تقريب المعدل والانحراف المعياري لأطوال التشغيل باستعمال أسلوب سلسلة ماركوف للوحتي سيطرة (المجموع المتراكم (Binomial Cusum)والمتوسط المتحرك الموزون اسيا ((Binomial EWMA)

د. حنان عباس ناصر – أستاذ مساعد
الجامعة التقنية الوسطى-الكلية التقنية الادارية

الخلاصة

في هذا البحث نقرب المعدل والانحراف المعياري لأطوال التشغيل باستعمال أسلوب سلسلة ماركوف للوحتي سيطرة المجموع المتراكم (cumulative sum (Cusum))والمتوسط المتحرك الموزون اسيا (Exponentially Weighted Moving Average (EWMA)) للكشف عن الانحرافات الموجبة في متوسط العملية عندما تكون العملية تتبع توزيع ثنائي الحدين بمتوسط غير معلوم.

فقد اعتمد المعدل والانحراف المعياري لطول التشغيل للوحة سيطرة المجموع المتراكم (Cusum) ولوحة المتوسط المتحرك الموزون اسيا (EWMA) كمعيار للمقارنة بين تلك اللوحات عندما يكون المتغير تحت السيطرة يتبع توزيع ثنائي الحدين. اذ استعملت تلك اللوحتين لمراقبة متوسط العملية عندما المشاهدات (منتج اختير من مصنع المأمون) تكون مستقلة ومتطابقة التوزيع (iid) من توزيع ثنائي الحدين بعملية تصنيع مستمرة. اذ افترضنا عدة قيم لمعلمات للوحتي سيطرة الـ Binomial Cusum والـ Binomial EWMA ولعدد حالات لسلسلة ماركوف. وقد استحصلت نتائج البحث باستعمال برامج مكتوبة ببرنامج Matlab -R2018 a. تبين نتائج البحث بان لوحاتي سيطرة الـ Binomial Cusum والـ Binomial EWMA كانت حساسة أكثر عند قيم معينة لمعلمات لوحتي سيطرة الـ Binomial Cusum والـ Binomial EWMA ولعدد الحالات في سلسلة ماركوف.

المصطلحات الرئيسية للبحث: لوحات السيطرة، المجموع المتراكم، لوحة المتوسط المتحرك الموزون اسيا، سلاسل ماركوف، توزيع ثنائي الحدين، المعدل طول التشغيل (ARL)، الانحراف المعياري لطول التشغيل (SDRL).

Abstract

In this study, the average and the standard deviation for run lengths approximated by markov chain approach of cumulative sum (Cusum) and The exponentially weighted moving average (EWMA) control charts, to detect positive shifts in the mean of the process for the binomial distribution with unknown mean. We depend on average Run Length (ARL), Standard Deviation Run Length (SDRL) as comparative between control charts, when the variable under control follows Binomial Distribution. Also, we used the Cusum and the EWMA control charts for monitoring a process mean when the observations (product is Binomial Distribution) in continuous manufacturing. We assumed several values for the parameters of the Binomial Cusum and the Binomial EWMA control charts, and several state numbers for markov chain. The results were obtained by using Programs written using matlab-R2018a program. The results shown that Binomial Cusum and Binomial EWMA control charts control charts for Binomial Distribution were more sensitive at certain values for the parameters of the Binomial Cusum and the Binomial EWMA control charts. at certain values for the state number of markov chain.

Key Words: control charts, cumulative sum (Cusum), the Exponentially Weighted Moving Average (EWMA), markov chains, the Binomial Distribution, Average Run Length (ARL), Standard Deviation Run Length (SDRL).

