

استعمال أسلوب بيز للوحات سيطرة لمجموع المتراكم

أ.م.د. جنان عباس ناصر

الكلية التقنية اللاوربية- الجامعة التقنية الوسطى

المستخلص

في هذا البحث، سنقدم أسلوب بيز للتشغيل الاعتيادي للوحة المجموع المتراكم .
(cumulative sum (Cusum)) استعملت لوحة سيطرة المجموع المتراكم لمراقبة متوسط العملية عندما المشاهدات (منتج) تتبع توزيع ثنائي الحدين بعملية تصنيع مستمرة. بافتراض ان معلومات أولية متوفرة حول المعلمة p (نسبة الوحدات التالفة في الإنتاج) ، متمثلة بتوزيع بيتا بمعلمات مختلفة لمعلمات (a, b) والتوزيع المنتظم بالفترة $[0, 1]$. اذ نشق التوزيع اللاحق للمعلمة p وسيتم تحديد المعدل والانحراف المعياري لطول التشغيل للوحة السيطرة المجموع المتراكم (Cusum) باستعمال طريقة بيز .

استحصلت نتائج البحث باستعمال برامج مكتوبة ببرنامج Matlab -R2018 a .
تبين من نتائج البحث بان لوحات المجموع المتراكم (Cusum) عندما تكون المعلومة الأولية للمعلمة p هي توزيع بيتا بمعلمات مختلفة لمعلمات (a, b) كانت اكثر حساسية عند قيم معينة للمعلمات a و b وفقا لاقل القيم للمعدل والانحراف المعياري لطول التشغيل . عموما نلاحظ بان لوحات سيطرة المجموع المتراكم (Cusum) كانت اكثر حساسية عند تبني قيمة بداية جديدة للوحة المجموع المتراكم (Cusum) وعندما تزداد بزيادة عدد الحالات في سلسلة ماركوف وتناقص قيمة حد القرار .

المصطلحات الرئيسية للبحث: لوحات السيطرة، المجموع المتراكم، توزيع ثنائي الحدين، أسلوب بيز، التوزيع الاولي ، توزيع بيتا، التوزيع المنتظم ، التوزيع اللاحق ،طريقة العزوم ، سلاسل ماركوف، المعدل طول التشغيل (ARL)، الانحراف المعياري لطول التشغيل (SDRL).

Abstract

In this study, we will introduce a Bayesian approach for The usual operation of the cumulative sum(Cusum) chart. The Cusum control chart used for monitoring a process mean when the observations (product) follows Binomial Distribution in continuous manufacturing. By assuming that the prior information available about the parameter p (the proportion of defective items in the production) are a beta distribution, with different values for the parameters (a, b) and the uniform distribution over the $[0, 1]$ interval. we derived the posterior distribution of p and the average run length (ARL) and standard deviation run length (SDRL) will be determined by using a Bayesian method.

The results were obtained by using Programs written using matlab-R2018a program. The results shown that Cusum control charts, when the prior information on p is a beta distribution (a, b) were more sensitive at certain values for the parameters a, b according to the smallest values of ARL and SDRL.

In general, we can see that Cusum control charts, when the prior information on p are a beta distribution (a, b) and the uniform distribution over the $[0, 1]$ interval were more sensitive, when we adopt new starting value and by increasing the number of states for markov chain and reducing the decision interval.

1. المقدمة

تعد لوحات السيطرة لمراقبة عمليات السيطرة الإحصائية لتشخيص الأسباب غير العادية ومعرفة الاضطرابات الحاصلة في العملية الإنتاجية المتمثلة بحالة الخروج عن السيطرة الإحصائية واجراء تغيير في العملية واعادتها الى السيطرة الإحصائية. اذ يريد العاملین دائماً تحسين العملية ومن احدى الخطوات الضرورية لتحسين العملية هو معرفة الوقت البادئ بتغيير العملية او سرعة الكشف عن نقطة التغيير او الاضطرابات الحاصلة في العملية الإنتاجية. فقد طورت العديد من الطرق الإحصائية المختلفة المستعملة في تطبيق لوحات السيطرة لمراقبة معلمات العملية التي تعد المفتاح الاساسي لتحسين أداء مخرجات العملية الإنتاجية. ان اغلب تصاميم لوحات السيطرة الإحصائية مبنية على فرضية التوزيع الطبيعي لخاصية النوعية القابلة للقياس (للمتغير قيد البحث). وفي العديد من الحالات التطبيقية والعملية لدينا أسباب لاعتقاد بان خاصية النوعية للمتغير قيد البحث تتحرف عن خضوعها للتوزيع الطبيعي.

فقد اعتمد عدد غير قليل من الباحثين أسلوب بيز والاسلوب الكلاسيكي للحصول على مقدرات معلمات العملية وكيفية تطبيق أسلوب بيز لمراقبة العملية لنوعية المنتج فقد تم اعتماد معلمات التوزيع اللاحق عند تصميم بنية لوحات السيطرة. والمقارنة بين أسلوب بيز والاسلوب الكلاسيكي المستعمل لتلك اللوحات بالاعتماد على معيار معدل طول التشغيل (Average Run Length(ARL)) الذي يعرف بأنه معدل عدد

العينات المفحوصة لحين ورود إلى ما يشير إلى إن العملية أصبحت خارج السيطرة ويكون هذا المعدل كبير عندما تكون العملية تحت السيطرة في حين يكون صغير عندما تحيد العملية عن السيطرة الإحصائية.

يعد توزيع ثنائي الحدين من التوزيعات الشائعة الاستعمال في عملية السيطرة الإحصائية لمراقبة عدد الوحدات التالفة في العملية أو عدد العيوب في الوحدة المنتجة. والتي لا تخضع فيه عدد الوحدات التالفة في العملية أو عدد العيوب في الوحدة المنتجة لأي من المتغيرات المستمرة.

وقد قدم Page عام (1954) [9] لوحة السيطرة المجموع المتراكم للكشف عن الانحرافات الصغيرة والمتوسطة في العملية الإنتاجية. وعادة يتم تقييم أداء لوحة السيطرة بدلالة معدلات اطوال التشغيل لتلك اللوحة. اذ يعرف طول التشغيل Run Length(RL) بأنه عدد الإحصاءات المرسومة لحين ظهور اول تجاوز لاحصاءة لوحة السيطرة لحدي السيطرة.

وقد استعملت عدة أساليب لحساب قيم معدل طول التشغيل (ARL) للوحة المجموع المتراكم (Cusum)، منها أسلوب سلاسل ماركوف المقترح من قبل الباحثان Brook و Evans [4] في عام 1972 لدراسة خصائص التوزيع الاحتمالي لطول التشغيل للوحة المجموع المتراكم (Cusum) من جانب واحد الأعلى عندما تكون العملية تحت السيطرة تخضع للتوزيع الاحتمالي المستمر (التوزيع الطبيعي) أو المتقطع (توزيع بواسون). اذ يمتاز أسلوب سلاسل ماركوف بسهولة بدلا من أسلوب اختبار النسبة الاحتمالية المتسلسل ((Sequential Probability Ration Test (SPRT)) الذي يتطلب فيها حل معادلات تكاملية لإيجاد العدد المتوسط للعينة. ونظرا للتطبيقات الواسعة الاستعمال للوحات السيطرة على النوعية في كافة المجالات الصناعية والاقتصادية. فقد تناول العديد من الباحثين دراسة وتحليل لوحات السيطرة ومنها لوحة الـ Cusum من خلال افتراض معلومات أولية التي تعتمد في حساب مقدر بيز متمثلة بالمعلوماتية (informative) وغير معلوماتية (non-informative) عندما يكون المتغير تحت السيطرة يخضع للتوزيع الاحتمالي المستمر أو المتقطع نذكر منها: -

وفي عام ٢٠٠١ ناقش الباحثان Feltz و Shiao [5] طرق لتطبيق أسلوب بيز لوحة سيطرة متعدد المتغيرات تخضع للتوزيع الطبيعي في المجالات الصناعية. اذ تناول الباحثان طرق تحسين تقدير معلمات العملية وكيفية تطبيقها للوحة سيطرة متعدد المتغيرات لمراقبة العملية تحت افتراض ان التوزيع الاولي لمعلمة متوسط المتغيرات التي تكون تحت السيطرة متغيرات عشوائية تخضع للتوزيع الطبيعي. اقترح الباحث Menzefricke [6] في عام 2002 اسلوب بيز لتكوين لوحات السيطرة p- عندما تكون معلمة التوزيع للمتغير تحت السيطرة متغير عشوائي اذ افترض معلومة أولية حول المعلمة p، التي تمثل نسبة الوحدات التالفة في المجتمع، وان التوزيع الاولي للمعلمة p يخضع لتوزيع بيتا. وبذلك يكون التوزيع اللاحق للمعلمة p يخضع لتوزيع

بيتا . فقد اعتمد مرحلتين لاسلوبية المقترح: المرحلة الأولى عند استعمال التوزيع التنبؤي (predictive distribution) لتكوين لوحة السيطرة واعتماد اسلوب بيز لاشتقاق منطقة الرفض . اما المرحلة الثانية فهي تقييم لوحة السيطرة عند استعمال تقريب نظرية المعاينة لاختبار أداء لوحات السيطرة وفقا لمواصفات مفترضه لبيانات الانموذج المولدة.

