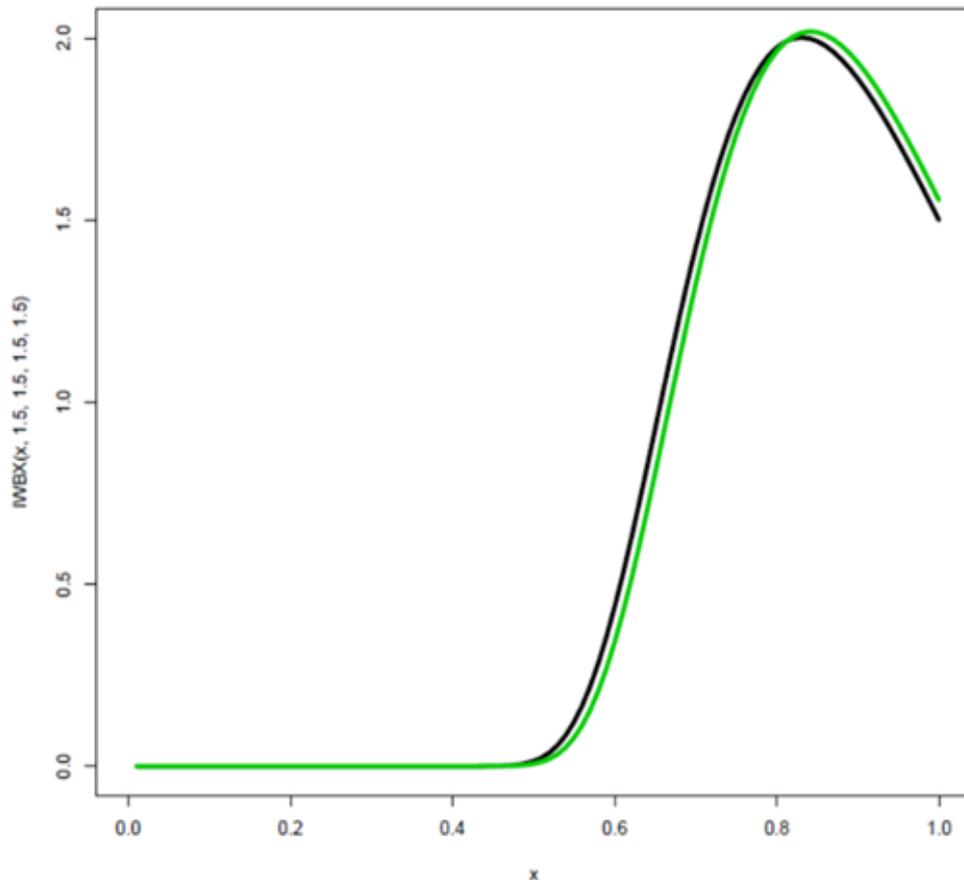
الشكل (٣): الشكل من اعداد الباحثان بالاعتماد على مخرجات برنامج R

والجدول (٣): يبين قيم كل من AvE, Bias and RMSE للتوزيع [0,1]TIWBX ولقيم المعلمات (1.5, 1.5, 1.5, 1.5)

n		$\rho = 1.5$	$\eta = 1.5$	$\gamma = 1.5$	$g = 1.5$
30	AvE	1.5905	1.4684	1.5173	1.7094
	Bias	0.0905	-0.0316	0.0173	0.2094
	RMSE	0.4451	0.6527	0.1336	0.4600
50	AvE	1.5409	1.4872	1.5097	1.6487
	Bias	0.0409	-0.0182	0.0097	0.1487
	RMSE	0.3463	0.5628	0.1085	0.3741
150	AvE	1.5047	1.5103	1.5030	1.5606
	Bias	0.0047	0.0103	0.0030	0.0606
	RMSE	0.2337	0.4217	0.0707	0.2358

(الجدول من اعداد الباحثان بالاعتماد على مخرجات برنامج R)

والشكل (٤): يبين انحرافات الجذر التربيعي لمتوسط مربع الخطأ للعينات (1.5,1.5,1.5,1.5)