1. المقدمة

تستعمل لوحة السيطرة لمراقبة عمليات السيطرة الإحصائية لتشخيص الأسباب غير العادية والتي تمثل حالة الخروج عن السيطرة الإحصائية واجراء تغيير في العملية واعادتها الى السيطرة الإحصائية. فقد طورت العديد من الطرق الإحصائية المختلفة لمراقبة العديد من المجالات منها مجال الرعاية الصحية ومجال الصناعة وغيرها من المجالات. ان اغلب تصاميم لوحات السيطرة الإحصائية مبنية على فرضية التوزيع الطبيعي لخاصية النوعية القابلة للقياس (للمتغير قيد البحث). وفي العديد من الحالات التطبيقية والعملية لدينا أسباب لاعتقاد بان خاصية النوعية للمتغير قيد البحث تنحرف عن خضوعها للتوزيع الطبيعي.اذ تعد لوحات السيطرة للصفات أداة مهمة في عملية السيطرة الإحصائية لمراقبة عدد الوحدات التالفة في العملية او عدد العيوب في الوحدة المنتجة. والتي لا تخضع فيه عدد الوحدات التالفة في العملية او عدد العيوب في الوحدة المنتجة لأي من المتغيرات المستمرة كما هو الحال في لوحات السيطرة المتمثلة بـ p و np و c. فقد استعملت لوحتي بـ p و n p على نطاق واسع لمراقبة نسب المعيب لاي عملية. وقد قدم Page (1954) [8] لوحة السيطرة المجموع المتراكم (cumulative sum (Cusum)) وقدم Roberts (1959) [9] لوحة المتوسط المتحرك الموزون اسيا (Exponentially Weighted Moving Average

((EWMA) لكشف عن الانحرافات الصغيرة والمتوسطة في العملية الإنتاجية. وعادة يتم تقييم أداء لوحة السيطرة بدلالة معدلات اطوال التشغيل لتلك اللوحة. اذ يعرف طول التشغيل ((Run Length(RL) بانه عدد الإحصاءات المرسومة لحين ظهور اول تجاوز لاحصاءة لوحة السيطرة لحدي السيطرة. ويتم الاعتماد على معيار معدل طول التشغيل ((Average Run Length(ARL) لغرض المقارنة بين لوحات السيطرة والذي يعرف بأنه معدل عدد العينات المفحوصة لحين ورود إلى ما يشير إلى إن العملية أصبحت خارج السيطرة ويكون هذا المعدل كبير عندما تكون العملية تحت السيطرة في حين يكون صغير عندما تحيد العملية عن السيطرة الاحصائية.

وقد استعملت عدة أساليب لحساب قيم ARL للوحة المجموع المتراكم (Cusum)، منها أسلوب سلاسل ماركوف المقترح من قبل الباحثان Brook وEvans [3] في عام 1972 الذي يمتاز بسهولته بدلا من أسلوب اختبار النسبة الاحتمالية المتسلسل ((Sequential Probability Ration Test (SPRT الذي يتطلب فيها حل معادلات تكاملية لإيجاد العدد المتوسط للعينة. وقد استعمل الباحث Borror وآخرون معه [2] أسلوب سلسلة ماركوف لحساب قيم ARL للوحة سيطرة الـ EWMA .ونظرا للتطبيقات الواسعة الاستعمال للوحات السيطرة على النوعية في كافة المجالات الصناعية والاقتصادية. فقد تناول العديد من الباحثين دراسة وتحليل لوحة الـ Cusum ولوحة الـ EWMA عندما يكون المتغير تحت السيطرة يخضع للتوزيعات المتقطعة متمثلة بتوزيع بواسون او توزيع ثنائي الحدين نذكر منها: -

في عام 1972 استخدم الباحثان Brook وEvans [3] أسلوب سلاسل ماركوف لدراسة خصائص التوزيع الاحتمالي لطول التشغيل للوحة المجموع المتراكم (Cusum) من جانب واحد الأعلى عندما تكون العملية تحت السيطرة تخضع للتوزيع الاحتمالي المستمر أو المتقطع (توزيع بواسون). وتناول الباحث Borror وآخرون معه [2] في عام 1998 دراسة لوحة السيطرة الـ Poisson EWMA عندما تكون مشاهدات العملية تحت السيطرة تخضع لتوزيع بواسون مع لوحة السيطرة – c لشيوارت لنسب المعيب. اذ استعمل أسلوب سلسلة ماركوف لحساب قيم معدل طوال التشغيل. فقد اعتمد على تقريب قيم احصاءة الاختبار للوحة السيطرة الى اعداد صحيحة عند حساب القيم الاحتمالية لمصفوفة الاحتمالات الانتقالية التي تعتمد لحساب معدل طول التشغيل.