وفي عام ٢٠١١ استعمل الباحث, Riaz [11] أسلوب بيز والأسلوب الكلاسيكي في تقدير معلمة العملية التي تعد الأساس في بنية لوحة السيطرة (لوحة x) والمقارنة بين الحالتين من ناحية قوة اللوحة في الكشف عن الانحراف في العملية بدلالة متوسط اطوال التشغيل. واستعمل الباحث Angelo [1] في عام ٢٠١٢ لوحة بيتا (Beta chart) لبيانات تمثل النسب التي تكون قيمها مقيدة بين الصفر والواحد المستحصلة من مراقبة عملية تصنيع الحامض النتريكي. فقد قرب الباحث Angelo تلك البيانات بتوزيع بيتا، إذ تم تكوين حدود لوحة بيتا استنادا على توزيع بيتا. وتبين نتائج البحث بان لوحة Beta تعد افضل مقارنة بلوحة شيوارت في حالة العملية تكون تحت السيطرة وخارج السيطرة وفقا لقيم معدل طول التشغيل المعتمدة كمييار للمقارنة بين تلك اللوحات. وان لوحة بيتا تعطي دقة اكبر مقارنة بلوحة شيوارت وتكون اسرع في كشف الانحرافات في العملية عندما تكون خارج السيطرة . وفي عام ٢٠١٦ تناول الباحث VanZy [12] تطبيق أسلوب بيز لعملية السيطرة الإحصائية بمرحلتين (المرحلة الأولى والمرحلة الثانية)، وفقا للتوزيعات الأولية غير المعلوماتية والتوزيعات الاحتمالية المرافقة واعتماد Jeffreys' priors . واستعمل التوزيعات على اطوال التشغيل ومعدلات اطوال التشغيل في المرحلة الثانية لبعض المعاملات الشائعة الاستعمال في عملية الإحصائية السيطرة ممتثلة بمعامل الاختلاف والمتوسط القياسي والتباين والتباين المعمم وحدود القبول لمجموعات تخضع للتوزيع الطبيعي والتوزيع الاسي بمعلمتين وانموذج piecewise exponential . فقد استعمل الباحث المحاكاة للحصول على نتائج البحث. وقرن النتائج المستحصلة بأسلوب بيز مع النتائج التقليدية بالاعتماد على اطوال التشغيل ومعدلات اطوال التشغيل للوحات السيطرة قيد البحث.

و اقترح الباحثين Monfared و Lak [7] في عام ٢٠١٧ أسلوب يدمج لوحة Cusum مع أسلوب بيز . واوضح الباحثين بانه يمكن الحصول على بعض المعلومات من لوحة سيطرة Cusum حول نقطة التغير والتي ممكن استعمالها كمعلومية أولية. فقد افترض الباحثين نوعين من المعلومات الأولية التي تعتمد في حساب مقدر بيز ممتثلة بالمعلوماتية (informative) وغير معلوماتية (non-informative) مع مقدر الامكان الأعظم (MLE). وقد استعمل الباحثين أسلوب المحاكاة للمقارنة بين متوسط مربعات الخطاء لمقديري بيز ومقدر الامكان الأعظم. وتبين من نتائج البحث بان مقدر بيز يكون اكثر دقة في حالة افتراض معلومة أولية معلوماتية. وتكون على الاغلب اكثر دقة للانحراف في متوسط العملية مقارنة بمقدر بيز في حالة افتراض معلومة أولية

غير معلوماتية ومقدر الامكان الأعظم (MLE). وفي عام ٢٠١٨ تناول الباحث Bayer واخرون معه [2] لوحة سيطرة بالاعتماد على انموذج الانحدار الخطي القياسي لمراقبة البيانات التي تمثل نسب المعيب للمنتج والتي تكون قيمها مقيدة بين الصفر والواحد. فقد افترض الباحثون بان المتغير تحت السيطرة يخضع لتوزيع بيتا ووفقا للمعلمتين المتوسط والانحراف المعياري التي تعتمد كمعلمات في انموذج الانحدار الخطي كمتغيرات السيطرة. فقد استعمل الباحثون المحاكاة للحصول على نتائج البحث. توصل الباحثون الى نتائج جيدة اعتمادا على معيار معدل طول التشغيل للوحة سيطرة انحدار بيتا. واستعمل الباحثين Riaz و Ali [10] في عام ٢٠١٩ أسلوب بيز بافتراض دوال خسارة متماثلة لتصميم لوحة سيطرة بيز. ولاحظ الباحثين بان أداء لوحة سيطرة بيز يكون متحيز عندما تكون العملية تحت السيطرة ، بمعنى اخر ان أداء لوحة سيطرة بيز عندما تكون العملية تحت السيطرة يكون غير مساوي للقيمة المرغوب بها لبعض من دوال الخسارة المفترضة قيد البحث. وبالتالي فان المقارنة بين لوحات السيطرة بيز يمكن ان تكون غير صحيحة. ولهذا السبب اقترح الباحثين تصميم مصحح للوحات السيطرة بيز للحصول على أداء مرغوب به تحت السيطرة باستعمال دوال خسارة مفترضة ، بالإضافة الى ذلك فقد استعمال لوحات سيطرة بيز بالاعتماد على التوزيع اللاحق (the posterior distribution) ، وناقشا لوحات السيطرة التنبؤية (Predictive) لمراقبة مشاهدات جديدة. وقد استعمل الباحثين المحاكاة للحصول على نتائج البحث وتقديم مثالين كحالة تطبيقية.

٢. هدف البحث

هدفنا في هذا البحث ، استعمال اسلوب بيز للوحة سيطرة المجموع المتركم (Cusum) للكشف عن الانحرافات الموجبة في متوسط العملية ، عندما تكون العملية تتبع توزيع ثنائي الحدين المستعمل في عملية السيطرة الإحصائية لمراقبة عدد الوحدات التالفة في العملية إنتاجية مستمرة. بافتراض توفر معلومة أولية حول معلمة توزيع ثنائي الحدين (p) بانها متغير عشوائي وتخضع لنوعين من التوزيعات المعلوماتية (informative) متمثلة بتوزيع بيتا بالمعلمتين (a,b) والتوزيع المنتظم بالفترة (0,1) كتوزيعات أولية. إذ سنشتق التوزيع اللاحق للمعلمة توزيع ثنائي الحدين (p) ومن ثم اعتماده لحساب معدل طول التشغيل ((Average Run Length (ARL)) ومعيار الانحراف المعياري لطول التشغيل (Standard Deviation Run Length (SDRL)). للوحة السيطرة المجموع المتراكم (Cusum)، من خلال حساب القيم الاحتمالية المعتمدة لحساب مصفوفة الاحتمالات الانتقالية بأسلوب سلسلة ماركوف فقد اعتمد المعياريين المتقدم ذكرهما لتقييم أداء تلك اللوحات. إذ يتم تقدير معلمة العملية من بيانات من الواقع العملي للعملية تحت السيطرة. فضلا عن افتراض عدة قيم للمعلمتين توزيع بيتا (a,b) .

3. لوحة Binomial Cusum لمراقبة متوسط العملية
فترض بان المشاهدات x_1, x_2, \dots, x_n من عملية انتاج متكررة تكون متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيع من توزيع ثنائي الحدين بالمعلمتين (n, p) وتكون على وفق الصيغة الآتية [4,8]:

$$P(x, n, p) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x}; \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \quad \dots(1)$$

حيث ان $(n, p) > 0$. بمتوسط مساوي لـ $(\mu = np)$ وتباين مقداره $(\sigma^2 = np(1-p))$. ويقال بان العملية تحت السيطرة اذا افترضنا بان $(p = p_0)$ عندما تكون العملية تحت السيطرة الاحصائية وان الـ $(p = p_1 < p_0)$ عندما تكون العملية خارج السيطرة الاحصائية. حيث ان p_0 تمثل نسبة المعيب المسموح بها لخاصية النوعية. وحيث ان لوحة Cusum تستعمل لمراقبة متوسط العملية، اذ تكون العملية تحت السيطرة اذا كان $(\mu = \mu_0 = np_0)$ التي تمثل (μ_0) قيمة متوسط العملية عند مستوى النوعية المقبول أو تسمى بالقيمة (تحت السيطرة) لخاصية النوعية x_i ، وبخلاف ذلك تكون العملية خرج السيطرة اي ان $(\mu = \mu_0 = np_0)$.

فقد استعملت لوحة Cusum لكشف الانحرافات الصغيرة في العملية. ويتم حساب احصاء المجموع المتراكم (Cusum) من الجانب الأعلى لمراقبة متوسط العملية (الانحرافات الموجبة) على وفق الصيغة الآتية [8,7]:

$$S_i = \text{Max}[0, x_i - k + S_{i-1}] \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots(2)$$

حيث إن القيم الأولية لأحصاء Cusum تكون مساوية للصفر، إي $S_1 = 0$ وان S_i تسمى الحد الأعلى التراكمي للكشف عن الانحرافات الموجبة للعملية عند الوقت i . و ان k تسمى القيمة المرجعية (Reference Value) أو قيمة السماح ويتم حسابها على وفق الصيغة الآتية:-

$$K = (\mu_a - \mu_0) / (\log(\mu_a) - \log(\mu_0)) \quad \dots(3)$$

وان μ_a تمثل قيمة متوسط العملية الذي نرغب باكتشاف تغيير في متوسط العملية أي عند مستوى النوعية المرفوض أو تسمى بالقيمة (خارج السيطرة)، وقيمتها مساوية لـ $\mu_a = \mu_0 + \sigma \sqrt{np_0}$ ، ووفقاً لتوزيع ثنائي الحدين ستكون قيمة μ_a مساوية لـ $\mu_a = np_0 + \sigma \sqrt{np_0(1-p_0)}$. وتمثل التغير في متوسط عملية الانتاج الذي نرغب باكتشافها بوقت مبكر وقيمتها مساوية لـ

$$\sigma \left| \frac{\mu_a - \mu_0}{\sigma} \right| \quad \dots(4)$$

وان حد اتخاذ القرار سيكون بين الصفر و (h) إي إن (0 h) . وان قيمة حد القرار يمكن ان تكون مساوية $h \leq 5\sigma_0$ ، أي ستكون h مساوية $h \leq 5\sqrt{np_0(1-p_0)}$ وفقا لتوزيع ثنائي الحدين او $h \leq 6\sigma_0$ ، أي ستكون h مساوية $h \leq 6\sqrt{np_0(1-p_0)}$ وفقا لتوزيع ثنائي الحدين. فاذا تجاوزت قيمة احصاءة (S_i) حد اتخاذ القرار الموجب (h) أي $(S_i > h)$ فان لوحة السيطرة تشير الى حدوث زيادة في متوسط العملية. وان العملية تعد خارج السيطرة لذ سيتم إيقاف العملية الإنتاجية ويتطلب إجراء عملية تصحيح للعملية لأعادتها تحت السيطرة.