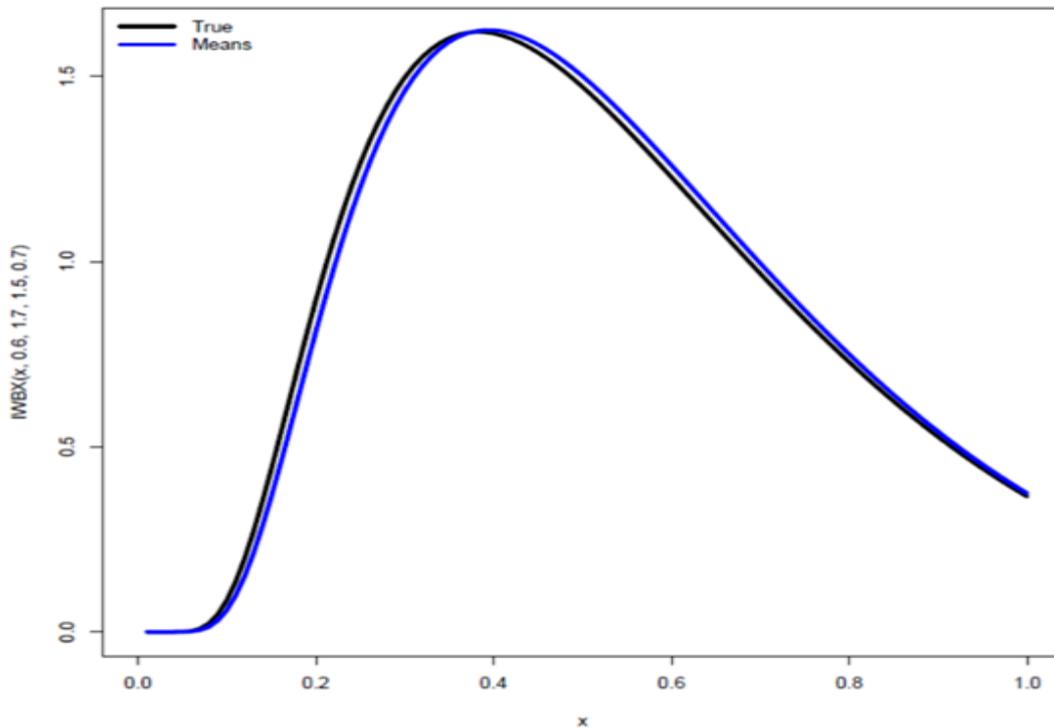
الشكل (٤): الشكل من اعداد الباحثان بالاعتماد على مخرجات برنامج R.

والجدول (٤): يبين قيم كل من AvE, Bias and RMSE للتوزيع $[0,1]$ TIWBX ولقيم المعلمات (0.6, 1.7, 1.5, 0.7)

n		$\rho = 0.6$	$\eta = 1.7$	$\gamma = 1.5$	$g = 0.7$
30	AvE	0.6475	1.6683	1.5533	0.7584
	Bias	0.0475	-0.0317	0.0533	0.0584
	RMSE	0.1668	0.5576	0.2103	0.1926
50	AvE	0.6281	1.6830	1.5272	0.7378
	Bias	0.0281	-0.0170	0.0272	0.0378
	RMSE	0.1413	0.4728	0.1574	0.1451
150	AvE	0.6063	1.7208	1.5086	0.7138
	Bias	0.0063	0.0208	0.0086	0.0138
	RMSE	0.0884	0.3799	0.0937	0.0898

(الجدول من اعداد الباحثان بالاعتماد على مخرجات برنامج R)

والشكل (٥) يبين انحرافات الجذر التربيعي لمتوسط مربع الخطأ للعينات (0.6,1.7,1.5,0.7)



الشكل (٥): الشكل من اعداد الباحثان بالاعتماد على مخرجات برنامج R

١٠. **الاستنتاجات Conclusions:** ان الهدف من دراستنا هذه هو ايجاد وتوسيع توزيع يمتاز بمرورته جيدة لتوافق انواع البيانات المختلفة. وايجاد بعض خصائص الرياضية والاحصائية له مثل العزوم والدالة الكمية والاحصاءات المرتبة. فقمنا باقتراح وتوسيع توزيع $[0,1]$ TIWBX) تابع لعائلة $[0,1]$ معكوس ويبل المبتور $[0,1]$ Truncated Invers Weibull)) واسميناه بـ $[0,1]$ توزيع معكوس ويبل بور العاشر المبتور. واستنتجنا من خلال دراسة التوزيع الجديد وتطبيقه على مجموعة من البيانات انه ذو مرونة جيدة تفوق سابقه من التوزيعات. لذا نوصي الباحثين بايجاد

بقية الخصائص الرياضية والاحصائية له مثل الدالة المولدة للعزوم والانتروبيا والتفطح والالتواء وتطبيقه على مجموعات حقيقية اخرى.