وفي عام ٢٠١٢ استعمل الباحث Angelo [1] لوحة بيتا (Beta chart)لبيانات تمثل النسب التي تكون قيمها مقيدة بين الصفر والواحد المستحصلة من مراقبة عملية تصنيع الحامض النتريكي. فقد قرب الباحث Angelo تلك البيانات بتوزيع بيتا، اذ تم تكوين حدود لوحة بيتا استندا على توزيع بيتا. وتبين نتائج البحث بان لوحة Beta تعد افضل مقارنة بلوحة شيوارت في حالة العملية تكون تحت السيطرة وخارج السيطرة وفقا لقيم متوسط طول التشغيل المعتمدة كمعيار للمقارنة .وان لوحة

بيتا تعطي دقة اكبر مقارنة بلوحة شيوا رت وتكون اسرع في كشف الانحرافات في العملية التي تكون خارج السيطرة .

وفي عام ٢٠١٣ تحرى الباحث Edokpa واخرون معه [4] تطوير معالجة بسيطة لاستحصال قيم معدل طول التشغيل (ARL) للوحة Cusum وفقا لمعلمات توزيع ثنائي الحدين ،عندما تكون المشاهدات تخضع لتوزيع بواسون بمعلمتين مختلفة. فقد استعمل الباحثون طريقة مماثلة لطريقة Johnson و Leone [6] ومقارنة التغير في معلمات التوزيع على قيم ARL مع التغيرات بمعلمات لوحة القناع V للوحة Cusum . ولوحظ بان قيم ARL تتغيير بشكل كبير لاي تغيير طفيف في معلمات التوزيع وان قيم ARL تتناقص بزيادة حجم العينة (n) .وتتناقص قيم ARL بزيادة قيمة معلمة توزيع بواسون عند الفرضية البديلة بثبوت n. وان ان النتائج المستحصلة من البحث كانت مفضلة على النتائج المستحصلة من طريقة Johnson و Leone . وفي عام ٢٠١٥ تحرى الباحث Henning واخرون معه [5] حول أداء اللوحة المدمجة لشيوارت (shewart)- لوحة المجموع المتراكم (Cusum) أي لوحة (Cusum- shewart) ومقارنتها بلوحة شيوارت ولوحة Cusum لمشاهدات منفردة تخضع لتوزيع ثنائي الحدين. فقد اعتمدت قيم معدل طول التشغيل كمعيار للمقارنة بين أداء تلك اللوحات. اذ استعمل الباحثون المحاكاة للوحة (Cusum-shewart) ولوحة شيوارت، في حين استعمل أسلوب سلسلة ماركوف للحصول على قيم معدل طول التشغيل. توصل الباحثون الى ان لوحة شيوارت تكون فعالة في كشف الانحرافات الكبيرة في متوسط العملية. ولوحة Cusum تكون ملائمة أكثر لكشف عن الانحرافات الصغيرة والمتوسطة في متوسط العملية. في حين كانت اللوحة المدمجة (Cusum- shewart) تميل لزيادة حساسية لوحة Cusum للكشف عن الانحرافات الكبيرة في متوسط العملية.

وفي عام 2016 اشتق الباحثين Sukparungsee وAreepong [11] صيغة تقريبية لحساب متوسط اطوال التشغيل للوحة ولوحة المتوسط المتحرك الموزون اسيا الـ EWMA (Exponentially Weighted Moving Average (EWMA)) عندما تكون المشاهدات تخضع لتوزيع بواسون. ولوحة المتوسط المتحرك الموزون المعممة (الـ GWMA) (Generally Weighted Moving Average (GWMA)) عندما تكون العملية تحت السيطرة الإحصائية تخضع لتوزيع ثنائي الحدين. لعمليات(zero-inflated binomial (ZIB)) وعلى التوالي.