٤. أسلوب بيز

في هذا المبحث ، نستعمل أسلوب بيز لتقدير التوزيع اللاحق للمعلمة توزيع ثنائي الحدين ، ليكن (x_1, x_2, \dots, x_m) عينة عشوائية بحجم (m) تكون مستقلة ومتطابقة التوزيع من توزيع ثنائي الحدين بالمعلمتين (n, p) بدالة كثافة احتمالية وفقا للصيغة (1). وان دالة الإمكان لهذا التوزيع تكون على وفق الصيغة [3] :

$$L(\underline{x} \setminus p) = \prod_{i=1}^m p(x_i) = \prod_{i=1}^m C_{x_i}^n p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} \quad \dots(5)$$

$$L(\underline{x} \setminus p) = \prod_{i=1}^m C_{x_i}^n p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} \quad \dots(6)$$

وبتحديد التوزيع الاولي (the prior distribution) لمعلمة توزيع ثنائي الحدين (p) ، سيتم اشتقاق التوزيع اللاحق (the posterior distribution) لمقدر بيز لمعلمة توزيع ثنائي الحدين (p) ، وفقا لنوعين من الدوال الأولية المعلوماتية متمثلة بالمعلمتين (a,b) والتوزيع المنتظم بالفترة (0,1) كتوزيعات الأولية تخضع لها المعلمة p . لذا في هذا البحث نشق التوزيع اللاحق للمعلمة توزيع ثنائي الحدين (p) باستعمال التوزيعين الأوليين المتقدم ذكرهما . واعتماد التوزيع اللاحق للمعلمة توزيع ثنائي الحدين (p) في تحديد المعدلات والانحرافات المعيارية لاطوال التشغيل للوحة سيطرة .Cusum

4.1 التوزيع اللاحق لمعلمة p باستعمال توزيع بيتا كتوزيع اولي :

في هذا المبحث نشق مقدر بيز للمعلمة p ، عندما يكون التوزيع الأولي للمعلمة p يخضع لتوزيع بيتا بدالة كثافة احتمالية (pdf) بالمعلمتين a و b المقترح استخدامها في التقدير ويكون على وفق الصيغة الآتية :

$$\pi_1(p) \propto \frac{1}{B(a,b)} p^{(a-1)} (1-p)^{(b-1)} \quad \text{for } 0 < p < 1, a, b > 0 \quad \dots(7)$$

إذ إن $B(a,b) \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ تمثل دالة بيتا. وبذلك فإن التوزيع اللاحق للمعلمة p بمعلومية البيانات المعطاة $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ يكون وفق الآتي :

$$g_1(p \setminus x) = \frac{L(\underline{x} \setminus p) \pi_1(p)}{L(\underline{x} \setminus p) \pi_1(p) dp} \dots(8)$$

حيث إن $L(\underline{x} \setminus p)$ تكون على وفق الصيغة [6] ، بتعويض الصيغة (7) والصيغة (6) في الصيغة (8)، نحصل على الآتي :-

$$g_1(p \setminus x) = \frac{\prod_{i=1}^m C_{x_i}^n p^{i-1} (1-p)^{n-x_i} \left[\frac{1}{B(a,b)} p^{(a-1)} (1-p)^{(b-1)} \right]}{\int_0^1 \prod_{i=1}^m C_{x_i}^n p^{i-1} (1-p)^{n-x_i} \left[\frac{1}{B(a,b)} p^{(a-1)} (1-p)^{(b-1)} \right] dp} \dots(9)$$

وبالتبسيط الصيغة (9) نحصل على التوزيع اللاحق للمعلمة p بمعلومية البيانات $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ بالمعلمتين الجديدة $(a_{(new)}, b_{(new)})$ المبينة أدناه :

$$g_1(p \setminus x) = \frac{1}{B\left(\sum_{i=1}^m x_i, a, (n - \sum_{i=1}^m x_i), b\right)} p^{\left(\sum_{i=1}^m x_i - a\right) - 1} (1-p)^{\left(n - \sum_{i=1}^m x_i - b\right) - 1} \text{ for } 0 < p < 1$$

$n, m, a, b > 0 \dots(10)$

حيث ان الصيغة (10) تمثل توزيع بيتا بالمعلمتين $(a_{(new)}, b_{(new)})$ ، أي ان التوزيع اللاحق للمعلمة p يخضع للتوزيع بيتا بالمعلمتين $(a_{(new)}, b_{(new)})$ (لمزيد من التفاصيل انظر الملحق -A). اي ان

$g_1(p \setminus x) \sim \text{Beta distribution } (a_{(new)} (\sum_{i=1}^m x_i, a), b_{(new)} (n - \sum_{i=1}^m x_i, b))$
وقد تم اشتقاق مقدر معلمي التوزيع الاولي المتمثل بتوزيع بيتا (a, b) باستعمال طريقة العزوم (Method of Moments (MOM)) ، وكما مبين في الصيغتين ادناه (لمزيد من التفاصيل انظر الملحق B-):

$$\hat{a}_{mom} = \bar{x} \left(\frac{(1-\bar{x})\bar{x}}{S^2} - 1 \right) \dots(11)$$

$$\hat{b}_{mom} = (1-\bar{x}) \left(\frac{(1-\bar{x})\bar{x}}{S^2} - 1 \right) \dots(12)$$

4.2 التوزيع اللاحق لمعلمة p باستعمال التوزيع المنتظم كتوزيع اولي :
في هذا المبحث نشق مقدر بيز للمعلمة p ، عندما يكون التوزيع الأولي للمعلمة p يخضع للتوزيع المنتظم المستمر بالفترة $(0,1)$ بدالة كثافة احتمالية (pdf) المقترح استخدامها في التقدير يكون على وفق الصيغة الآتية :

$$\pi_2(p) \propto 1 \text{ for } 0 < p < 1 \quad \dots(13)$$

وبذلك فان التوزيع اللاحق للمعلمة p بمعلومية البيانات المعطاة $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ يكون وفق الصيغة ادناه :-

$$g_2(p \setminus x) = \frac{L(\underline{x} \setminus p) \pi_2(p)}{\int_0^1 L(\underline{x} \setminus p) \pi_2(p) dp} \quad \dots(14)$$

حيث إن $L(\underline{x} \setminus p)$ تكون على وفق الصيغة [6] ، بتعويض الصيغة (13) والصيغة (6) في الصيغة (14)، نحصل على الآتي :-

$$g_2(p \setminus x) = \frac{\prod_{i=1}^m C_{x_i}^n p^{i-1} (1-p)^{n-x_i} [1]}{\int_0^1 \prod_{i=1}^m C_{x_i}^n p^{i-1} (1-p)^{n-x_i} [1] dp} \quad \dots(15)$$

وبالتبسيط الصيغة (15) نحصل على التوزيع اللاحق للمعلمة p بمعلومية البيانات $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ بالمعلمتين الجديدة $(a^{(new)}, b^{(new)})$ المبينة أدناه :

$$g_2(p \setminus x) = \frac{1}{B((\sum_{i=1}^m x_i - 1), (mn - \sum_{i=1}^m x_i - 1))} p^{(\sum_{i=1}^m x_i - 1)} (1-p)^{(mn - \sum_{i=1}^m x_i - 1)} \text{ for } 0 < p < 1$$

$$n, m, 0 \quad \dots(16)$$

حيث ان الصيغة (16) تمثل توزيع بيتا بالمعلمتين $(a^{(new)}, b^{(new)})$ ، أي ان التوزيع اللاحق للمعلمة p يخضع للتوزيع بيتا بالمعلمتين

$(a^{(new)} = (\sum_{i=1}^m x_i - 1), b^{(new)} = (mn - \sum_{i=1}^m x_i - 1))$. (لمزيد من التفاصيل انظر

الملحق -C) . اي ان

$$g_2(p \setminus x) \sim \text{Beta distribution } (a^{(new)} = (\sum_{i=1}^m x_i - 1), b^{(new)} = (mn - \sum_{i=1}^m x_i - 1))$$

5. استعمال سلاسل ماركوف في السيطرة الاحصائية

يتم استعمال أسلوب سلاسل ماركوف لدراسة خصائص طول التشغيل للوحة Cusum، المتمثلة بمعيار معدل طول التشغيل Average Run Length ((ARL)) ومعيار الانحراف المعياري لطول التشغيل (Standard Deviation

(Run Length (SDRL) . واعتماد المعيارين المتقدم ذكرهما للمقارنة بين لوحات السيطرة وتحديد قوة وقدرة لوحة السيطرة في كشف التغيرات الموجبة في متوسط العملية تحت السيطرة [4]. إذ يتم بتقريب انتقالات احصاء الاختبار للوحة Cusum باستعمال اسلوب سلسلة ماركوف تحت افتراض بان المتغير تحت السيطرة يخضع وفقاً للتوزيع اللاحق للمعلمة توزيع ثنائي الحدين (Binomial distribution) المتمثل بتوزيع بيتا المستمر (Beta- Binomial distribution) عند توفر معلومة أولية حول معلمة توزيع ثنائي (P) متمثلة بتوزيع بيتا بالمعلمتين (a,b) والتوزيع المنتظم بالفترة (0,1).

5.1 الصيغ التقريبية لخصائص طول التشغيل للوحة الـ Beta Cusum

يتم بتقريب انتقالات احصاء الاختبار للوحة Cusum من جانب واحد الأعلى باستعمال اسلوب سلسلة ماركوف للحصول على قيم معدل طول التشغيل (ARL) وقيم الانحراف المعياري لطول التشغيل (SDRL). تحت افتراض بان المتغير تحت السيطرة يخضع لاحدى التوزيعات العشوائية المستمرة. بافتراض بان العملية تتوقف إذا كانت الانحرافات المتراكمة لـ z عن القيمة المرجعية (k) إي (z-k) تصل حد القرار الأعلى (H) أو عندما يكون المجموع المتراكم مساوي للصفر [4, 8].