:References المصادر

1. Abid, S. H., & Abdulrazak, R. K., (2017), truncated Fréchet-G generator of distributions. *Applied Mathematics*, 3, 51-66.
2. Ahmed, M. T., Khaleel, M. A., Oguntunde, P. E., & Abdal-Hammed, M. K., (2021, March). A new version of the exponentiated Burr X distribution. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1818, No. 1, p. 012116). IOP Publishing.
3. Alizadeh, M., Rasekhi, M., Yousof, H. M., & Hamedani, G. G., (2018), The transmuted Weibull-G family of distributions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 47(6), 1671-1689.
4. Alizadeh, M., Tahir, M. H., Cordeiro, G. M., Mansoor, M., Zubair, M., & Hamedani, G., (2015), The Kumaraswamy marshal-Olkin family of distributions. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 23(3), 546-557.
5. B Dias, C. R., Cordeiro, G. M., Alizadeh, M., Diniz Marinho, P. R., & Campos Coêlho, H. F., (2016), Exponentiated Marshall-Olkin family of distributions. *Journal of Statistical Distributions and Applications*, 3(1), 1-21.
6. Chipepa, F., Oluyede, B., & Makubate, B., (2020), The Topp-Leone-Marshall-Olkin-G family of distributions with applications. *International Journal of Statistics and Probability*, 9(4), 15-32.
7. Cordeiro, G. M., & de Castro, M., (2011), A new family of generalized distributions. *Journal of statistical computation and simulation*, 81(7), 883-898
8. Eghwerido, J. T., Agu, F. I., & Ibidoja, O. J., (2022), The shifted exponential-G family of distributions: Properties and applications. *Journal of Statistics and Management Systems*, 25(1), 43-75
9. Ibrahim, N. A., & Khaleel, M. A., (2020), Generalizations of Burr Type X Distribution with Applications.
10. Ibrahim, N. A., Khaleel, M. A., Merovci, F., Kilicman, A., & Shitan, M., (2017), WEIBULL BURR X DISTRIBUTION PROPERTIES AND APPLICATION. *Pakistan Journal of Statistics*, 33(5).
11. Khaleel, M. A., Abdulwahab, A. M., Gaftan, A. M., & Abdal-hammed, M. K., (2022), A new $[0, 1]$ truncated inverse Weibull rayleigh distribution properties with application to COVID-19. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 13(1), 2933-2946.
12. Khaleel, M. A., Ibrahim, N. A., Shitan, M., & Merovci, F., (2016, June), Some properties of Gamma Burr type X distribution with application. In *AIP Conference proceedings* (Vol. 1739, No. 1, p. 020087). AIP Publishing LLC.
13. Khaleel, M. A., Ibrahim, N. A., Shitan, M., & Merovci, F., (2018), New extension of Burr type X distribution properties with application. *Journal of King Saud University-Science*, 30(4), 450-457.

14. Khaleel, M. A., Ibrahim, N. A., Shitan, M., Merovci, F., & Rehman, E., (2017), Beta burr type x with application to rainfall data. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 11, 73-86.
15. Khaleel, M. A., Oguntunde, P. E., Al Abbasi, J. N., Ibrahim, N. A., & AbuJarad, M. H. (2020). The Marshall-Olkin Topp Leone-G family of distributions: A family for generalizing probability models. *Scientific African*, 8, e00470.
16. Merovci, F., Khaleel, M. A., Ibrahim, N. A., & Shitan, M., (2016), The beta Burr type X distribution properties with application. *SpringerPlus*, 5(1), 1-18.
17. Nofal, Z. M., Afify, A. Z., Yousof, H. M., & Cordeiro, G. M., (2017), The generalized transmuted-G family of distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(8), 4119-4136
18. Olanrewaju, R. O., (2021), On the Application of Generalized Beta-G Family of Distributions to Prices of Cereals. *Journal of Mathematical Finance*, 11(4), 670-685.
19. Pakungwati, R. M., Widyaningsih, Y., & Lestari, D. (2018, November). Marshall-Olkin extended inverse Weibull distribution and its application. In *Journal of physics: conference series* (Vol. 1108, No. 1, p. 012114). IOP Publishing.
20. Ristic, M. M., & Balakrishnan, N., (2012), The gamma-Exponentiated exponential distribution. *Journal of statistical computation and simulation*, 82(8), 1191-1206.
21. Torabi, H., & Montazeri, N. H., (2014), The logistic-uniform distribution and its applications. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 43(10), 2551-2569.
22. Tung, Y. L., Ahmad, Z., Kharazmi, O., Ampadu, C. B., Hafez, E. H., & Mubarak, S. A., (2021), On a new modification of the weibull model with classical and bayesian analysis. *Complexity*, 2021.
23. Gasthaus, J., Benidis, K., Wang, Y., Rangapuram, S. S., Salinas, D., Flunkert, V., & Januschowski, T., (2019, April), Probabilistic forecasting with spline quantile function RNNs. In *The 22nd international conference on artificial intelligence and statistics* (pp. 1901-1910). PMLR.