وفي عام 2018 اعتمد الباحث Sukparungsee [10] أسلوب سلسلة ماركوف لحساب معدلات اطوال التشغيل للوحات السيطرة الـ EWMA (Exponentially Weighted Moving Average (EWMA)) وللوحات المتوسط المتحرك الموزون المعممة (الـ GWMA) (Generally Weighted Moving Average (GWMA)) عندما تكون العملية تحت السيطرة الإحصائية

وتخضع لتوزيع ثنائي الحدين. فقد تم حساب معدلات اطوال التشغيل لتوليفات مختلفة لمتوسط العملية تحت السيطرة (p_0) ولعدة قيم للعوامل الموزونة λ التي تمثل معلمة التنعيم (smoothing parameter) وقيمتها تكون ($1 \quad \lambda \quad 0$) و q والتي تكون مساوية لـ ($1 \quad q \quad 0$) ولعدة قيم للتغير في متوسط العملية (δ). وقد استعمل المحاكاة للحصول على نتائج البحث. وتبين من نتائج البحث الى تفوق أداء لوحات GWMA على أداء لوحات EWMA افي كشف الانحرافات الصغيرة للعملية. وان أداء لوحات GWMA يمكن ان يحسن بالمعلمتين الموزون (w ,q) ، اذ تمثل w ثابت التمهيد المعدلة قيمتها مساوية لـ ($1 \quad w \quad 0$) .

٢.هدف البحث

هدفنا في هذا البحث تعميم استعمال لوحة السيطرة المجموع المتراكم (Cusum) ولوحة المتوسط المتحرك الموزون اسيا(EWMA) عندما يكون المتغير تحت السيطرة يخضع لتوزيع ثنائي الحدين. فقد استعمل أسلوب سلسلة ماركوف لحساب المعدلات والانحراف المعياري لأطول التشغيل لتلك اللوحتي لكشف عن الانحرافات الصغيرة والمتوسطة في العملية الإنتاجية. بالاعتماد على معلمات توزيع ثنائي الحدين لحساب القيم الاحتمالية المعتمدة لحساب مصفوفة الاحتمالات الانتقالية بأسلوب سلسلة ماركوف التي يتم من خلالها حساب المعدل والانحراف المعياري لطول التشغيل للوحتي السيطرة الـ Binomial Cusum والـ Binomial EWMA وتقييم أداء تلك اللوحتين بالاعتماد على المعياريين المتقدم ذكرهما. اذ يتم تقدير معلمة العملية من بيانات من الواقع العملي للعملية تحت السيطرة. وحيث ان هدف الشركة العامة للمنتوجات الغذائية- مصنع المأمون هو الكشف المبكر عن الخلل وخروج العملية عن السيطرة الإحصائية، وبالتالي تحديد أسباب الخلل وإعادتها تحت السيطرة الإحصائية لتحسين نوعية المنتج وبأقل كلفة ممكنه.

3. لوحة Binomial Cusum لمراقبة متوسط العملية

نفرض بان المشاهدات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ من عملية انتاج متكررة تكون متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيع من توزيع ثنائي الحدين بالمعلمتين (n, p)وتكون على وفق الصيغة الاتية [7,10]:-

$$P(x|n,p) \quad C_x^n p^x (1-p)^{n-x} ; \qquad x = 0,1,2,\ldots n \qquad \ldots(1)$$

حيث ان $(n, p > 0)$. بمتوسط مساوي لـ $(\mu = np)$ وتباين مقداره $(\sigma^2 = np(1-p))$. ويقال بان العملية تحت السيطرة اذا افترضنا بان $(p = p_0)$عندما تكون العملية تحت السيطرة الاحصائية وان الـ $(p = p_1 \neq p_0)$ عندما تكون العملية خارج السيطرة الاحصائية .حيث ان p_0 تمثل نسبة المعيب المسموح بها لخاصية النوعية . وحيث ان لوحة Cusum تستعمل لمراقبة متوسط العملية ، فانه اذا