فقد تم تمثيل للوحة Cusum من جانب واحد بحد اتخاذ القرار ليكون بين الصفر و (h) إي إن (h و 0) بعملية ماركوف بمجال حالة مستمر. ولعدد من الحالات لسلسلة ماركوف تكون مساوية لـ t+1 والتي سميت بـ E₀, E₁, ..., E_t, حيث ان الحالة E_t الحالة المشبعة (Absorbing State).

وان احتمال بقاء السلسلة في نفس الحالة بالخطوة التالية يجب إن يكون مطابق للحالة التي يكون فيها قيمة المجموع المتراكم لا يتغير بأكثر من مقدار صغير ليكن (0.5w) يعني بان القيمة التالية لـ z لا تنحرف عن القيمة المرجعية (k) بمقدار أكثر من (0.5w)، حيث إن القيمة لـ (w) تحدد العرض لفترة التجميع (The grouping interval) التي استعملت لتجزئة التوزيع الاحتمالي لـ z. إذ يتم اختيار قيمة w بعناية كبيرة لأنها تؤثر على خصائص معدل طول التشغيل لطول التشغيل لهذه اللوحة. وأن احتمال الانتقال من الحالة E_i الى الحالة المشبعة E_t ينبغي إن يكون مساوياً لاحتمال بان قيمة المجموع المتراكم للوحة Cusum إي (z-k) تنتقل ما بعد النقطة (h) بالفترة صفر و (h) إي (h و 0) التي تكون تقريبا مناظرة للحالة E_i ولذا اختيرت قيمة w لتكون على وفق الصيغة الآتية:

$$w = \frac{2h}{(2t-1)} \dots (17)$$

$$P_{i0} P_r(E_i E_0) P_r(z-k -i w 0.5w) \dots (18)$$

$$P_{ij} P_r(E_i E_j) P_r((j-i) w 0.5w z-k (j-i) w 0.5w), 1 j t-1 \dots (19)$$

$$P_{it} P_r(E_i E_t) P_r((t-i) w 0.5w z-k) \dots (20)$$

ان $P_r(E_0 E_t) P_r(z-k H)$ تمثل القيمة الاحتمالية لطول التشغيل لأي قيمة w تحقق الصيغة (17) عندما تكون القيمة الاحتمالية لطول التشغيل مساوية لـ $P_r P_r(rw 0.5w z-k rw 0.5w)$ وان القيمة الاحتمالية التجميعية لطول التشغيل مساوية لـ $F_r P_r(z-k rw 0.5w)$. إذ إن طول التشغيل يكون كبير عندما تكون العملية تحت السيطرة في حين يكون صغير عندما تحيد العملية عن السيطرة الإحصائية. ولإيجاد مصفوفة الاحتمالات الانتقالية p تكون على وفق الصيغة الآتية:

$$P \begin{array}{c|c} R & (I R) \\ \hline 0^T & 1 \end{array} \dots (21)$$

اذ أن A مصفوفة وحدة من الرتبة $(t \times t)$ وأن I متجه عمودي من الرتبة $(t \times 1)$ تكون فيه كل عنصر من عناصره مساوية للواحد وأن R مصفوفة جزئية من عناصر مصفوفة الاحتمالات الانتقالية p برتبة $(t \times t)$ والتي يتم حسابها بالاعتماد على الصيغ (18) و (19)، وأن 0 تمثل متجه صفري ذو رتبة $(1 \times t)$. ويتم الحصول على قيم معدل طول التشغيل (ARL) على وفق الصيغة الآتية:

$$ARL_{Cusum}^{\alpha} = e'[\alpha (t-1)] 1(I-R)^{-1} \dots (22)$$

اذ إن طول التشغيل يكون طويل عندما تكون العملية تحت السيطرة في حين يكون قصير عندما تحيد العملية عن السيطرة الإحصائية. يتم الحصول على متجه قيم معدل طول التشغيل ((Average Run Length (ARL)).

أذ يكون ARL_{Cusum}^{α} العنصر رقم $(1) [\alpha (t-1)]$ من متجه معدل طول

التشغيل ذو رتبة $((t+1) \times 1)$ الذي يحسب وفق الصيغة $ARL_{Cusum}^{\alpha} = (I-R)^{-1} 1$ ،

أي يتم تبني عدة قيم لبيدات أخرى للوحة Beta- Binomial Cusum. ولتوضيح ذلك ليكن عدد الحالات المفترضة تحت السيطرة مساوية لـ $t=29$ وقيمة البداية المتنبأة تكون مساوية لـ 0.2 α فان رقم العنصر سيكون مساوي لـ 7 وهكذا لبقية القيم التي يمكن تبنيها ضمن الصفر و الواحد.

وباستعمال العلاقة $(I-R)\underline{\mu}^{(s)} = sR\underline{\mu}^{(s)}$ حيث ان $s=2,3,\dots$ وبالاعتماد على العلاقة بين العزوم العملية والعزوم المركزية (انظر المصدر [2])، يمكن إيجاد متجة الانحراف المعياري لطول التشغيل (Standard Deviation Run Length (SDRL)) على وفق الصيغة الآتية:

$$SDRL_{Cusum}^{\alpha} = \frac{e'[\alpha(t-1)]}{I} \sqrt{2((I-R)^{-1}I)\underline{\mu} - (\underline{\mu})^2} \quad (23)$$

حيث إن أول عنصر بمتجة قيم معدل طول التشغيل يعطي قيم معدل طول التشغيل للوحة Cusum تبدأ من حالة الصفر وبشكل عام من العنصر رقم i ، أي تعطي المعدل لطول التشغيل عندما تبدأ الخطأ من الحالة $(E_i, i = 0, 1, 2, \dots, t)$.

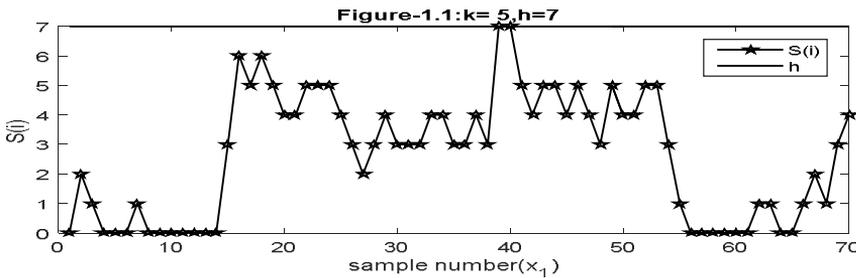
6. الجانب التطبيقي ومناقشة النتائج

يتضمن هذا الجانب عرض الاساليب التي يتم من خلالها تسليط الضوء على اداء لوحات Beta-Binomial Cusum عندما يكون المتغير تحت السيطرة يخضع لتوزيع ثنائي الحدين لمراقبة المتوسط للعملية الإنتاجية تحت السيطرة من خلال تطبيق الصيغ المتقدم ذكرها في الجانب النظري. وقد تم كتابة برامج باستعمال برنامج Matlab -R2018a للحصول على نتائج البحث وفقاً لتوزيع ثنائي الحدين ولتوليفات مختلفة لمعاملات تلك اللوحات ولعدد الحالات في سلسلة ماركوف. اما البيانات المعتمدة لتوزيع ثنائي الحدين فقد كانت عدد الوحدات التالفة في دفعات إنتاجية يومية بحجم (٧٠) دفعة لمنتج منعم الاقمشة عطور احد منتجات الشركة العامة للمنتجات الغذائية- مصنع المأمون والمستحصلة من السجلات قسم السيطرة النوعية أنظر الملحق (A). فقد اختير منتج منعم الاقمشة عطور. حيث تقوم الشركة باستعمال التطبيقات الجاهزة لمراقبة خط الانتاج بتطبيق لوحات السيطرة (لوحة شيوارات و لوحة المدى) الشائعة الاستعمال في كشف الانحرافات الكبيرة في العملية. وبما ان هدف الشركة هو الكشف المبكر عن الخلل وخروج العملية عن السيطرة الإحصائية، وبالتالي تحديد أسباب الخلل وإعادتها تحت السيطرة الإحصائية لتحسين نوعية المنتج وبأقل كلفة ممكنه. فقد استعملت لوحة Cusum عندما يكون المتغير تحت السيطرة يخضع لتوزيع ثنائي الحدين عند توفر معلومة أولية حول معلمة توزيع (P) متمثلة بتوزيع بيتا بالمعلمتين (a,b) والتوزيع المنتظم بالفترة (0,1).

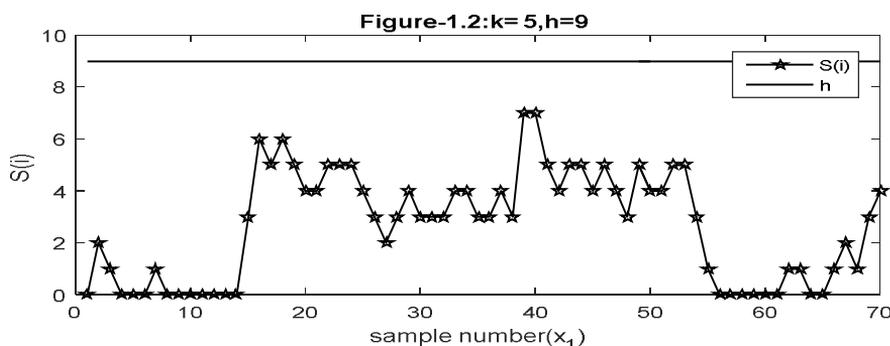
فقد استعمل التطبيق الجاهز Statgraph لأجراء اختبار حسن المطابقة للمنتج منعم الاقمشة عطور لتوزيع ثنائي الحدين. ووفقاً لاختبار حسن المطابقة لتوزيع ثنائي الحدين لمنتج منعم الاقمشة عطور (X_1) ، فقد كان متوسط العملية عند مستوى النوعية المقبول مساوي لـ $\bar{x} = 4.8714$ ثم قدرت معلمتي توزيع ثنائي الحدين استعمال التطبيق الجاهز

Statgraph حيث كانت $n = 9$ و $\hat{p} = 0.54$. وان البيانات تتبع توزيع ثنائي الحدين تحت فرضية العدم بمقارنة قيمة مربع كاي المحسوبة $\chi^2_{cal} = 7.974$ مع قيمة مربع كاي الجدولية بدرجة حرية (3) وبمستوى معنوية $\alpha = 0.01$ أي مع القيمة الجدولية $\chi^2_{table} (3, 0.99) = 11.345$. نلاحظ ان قيمة مربع كاي المحسوبة اقل من قيمة مربع كاي الجدولية وبذلك نقبل فرضية العدم وان البيانات تتبع توزيع ثنائي الحدين.

1.A لوحة Binomial Cusum لمراقبة متوسط العملية
وقد تم رسم لوحة Binomial Cusum لمراقبة متوسط العملية لمنتج منعم الاقمشة عطور (X_1). عندما يكون متوسط العملية عند مستوى النوعية المقبول مساوي لـ 4.86 و $9(0.54)$ $\hat{\mu}_0$ \hat{p}_0 . وان قيم معاملات لوحة Binomial Cusum التي اعتمدت في رسم اللوحة لمنتج منعم الاقمشة عطور (X_1). فقد تم حساب احصاء الاختبار لوحة Binomial Cusum على وفق الصيغة (2). اما قيمة K فقد حسبت على وفق الصيغة (3) و تساوي 5 و 4.86 $\hat{\mu}_0$ K عندما تكون التغير في متوسط العملية مساوي للصفر أي 0 . اما قيمة حد القرار فقد حسبت عند قيمتين الأولى مساوية لـ 7.48 و $5\sqrt{9(0.54)(1-0.54)}$ $5\sqrt{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}$ h . اما القيمة الثانية لحد القرار تكون مساوية لـ 8.97 و $6\sqrt{9(0.54)(1-0.54)}$ $6\sqrt{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}$ h . وكما مبين ادناه في الاشكال (1-1) و (1-2) نلاحظ بان العملية تكون خارج السيطرة وذلك لوجود عدد من العينات خارج السيطرة عندما تكون قيمة حد القرار $h=7$. في حين تكون العملية تحت السيطرة عندما تكون قيمة حد القرار $h=9$. اي ان حساسية اللوحة تزداد بتناقص قيمة حد القرار (h).



الشكل (1-1) يبين لوحة سيطرة Binomial Cusum لمنتج منعم الاقمشة عطور (X_1).



الشكل (1-2) يبين لوحة سيطرة Binomial Cusum لمنهج منع الاقمشة عطور (x_1).

A.2 حساب قيم ARL و قيم SDRL للوحات Beta- Binomial Cusum لغرض لايجاد قيم ARL_{Cusum}^{α} وقيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ لوحة Beta- Binomial Cusum على وفق الصيغتين (22) و(23) وعلى التوالي. ووفقا لاختبار حسن المطابقة لتوزيع ثنائي الحدين لمنهج منع الاقمشة عطور (x_1) ، فقد كان متوسط العملية عند مستوى النوعية المقبول مساوي لـ 4.86 $9(0.54)$ $\hat{n} \hat{p}_0$ ودراسة تأثير معاملات لوحة Beta- Binomial Cusum على قيم ARL_{Cusum}^{α} و $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ ، والتي تم حسابها على وفق الفروض الاتية :

قيمة	حد	القرار	h	تكون	مساوية
7	7.48	$5\sqrt{9(0.54)(1-0.54)}$	$5\sqrt{\hat{n}\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}$	وكذلك h	عندما
9	8.97	$6\sqrt{9(0.54)(1-0.54)}$	h	على وفق الصيغة المبينة في المبحث	

٢. اختيار ستة نماذج من توزيع بيتا كقيم لمعلمتي توزيع بيتا الذي يمثل التوزيع الأولي للمعلمة p لتوزيع ثنائي الحدين وهي كالاتي :-
 $(a, b) = (0.02, 0.02), (0.5, 0.5), (2, 2), (1, 3), (5, 1), (2, 5)$
٣. مفترضين التوزيع المنتظم بالفترة (0,1) الذي يمثل التوزيع الأولي للمعلمة p لتوزيع ثنائي الحدين.
٤. اختيرت عدة قيم لحالات سلاسل ماركوف (t) مساوية لـ 19, 29, 39 .t
٥. اختيار عدة قيم متبناة لبدايات اخرى مختارة لوحة Beta Cusum متمثلة بـ $\alpha = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ التي تمثل رقم العنصر من

المتجهين ARL_{Cusum}^{α} و $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ اذ تحتسب على وفق الصيغة (1) $[\alpha (t-1)]$. فاذا كانت قيمة $t=19$ فان ارقام العناصر التي تناظر ارقام الحالات التالية (1,5,9,13,17) من المتجهين ARL_{Cusum}^{α} و $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$. واذا كانت قيمة $t=29$ فان ارقام العناصر التي تناظر ارقام الحالات التالية (1,7,13,19,25) من المتجهين ARL_{Cusum}^{α} و $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$. اما اذا كانت قيمة $t=39$ فان ارقام العناصر التي تناظر ارقام الحالات التالية (1,9,17,25,33) من المتجهين ARL_{Cusum}^{α} و $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$.

6. يتم حساب الاحتمالات الانتقالية $(P_{ij} = 1, 2, \dots, t)$ للمصفوفة R برتبة $t \times t$ باستخدام التوزيع اللاحق لمعلمة p عندما يكون التوزيع الاولي توزيع بيتا وكما مبين في الصيغة (10)، على وفق الفروض المتقدم ذكرها للمنتج (x_1) .

7. وكذلك يتم حساب الاحتمالات الانتقالية $(P_{ij} = 1, 2, \dots, t)$ للمصفوفة R برتبة $t \times t$ باستخدام التوزيع اللاحق لمعلمة p عندما يكون التوزيع الاولي التوزيع المنتظم بالفترة (0,1) وكما مبين في الصيغة (16)، على وفق الفروض المتقدم ذكرها للمنتج (x_1) .

فقد تم حساب قيم ARL_{Cusum}^{α} وقيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ باستخدام التوزيع اللاحق لمعلمة p الذي يمثل توزيع بيتا بالمعلمتين (a, b) $(mn \sum_{i=1}^m x_i)$ و $(a^{(new)}, b^{(new)})$ $(m \sum_{i=1}^m x_i)$ عندما يكون التوزيع الاولي يخضع توزيع بيتا بالمعلمتين (a, b) وكما مبين في الصيغة (10)، على وفق الفروض المتقدم ذكرها للمنتج (x_1) . وقد لخصت النتائج مما تقدم ذكره بالجدولين (1-1) و(1-2) وكما مبين ادناه. اذ نلاحظ من الجدول (1-1) بان

1. قيم ARL_{Cusum}^{α} وقيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ تكون متناقصة بزيادة عدد الحالات بسلسلة ماركوف (t) عند ثبوت قيمة حد القرار (h) وثبوت قيم معلمتي توزيع بيتا الاولي (a, b) والقيم $(m, n, \sum_{i=1}^m x_i)$ في حالة القيمة المتبناة $(\alpha = 0.0)$ التي تناظر الحالة رقم واحد. وان هناك استقرار بقيم ARL_{Cusum}^{α} عندما تكون فيها $t=39$ ولكل القيم المختارة لمعلمتي توزيع بيتا الاولي (a, b) ، ولكل القيم المتبناة (α) التي تناظر رقم الحالة لسلسلة ماركوف.

2. قيم ARL_{Cusum}^{α} تكون متزايدة بزيادة قيمة معلمتي توزيع بيتا الاولي (a, b) في حالة تساوي القيمتين a و b ، أي عندما تكون قيم معلمتي توزيع

بيتا $(a=b=0.02, 0.5, 2)$ في حين تكون قيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ متناقصة عند

نفس القيم المتقدم ذكرها لـ a و b ، وثبوت قيم (t, m, n, \hat{x}_i^m) .

٣. قيم ARL_{Cusum}^{α} تكون متناقصة في عندما تكون قيمة معلمة توزيع بيتا a اكبر من قيمة b ، أي عندما تكون $(a > b)$ في حين تكون قيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ متزايدة عند نفس القيم المتقدم ذكرها لـ a و b ، وثبوت بقية

القيم (t, m, n, \hat{x}_i^m) .

٤. قيم ARL_{Cusum}^{α} وقيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ تكون متناقصة بزيادة القيمة المتبناة

(α) للوحة Beta Cusum بثبوت القيم $(a, b, m, n, \hat{x}_i^m)$.

عموما نلاحظ بان حساسية لوحة Beta Cusum تزداد بزيادة عدد الحالات في سلسلة ماركوف و يتم الحصول على استقراريه بقيم ARL_{Cusum}^{α} .

وبناء على ما تقدم فقد تم حساب قيم ARL_{Cusum}^{α} و قيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ عندما يكون

عدد الحالات بسلسلة ماركوف $t=39$ وقيمة حد القرار $h=9$ وثبوت القيم (n, \hat{x}_i^m)

a, b, m ، وقد لخصت النتائج في الجدول (1-2) ونلاحظ منه بان قيم ARL_{Cusum}^{α} و

قيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ المبينة في الجدول (1-2) تكون اكبر مقارنة مع نفس القيم المبينة في

الجدول (1-1) عندما تكون قيمة حد القرار $h=7$ بثبوت القيم (a, b, n, \hat{x}_i^m)

$m,$

جدول (1-1) يبين قيم ARL_{Cusum}^{α} و قيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ لوحة Beta Cusum عندما يكون التوزيع الاولي للمعلمة p يخضع لتوزيع بيتا بالمعلمتين (a,b) للمنتج منعم الاقمشة عطور (X_1) بعدد الحالات لسلسلة ماركوف (t) ولكل قيم α المختارة .