كان ($\mu \quad \mu_0 \quad n p_0$) .وبخلاف ذلك عندما تكون ($\mu \quad \mu_0 \quad n p_0$) وتمثل x_i (μ_0) قيمة متوسط العملية عند مستوى النوعية المقبول أو تسمى بالقيمة (تحت السيطرة) لخاصية النوعية x_i . اذ تستعمل لوحة Cusum لكشف الانحرافات الصغيرة في العملية. ويتم حساب احصاءة المجموع المتراكم (Cusum) من الجانب الأعلى لمراقبة متوسط العملية (الانحرافات الموجبة) على وفق الصيغة الآتية[8,7] :

$$S_i = \text{Max}[0, x_i - k + S_{i-1}] \quad , \quad i = 1,2,..,n \qquad ...(2)$$

حيث إن القيم الأولية لأحصاءة Cusum تكون مساوية للصفر، إي $S_1 = 0$ وان S_i تسمى الحد الأعلى التراكمي للكشف عن الانحرافات الموجبة للعملية عند الوقت i .و ان k تسمى القيمة المرجعية (Reference Value) أو قيمة السماح ويتم حسابها على وفق الصيغة الاتية: -

$$K = (\mu_a - \mu_0) / (\log(\mu_a) - \log(\mu_0)) \qquad ...(3)$$

وان μ_a تمثل قيمة متوسط العملية الذي نرغب باكتشاف تغيير في متوسط العملية أي عند مستوى النوعية المرفوض أو تسمى بالقيمة (خارج السيطرة)،وقيمتها مساوية لـ σ_0 $\mu_a = \mu_0$ ، ووفقا لتوزيع ثنائي الحدين ستكون قيمة μ_a مساويه لـ $\sqrt{n p_0 (1 \quad p_0)}$ $\mu_a = n p_0$. وتمثل التغير في متوسط عملية الانتاج الذي نرغب باكتشافها بوقت مبكر وقيمتها مساوية لـ

$$| \mu_a - \mu_0 | / \sigma_0^2 \qquad ...(4)$$

وان حد اتخاذ القرار سيكون بين الصفر و (h) إي إن (0 وh) . وان قيمة حد القرار يمكن ان تكون مساوية $5\sigma_0$ h ،أي ستكون h مساويه لـ $5\sqrt{n p_0 (1 \quad p_0)}$ hوفقا لتوزيع ثنائي الحدين او $6\sigma_0$ h ،أي ستكون hمساويه لـ $6\sqrt{n p_0 (1 \quad p_0)}$ h وفقا لتوزيع ثنائي الحدين. فاذا تجاوزت قيمة احصاءة (S_i) حد اتخاذ القرار الموجب (h) أي ($S_i \quad h$) فان لوحة السيطرة تشير الى حدوث زيادة في متوسط العملية. وان العملية تعد خارج السيطرة لذ سيتم إيقاف العملية الإنتاجية ويتطلب إجراء عملية تصحيح للعملية لأعادتها تحت السيطرة.

4. لوحة الـ Binomial EWMA لمراقبة متوسط العملية

نفرض بان المشاهدات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ من عملية انتاج متكررة تكون متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيع من توزيع ثنائي الحدين بالمعلمتين (n, p) على وفق الصيغة (1). ويقال بان العملية تحت السيطرة اذا افترضنا بان ($p \quad p_0$)عندما تكون العملية تحت السيطرة الاحصائية، وان الـ ($p \quad p_1 \quad p_0$) عندما تكون العملية