Par. For Beta Cusum					α	No. of state	h=7, t=19		No. of state	h=7, t=29		No. of state	h=7, t=39	
a	B	m	\hat{n}	$m_{i=1} X_i$			ARL_{Cusum}^{α}	$SDRL_{Cusum}^{\alpha}$		ARL_{Cusum}^{α}	$SDRL_{Cusum}^{\alpha}$		ARL_{Cusum}^{α}	$SDRL_{Cusum}^{\alpha}$
0.02	0.02	70	9	341	0.0	1	17.472	1.0834	1	14.999	0.038	1	13.000	0.009
					0.2	5	13.81	0.957	7	11.999	0.034	9	11.000	0.003
					0.4	9	10.148	0.812	13	8.999	0.029	17	8.000	3.449e ⁻⁶
					0.6	13	6.486	0.634	19	5.999	0.023	25	5.000	0.006
					0.8	17	2.824	0.381	25	2.999	0.014	33	3.000	0.001
0.5	0.5	70	9	341	0.0	1	17.480	1.081	1	14.999	0.037	1	13.000	0.009
					0.2	5	13.818	0.955	7	11.999	0.033	9	11.000	0.002
					0.4	9	10.154	0.810	13	8.999	0.028	17	8.000	3.445e ⁻⁶
					0.6	13	6.489	0.633	19	5.999	0.022	25	5.000	0.006
					0.8	17	2.825	0.379	25	2.999	0.014	33	3.000	0.001
2	2	70	9	341	0.0	1	17.515	1.072	1	14.999	0.036	1	13.000	0.009
					0.2	5	13.844	0.948	7	11.999	0.032	9	11.000	0.002
					0.4	9	10.172	0.804	13	8.999	0.027	17	8.000	3.434e ⁻⁶
					0.6	13	6.501	0.629	19	5.999	0.022	25	5.000	0.006
					0.8	17	2.829	0.376	25	2.999	0.014	33	3.000	0.001
1	3	70	9	341	0.0	1	17.705	1.019	1	14.999	0.031	1	13.000	0.011
					0.2	5	13.991	0.900	7	11.999	0.027	9	11.000	0.002
					0.4	9	10.278	0.763	13	8.999	0.023	17	8.000	4.921e ⁻⁵
					0.6	13	6.565	0.596	19	5.999	0.018	25	5.000	0.007
					0.8	17	2.852	0.356	25	2.999	0.012	33	3.000	0.001
5	1	70	9	341	0.0	1	17.113	1.164	1	14.998	0.048	1	13.000	0.006
					0.2	5	13.530	1.029	7	11.998	0.043	9	11.000	0.003
					0.4	9	9.947	0.874	13	8.999	0.036	17	8.000	1.692e ⁻⁵
					0.6	13	6.364	0.684	19	5.999	0.029	25	5.000	0.004
					0.8	17	2.781	0.414	25	2.999	0.018	33	3.000	0.001
2	5	70	9	341	0.0	1	17.82	0.983	1	14.999	0.027	1	13.000	0.012
					0.2	5	14.081	0.868	7	11.999	0.024	9	11.000	0.001
					0.4	9	10.343	0.736	13	8.999	0.021	17	8.000	5.857e ⁻⁵
					0.6	13	6.604	0.574	19	5.999	0.016	25	5.000	0.007
					0.8	17	2.865	0.342	25	2.999	0.010	33	3.000	0.001

جدول (1-2) يبين قيم ARL_{Cusum}^{α} و قيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ لوحة Beta Cusum عندما يكون التوزيع الاولي للمعلمة p يخضع لتوزيع بيتا بالمعلمتين (a,b) للمنتج منعم الاقمشة عطور (x_1) بعدد الحالات لسلسلة ماركوف ($t=39$) ولكل قيم α المختارة.

Par. For Beta Cusum					α	No. of state	h=9, t=39		Par. For Beta Cusum					α	No. of state	h=9, t=39	
a	b	m	\hat{n}	m_{i-1}			ARL_{Cusum}^{α}	$SDRL_{Cusum}^{\alpha}$	a	b	\hat{n}	m_{i-1}	ARL_{Cusum}^{α}			SD	
0.02	0.02	70	9	341	0.0	1	19.756	0.434	1.00	3.00	1	9	341	0.0	1	19.807	0.397
					0.2	9	15.803	0.400				9		0.2	9	15.845	0.364
					0.4	17	11.852	0.356				17		0.4	17	11.884	0.321
					0.6	25	7.903	0.296				25		0.6	25	7.924	0.264
					0.8	33	3.957	0.202				33		0.8	33	3.967	0.179
0.5	0.5	70	9	341	0.0	1	19.759	0.432	5	1	70	9	341	0.0	1	19.677	0.479
					0.2	9	15.805	0.398						0.2	9	15.737	0.446
					0.4	17	11.853	0.354						0.4	17	11.801	0.402
					0.6	25	7.904	0.294						0.6	25	7.868	0.338
					0.8	33	3.958	0.201						0.8	33	3.941	0.235
2	2	70	9	341	0.0	1	19.767	0.427	2	5	70	9	341	0.0	1	19.831	0.376
					0.2	9	15.812	0.393						0.2	9	15.864	0.343
					0.4	17	11.859	0.349						0.4	17	11.899	0.302
					0.6	25	7.908	0.289						0.6	25	7.934	0.248
					0.8	33	3.959	0.197						0.8	33	3.971	0.167

فقد تم حساب قيم ARL_{Cusum}^{α} وقيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ باستخدام التوزيع اللاحق لمعلمة p الذي يمثل توزيع بيتا بالمعلمتين $(a^{(new)}, b^{(new)})$ عندما يكون التوزيع الاولي يخضع للتوزيع المنتظم بالفترة (0,1) وكما مبين في الصيغة (16)، على وفق الفروض المتقدم ذكرها للمنتج (x_1). وقد لخصت النتائج مما تقدم ذكره بالجدولين (٢-٢) و (٢-١) وكما مبين ادناه. اذ نلاحظ من الجدول (2-1) بان

١. قيم ARL_{Cusum}^{α} وقيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ تكون متناقصة بزيادة عدد الحالات بسلسلة ماركوف (t) عند ثبوت قيمة حد القرار (h) وثبوت القيم $(m, n, \hat{n}, m_{i-1}, x_i)$.

٢. قيم ARL_{Cusum}^{α} وقيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ تكون متناقصة بزيادة القيمة المتبناة (α) للوحة Beta Cusum بثبوت القيم $(m, n, \hat{m}_{i1}x_i)$.

عموما نلاحظ بان حساسية لوحة Beta Cusum تزداد بزيادة عدد الحالات في سلسلة ماركوف و يتم الحصول على استقرارية بقيم ARL_{Cusum}^{α} . وبناء على ما تقدم فقد تم حساب قيم ARL_{Cusum}^{α} وقيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ عندما يكون عدد الحالات بسلسلة ماركوف $t=39$ و قيمة حد القرار $h=9$ وثبوت القيم $(m, n, \hat{m}_{i1}x_i)$ وقد لخصت النتائج في الجدول (2-2) ونلاحظ منه :-

١. بان قيم ARL_{Cusum}^{α} وقيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ المبينة في الجدول (2-2) تكون اكبر مقارنة مع نفس القيم المبينة في الجدول (2-1) عندما تكون قيمة حد القرار $h=7$ بثبوت قيم $(m, n, \hat{m}_{i1}x_i)$.

جدول (2-1) يبين قيم ARL_{Cusum}^{α} وقيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ لوحة Beta Cusum عندما يكون التوزيع الاولي للمعلمة p يخضع للتوزيع المنتظم بالفترة $(0,1)$ للمنتج منعم الاقمشة عطور (x_1) بعدد الحالات لسلسلة ماركوف (t) ولكل قيم α المختارة.

Par. For Beta Cusum					α	No. of state	h=7, t=19		No. of state	h=7, t=29		No. of state	h=7, t=39	
a	b	m	\hat{n}	$\hat{m}_{i1}x_i$			ARL_{Cusum}^{α}	$SDRL_{Cusum}^{\alpha}$		ARL_{Cusum}^{α}	$SDRL_{Cusum}^{\alpha}$		ARL_{Cusum}^{α}	$SDRL_{Cusum}^{\alpha}$
0	1	70	9	341	0.0	1	17.494	1.077	1	14.999	0.036	1	13.000	0.009
					0.2	5	13.827	0.952	7	11.999	0.032	9	11.000	0.002
					0.4	9	10.16	0.807	13	8.999	0.027	17	8.000	3.44e ⁻⁵
					0.6	13	6.493	0.631	19	5.999	0.022	25	5.000	0.005
					0.8	17	2.826	0.378	25	2.999	0.013	33	3.000	0.001

جدول (2-2) يبين قيم ARL_{Cusum}^{α} وقيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ لوحة Beta Cusum عندما يكون التوزيع الاولي للمعلمة p يخضع للتوزيع المنتظم بالفترة $(0,1)$ للمنتج منعم الاقمشة عطور (x_1) بعدد الحالات لسلسلة ماركوف $(t=39)$ ولكل قيم α المختارة.

Par. For Beta Cusum					α	No. of state	h=9, t=39	
a	b	m	\hat{n}	$\hat{m}_{i1}x_i$			ARL_{Cusum}^{α}	$SDRL_{Cusum}^{\alpha}$
0.02	0.02	70	9	341	0.0	1	19.756	0.434
					0.2	9	15.803	0.400
					0.4	17	11.852	0.356
					0.6	25	7.903	0.296
					0.8	33	3.957	0.202

الاستنتاجات

أهم الاستنتاجات التي تم التوصل إليها من خلال نتائج البحث بشكل عام :-
 أولاً:- لوحات الـ Beta Cusum باستخدام التوزيع اللاحق لمعلمة p الذي يمثل
 توزيع بيتا بالمعلمتين

$(a^{(new)}, b^{(new)})$ $(mn, \sum_{i=1}^m x_i)$ عندما يكون التوزيع

الاولي يخضع توزيع بيتا بالمعلمتين (a, b) :-

١. بان حساسية لوحات الـ Beta Cusum تزداد بتناقص قيمة حد القرار (h) وزيادة القيمة المتنبأة (α) ، وزيادة عدد الحالات في سلسلة ماركوف (t) من خلال تناقص قيم معيار ARL_{Cusum}^{α} التي تمثل معدل طول التشغيل والذي يمثل معدل عدد العينات المفحوصة لغاية ورود ما يشير الى ان العملية اصبحت خارج السيطرة وقيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ ، بثبوت بقية القيم $(m, n, \sum_{i=1}^m x_i)$.

٢. تزايد قيم ARL_{Cusum}^{α} وتناقص قيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ تكون متزايدة بزيادة قيمة a و b في حالة تساوي القيمتين a و b بزيادة قيمة a و b في حالة تساوي القيمتين a و b، بثبوت قيمة h و t وبقية القيم $(m, n, \sum_{i=1}^m x_i)$

٣. تناقص قيم ARL_{Cusum}^{α} وتزداد قيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ عندما تكون قيمة a أكبر من b ، $(a > b)$ ، بثبوت قيمة h و t وبقية القيم $(m, n, \sum_{i=1}^m x_i)$.

ثانياً:- لوحات الـ Beta Cusum باستخدام التوزيع اللاحق لمعلمة p الذي يمثل
 توزيع بيتا بالمعلمتين

$(a^{(new)}, b^{(new)})$ $(mn, \sum_{i=1}^m x_i + 1)$ عندما يكون

التوزيع الاولي يخضع للتوزيع المنتظم بالفترة $(0, 1)$:-

١. بان حساسية لوحات الـ Beta Cusum تزداد بتناقص قيمة حد القرار (h) وزيادة القيمة المتنبأة (α) ، وزيادة عدد الحالات في سلسلة ماركوف (t) من خلال تناقص قيم معيار ARL_{Cusum}^{α} التي تمثل معدل طول التشغيل والذي يمثل معدل عدد العينات المفحوصة لغاية ورود ما

يشير الى ان العملية اصبحت خارج السيطرة وقيم $SDRL_{Cusum}^{\alpha}$ ، بثبوت بقية القيم $(m, n, \hat{\mu}, \sum_{i=1}^m x_i)$.

٨. التوصيات

من خلال بحثنا هذا نوصي العاملين في قطاعات الصناعة بصورة خاصة والباحثين بصورة عامة باعتماد لوحات سيطرة الإحصائية كلوحات المجموع المتراكم (Cusum) او لوحات المتوسط المتحرك الموزون اسيا (EWMA) للكشف عن الانحرافات الصغيرة في العملية لتحسين نوعية المنتج وباقل الكلف . واستعمال أسلوب بيز الذي يعتمد على معرفة المعلومة الأولية عند تقدير معالم لوحات السيطرة المتقدم ذكرها.

References

1. Angelo Marcio Olive ira Sant' Anna, (2012). process monitoring for nonconforming proportion in manufacturing.Congreso Latino-Iberoamericano de Investigacion Operativa .Rio de Janeiro, Brazil.
2. Bayer ,F.,M., Tondolo ,C., M., Muller, F., M.,(2018). Beta regression control chart for monitoring fractions and proportions. Preprint submitted to Computers & Industrial Engineering.
3. Bickel, P.J. & Doksum , K. A., (1977) . Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics. Holden- Day, Inc., San Francisco.
4. Brook, D. and Evans, D. A. (1972). An approach to the probability distribution of CUSUM run length. Biometrika, 59, 539-549.
5. Feltz C. J. and Shiau J.-J. H. (20٠1). Statistical process monitoring using an empirical bayes multivariate process kontrol chart. Quality and reliability engineering international.17: 119–124.
6. Menzefricke, U. (2002). On the evaluation of control chart limits based on predictive distributions. Communication Statistics-Theory and Methods, 31(8), 1423–1440.
7. Monfared ,M. E. D., and Lak F.(2017) . Bayesian Estimation of the Change Point Using CUSUM Control Chart. The Indian Journal of Statistics, Volume 79-B, Part 1, pp. 94-111.
8. Montgomery, D. C. (1997). Introduction to Statistical Quality control. 3rd ed., John Wily & Sons Inc., New York.
9. Page, E. S., (1954). Continuous inspection schemes. Biometrika, 41(1-2), 100-114.
10. Riaz ,M and Ali ,S. ,(2019).On Designing a New Bayesian Dispersion Chart for Process Monitoring. [Arabian Journal for Science and Engineering](#) .22-07-2019 | Research Article - Systems Engineering .
11. Riaz, M. (2011). Monitoring of Process Parameters Using Bayesian Methodology. International Journal of Agricultural and Statistical Sciences, 7(1). 1–7.
12. Van Zy ,R.,(2016).Bayesian Control Charts Based on Predictive Distributions. thesis submitted in fulfillment of the degree of Doctor of Philosophy in the Faculty of Natural and Agricultural Sciences, Department of Mathematical Statistics and Actuarial Science.

ملحق A- التوزيع اللاحق لمعلمة p باستعمال توزيع بيتا كتوزيع اولي :

لاشتقاق التوزيع اللاحق باستعمال توزيع بيتا، نتبع الخطوات الآتية. عندما يكون التوزيع الأولي للمعلمة p يخضع لتوزيع بيتا بدالة كثافة احتمالية (pdf) بالمعلمتين a و b المقترح استخدامها في التقدير يكون على وفق الصيغة الآتية [3]:

$$\pi_1(p) \propto \frac{1}{B(ab)} p^{(a-1)} (1-p)^{(b-1)} \text{ for } 0 < p < 1, a, b > 0 \quad \dots(A.1)$$

إذ إن $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ تمثل دالة بيتا. وبذلك فإن التوزيع اللاحق للمعلمة p بمعلومية

البيانات المعطاة $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ يكون وفق الآتي :

$$g_1(p|x) = \frac{L(\underline{x}|p) \pi_1(p)}{\int_0^1 L(\underline{x}|p) \pi_1(p) dp} \quad \dots(A.2)$$

حيث إن $L(\underline{x}|p)$ تكون على وفق الصيغة الآتية:-

$$L(\underline{x}|p) = \prod_{i=1}^m C_{x_i}^n p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} \quad \dots(A.3)$$

بتعويض الصيغة (A.1) والصيغة (6) في الصيغة (A.2)، نحصل على

$$g_1(p|x) = \frac{\prod_{i=1}^m C_{x_i}^n p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} \left[\frac{1}{B(ab)} p^{(a-1)} (1-p)^{(b-1)} \right]}{\int_0^1 \prod_{i=1}^m C_{x_i}^n p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} \left[\frac{1}{B(ab)} p^{(a-1)} (1-p)^{(b-1)} \right] dp} \quad \dots(A.4)$$

$$g_1(p|x) = \frac{p^{\sum_{i=1}^m x_i - a} (1-p)^{mn - \sum_{i=1}^m x_i - b}}{\int_0^1 p^{\sum_{i=1}^m x_i - a} (1-p)^{mn - \sum_{i=1}^m x_i - b} dp} \quad \dots(A.5)$$

لغرض تبسيط التكامل وتحويله إلى تكامل دالة pdf لجعله مساوي للواحد يتم ضرب التكامل بالصيغة (A.5) بمقدار مساوي لـ

$$\left(\frac{B(\sum_{i=1}^m x_i - a, mn - \sum_{i=1}^m x_i - b)}{B(\sum_{i=1}^m x_i - a, mn - \sum_{i=1}^m x_i - b)} \right)$$

وان $B(.,.)$ تمثل دالة بيتا، وبالتبسيط للحصول على دالة pdf نحصل على

$$g_i(p \setminus x) = \frac{1}{B((\binom{m}{i-1} x_i a), (mn - \binom{m}{i-1} x_i b))} p^{\binom{m}{i-1} x_i a - 1} (1-p)^{(mn - \binom{m}{i-1} x_i b) - 1} \dots (A.6)$$

إذ إن $A(x; p)$ تكون مساوية لتكامل دالة pdf لتوزيع بيتا بالمعلمتين $(a^{(new)}, b^{(new)})$ وعلى وفق الصيغة أدناه:-

$$A(x; p) = \int_0^1 \frac{1}{B((\binom{m}{i-1} x_i a), (mn - \binom{m}{i-1} x_i b))} p^{\binom{m}{i-1} x_i a - 1} (1-p)^{(mn - \binom{m}{i-1} x_i b) - 1} dp \dots (A.7)$$

وبذلك نحصل على التوزيع اللاحق للمعلمة p بمعلومية البيانات (x_1, x_2, \dots, x_m) بالمعلمتين الجديدة $(a^{(new)}, b^{(new)})$ المبينة أدناه:

$$g_i(p \setminus x) = \frac{1}{B((\binom{m}{i-1} x_i a), (mn - \binom{m}{i-1} x_i b))} p^{\binom{m}{i-1} x_i a - 1} (1-p)^{(mn - \binom{m}{i-1} x_i b) - 1} \text{ for } 0 < p < 1$$

$$n, m, a, b > 0 \dots (A.13)$$

وبذلك يكون التوزيع اللاحق للمعلمة p هو كالاتي:-

$$g_i(p \setminus x) \sim \text{Beta distribution } (a^{(new)}, b^{(new)})$$

ملحق B – طريقة العزوم (Method of Moments (MOM)) لاشتقاق معلمتي توزيع بيتا في هذه الطريقة يتم ايجاد عزوم التوزيع للمجتمع أولاً ومن ثم مساواتها بعزوم العينة المناظرة لها، وذلك بجعل معلمتي توزيع بيتا دالتين (إحصائيتين) من مشاهدات العينة وكما مبين في أدناه [3]: وان العزم من الرتبة r للمجتمع يكون وفق الصيغة الآتية:

$$M_r = E x^r \dots (B.1)$$

وان العزم من الرتبة r للعينة يكون وفق الصيغة الآتية:

$$m_r = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i^r \dots (B.2)$$

وبمساواة العزمين للمجتمع والعينة نحصل على:

$$M_1 = m_1 \dots (B.3)$$

أولاً: إن العزم الأول ($r=1$) في الصيغة (B.1) ما هو إلا عبارة عن المتوسط للمجتمع.

$$M_1 = E(x) = \mu = \frac{a}{a+b} \dots (B.4)$$

وان متوسط العينة (العزم الأول) يكون بتعويض ($r=1$) في الصيغة (B.2) وفق الصيغة الآتية:

$$m_1 = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} \dots (B.5)$$

وبمساواة العزمين للمجتمع وللعينة وبالاعتماد على عزوم توزيع بيتا إي M_1 ، إي إن

$$\frac{\hat{a}}{\hat{a} + \hat{b}} = \bar{x} \dots (B.6)$$

ثانياً: إن العزم الثاني ($r=2$) في ال صيغة (B.1) للمجتمع سيكون كالآتي:

$$M_2 = E(x^2) = \text{Var}(x) + (E(x))^2 \dots (B.7)$$

وحيث ان تباين توزيع بيتا يكون وفق الصيغة الآتية:

$$\text{var}(x) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \dots (B.8)$$

بتعويض تباين توزيع بيتا بالصيغة (B.8) بالصيغة (B.7) نحصل على

$$M_2 = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} + (\mu)^2 \dots (B.9)$$

وان العزم الثاني للعينة يكون بتعويض ($r=2$) في الصيغة (B.2) وفق الصيغة الآتية:

$$m_2 = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2 \dots (B.10)$$

وبمساواة العزمين للمجتمع وللعينة إي $M_2 = m_2$ وبالاعتماد على عزوم توزيع بيتا إي إن

$$\frac{\hat{a} \hat{b}}{(\hat{a} + \hat{b})^2 (\hat{a} + \hat{b} + 1)} + (\hat{\mu})^2 = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2 \dots (B.11)$$

وبالتعويض عن \bar{x} بالصيغة (B.11) والتبسيط نحصل على

$$S^2 = \frac{\hat{a} \hat{b}}{(\hat{a} \hat{b})^2 (\hat{a} \hat{b} 1)} \quad \dots(B.12)$$

$$S^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

حيث إن S^2 سيتم إيجاد مقدر المعلمة b بدلالة مقدر a من الصيغة (B.6) كما يلي:

$$\begin{aligned} \hat{a} \bar{x} (\hat{a} \hat{b}) &= \hat{a} \bar{x} \hat{a} \bar{x} \hat{b} \\ \hat{a} \bar{x} \hat{a} \bar{x} \hat{b} &= \hat{a} \bar{x} \hat{a} \bar{x} \hat{b} \\ \hat{a} (1 - \bar{x}) \bar{x} \hat{b} &= \hat{a} \bar{x} \hat{a} \bar{x} \hat{b} \end{aligned}$$

$$\hat{b} = \frac{\hat{a}}{\bar{x}} \hat{a} \quad \dots(B.13)$$

ثانياً: سيتم إيجاد مقدر المعلمة a من الصيغة (B.12) كما يلي:

$$\hat{a} \hat{b} S^2 (\hat{a} \hat{b})^2 (\hat{a} \hat{b} 1) \quad \dots(B.14)$$

وبتعويض b المبينة بالصيغة (B.13) في الصيغة (B.14) نحصل على:

$$\begin{aligned} \hat{a} \left(\frac{\hat{a}}{\bar{x}} \hat{a} \right) S^2 (\hat{a} \left(\frac{\hat{a}}{\bar{x}} \hat{a} \right))^2 (\hat{a} \left(\frac{\hat{a}}{\bar{x}} \hat{a} \right) 1) &= \frac{\hat{a}^2}{\bar{x}} \hat{a}^2 S^2 \left(\frac{\hat{a}}{\bar{x}} \right)^2 \left(\frac{\hat{a}}{\bar{x}} 1 \right) \\ \hat{a} \left(\frac{1}{\bar{x}} 1 \right) \hat{a}^2 \left(\frac{1}{\bar{x}} \right)^2 \left(\frac{\hat{a}}{\bar{x}} 1 \right) S^2 &= \left(\frac{1}{\bar{x}} 1 \right) \left(\frac{1}{\bar{x}} \right)^2 \left(\frac{\hat{a}}{\bar{x}} 1 \right) S^2 \\ \left(\frac{1}{\bar{x}} 1 \right) \frac{\hat{a}^2}{S^2} \left(\frac{\hat{a}}{\bar{x}} 1 \right) &= \left(\frac{1}{\bar{x}} \right) \frac{\hat{a}^2}{S^2} \left(\frac{\hat{a}}{\bar{x}} 1 \right) \frac{\hat{a}}{\bar{x}} \left(\frac{1 - \bar{x}}{S^2} 1 \right) \\ \hat{a}_{\text{mom}} \frac{(1 - \bar{x}) \hat{a}}{S^2} &= \dots(B.15) \end{aligned}$$

يمكن اعادة كتابة مقدر المعلمة b بدلالة مقدر a من الصيغة (B.13) على وفق الاتي:

$$\hat{b} = \hat{a} \left(\frac{1 - \bar{x}}{\bar{x}} \right) \quad \dots (B.16)$$

بتعويض \hat{a} المبينة بالصيغة (B.15) في الصيغة (B.16) نحصل على مقدر المعلمة b :

$$\hat{b} = \bar{x} \left(\frac{(1 - \bar{x})\bar{x}}{S^2} - 1 \right) \left(\frac{1 - \bar{x}}{\bar{x}} \right)$$

$$\hat{b}_{\text{mom}} = (1 - \bar{x}) \left(\frac{(1 - \bar{x})\bar{x}}{S^2} - 1 \right) \quad \dots (B.17)$$

ملحق C- التوزيع اللاحق لمعلمة p باستعمال التوزيع المنتظم بالفترة (0,1) كتوزيع اولي:

لاشتقاق التوزيع اللاحق باستعمال التوزيع المنتظم بالفترة (0,1)، نتبع الخطوات الاتية. عندما يكون التوزيع الأولي للمعلمة p يخضع التوزيع المنتظم بالفترة (0,1)، بدالة كثافة احتمالية (pdf) لمقترح استخدامها في التقدير يكون على وفق الصيغة الآتية [3]:

$$\pi_2(p) \propto 1 \quad \text{for } 0 < p < 1 \quad \dots (C.1)$$

وبذلك فان التوزيع اللاحق للمعلمة p بمعلومية البيانات المعطاة (x_1, x_2, \dots, x_m) يكون وفق الأتي:

$$g_2(p|x) = \frac{L(\underline{x}|p) \pi_2(p)}{\int_0^1 L(\underline{x}|p) \pi_2(p) dp} \quad \dots (C.2)$$

حيث إن $L(\underline{x}|p)$ تكون على وفق الصيغة الآتية:-

$$L(\underline{x}|p) = \prod_{i=1}^m C_{x_i}^n p^{x_i-1} (1-p)^{n-x_i} \quad \dots (C.3)$$

بتعويض الصيغة (C.1) والصيغة (6) في الصيغة (C.2)، نحصل على

$$g_2(p \setminus x) = \frac{\prod_{i=1}^m C_{x_i}^n p^{i-1} (1-p)^{mn-i} [1]}{\int_0^1 \prod_{i=1}^m C_{x_i}^n p^{i-1} (1-p)^{mn-i} [1] dp} \quad \dots(C4)$$

$$g_2(p \setminus x) = \frac{p^{\binom{m}{i-1}-1} (1-p)^{\binom{mn-m}{i-1}-1}}{\int_0^1 p^{\binom{m}{i-1}-1} (1-p)^{\binom{mn-m}{i-1}-1} dp} \quad \dots(C5)$$

لغرض تبسيط التكامل وتحويله إلى تكامل دالة pdf لجعله مساوي للواحد يتم ضرب التكامل بالصيغة (C.5) بمقدار مساوي لـ

$$\left(\frac{B(\binom{m}{i-1} x_i - 1, \binom{mn-m}{i-1} x_i - 1)}{B(\binom{m}{i-1} x_i - 1, \binom{mn-m}{i-1} x_i - 1)} \right)$$

وان $B(\dots)$ تمثل دالة بيتا، وبالتبسيط للحصول على دالة pdf نحصل على

$$g_2(p \setminus x) = \frac{1}{B(\binom{m}{i-1} x_i - 1, \binom{mn-m}{i-1} x_i - 1) C(x;p)} p^{\binom{m}{i-1}-1} (1-p)^{\binom{mn-m}{i-1}-1} \quad \dots(C6)$$

إذ إن $C(x;p)$ تكون مساوية لتكامل دالة pdf لتوزيع بيتا بالمعلمتين

$(a^{(new)} = \binom{m}{i-1} x_i - 1, b^{(new)} = \binom{mn-m}{i-1} x_i - 1)$ وعلى وفق الصيغة أدناه:-

$$C(x;p) = \int_0^1 \frac{1}{B(\binom{m}{i-1} x_i - 1, \binom{mn-m}{i-1} x_i - 1)} p^{\binom{m}{i-1}-1} (1-p)^{\binom{mn-m}{i-1}-1} dp \quad \dots(C7)$$

وبذلك نحصل على التوزيع اللاحق للمعلمة p بمعلومية البيانات $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ بالمعلمتين الجديدة $(a^{(new)}, b^{(new)})$ المبينة أدناه :

$$g_2(p \setminus x) = \frac{1}{B\left(\binom{m}{i-1} x_i - 1, (mn - \binom{m}{i-1} x_i - 1)\right)} p^{\binom{m}{i-1} x_i - 1} (1-p)^{(mn - \binom{m}{i-1} x_i - 1)} \text{ for } 0 < p < 1$$

$$n, m > 0 \quad \dots (C.13)$$

وبذلك يكون التوزيع اللاحق للمعلمة p هو كالاتي :-

$$g(p \setminus x) \sim \text{Beta distribution } (a_{(new)} = \binom{m}{i-1} x_i - 1, b_{(new)} = (mn - \binom{m}{i-1} x_i - 1))$$