خارج السيطرة الاحصائية . حيث ان p_0 تمثل نسبة المعيب المسموح بها لخاصية النوعية .وحيث ان لوحة EWMA تستعمل لمراقبة متوسط العملية ،اذ يقال بان العملية تحت السيطرة اذا كان ($\mu \quad \mu_0 \quad n p_0$)،وبخلاف ذلك عندما تكون ($\mu \quad \mu_0 \quad n p_0$). اذ تمثل μ_0 قيمة متوسط العملية عند مستوى النوعية المقبول أو تسمى بالقيمة (تحت السيطرة) لخاصية النوعية x_i . . اذ تستعمل لوحة EWMA لكشف الانحرافات الصغيرة في العملية حيث يتم إعطاء وزن اكبر (λ)التي تمثل معلمة التنعيم) للمشاهدة الأكثر حداثة . ويتم حساب احصاءة المتوسط المتحرك الموزون اسيا (Z_t) لمراقبة متوسط العملية (الانحرافات الموجبة في المتوسط) على وفق الصيغة الآتية[2, 7,10] :

$$Z_0 \quad \mu_0 \quad np_0 \quad , \quad i \quad 0 \qquad ...(5)$$

$$Z_i = (1-\lambda) Z_{i-1} + \lambda x_i \qquad , i = 1,2,..,n \qquad ...(6)$$

أما λ فهي تمثل معلمة التنعيم (smoothing parameter) وقيمتها تكون ($0 \quad \lambda \quad 1$) وتمثل الوزن المعطى للمشاهدة الاحدث.وان $Z_0 \quad \mu_0$ تمثل القيمة الاولية المعطاة لأحصاءة المتوسط المتحرك الموزون اسيا، وسيتم تقدير قيمة متوسط العملية عند مستوى النوعية المقبول مساوي لـ $\bar{x} \quad \mu_0$ من بيانات العينة وفقا لتوزيع ثنائي الحدين وتحتسب على وفق الصيغة ادناه :-

$$\hat{\mu}_0 \quad \bar{x} \quad \frac{x_i}{n} \qquad ..(7)$$

وان حد اتخاذ القرار سيكون وفقا لحدي السيطرة الأدنى (h_L)والاعلى(h_U) وعلى التوالي تكون كما مبين ادناه:-

$$C_{EWMA} = (h_L \quad , h_U \quad]$$

$$C_{EWMA} \quad (\quad 0 \, , \, \mu_0 \quad A\Sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \quad] \qquad ...(8)$$

أي ان

$$C_{EWMA} \; (\, 0, np_0 \quad A\sqrt{np_0(1 \quad p_0)} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \quad] \qquad ..(9)$$

ان قيمة Z_i ستكون قيمة موجبة لان خاصية النوعية التي نهتم بها تخضع لتوزيع ثنائي الحدين. لذا يتم وضع قيمة حد السيطرة الأدنى (h_L)مساوي للصفر.وان ثابت حد السيطرة A تكون قيمة موجبة وثابتة اكبر من الصفر اي ان (٠،)A. اذ يتم اختيار

قيم A و λ من قبل (الباحث) لتعطي خصائص لمتوسط طول التشغيل المرغوب به لكلا الحالتين تحت السيطرة وخارج السيطرة.

5. استعمال سلاسل ماركوف في السيطرة الاحصائية

لغرض دراسة خصائص طول التشغيل للوحة لوحة Binomial Cusum ولوحة Binomial EWMA ، من خلال عدة معايير منها معدل طول التشغيل Average Run Length (ARL)) والانحراف المعياري لطول التشغيل (Standard Deviation Run Length (SDRL))، لغرض المقارنة بين لوحات السيطرة وتحديد قوة قدرة لوحة السيطرة في كشف التغيرات الموجبة في متوسط العملية تحت السيطرة[3,2,7] . اذ يتم اعتماد اسلوب سلاسل ماركوف لحساب المعايير المتقدم ذكرها عندما يكون المتغير تحت السيطرة يخضع لتوزيع ثنائي الحدين.

5.1 الصيغ التقريبية خصائص طول التشغيل للوحة الـ Binomial Cusum

يبدأ أسلوب سلاسل ماركوف المقترح من قبل الباحثان Brook وEvans [3,7] في عام 1972 بتقريب انتقالات احصاءة الاختبار للوحة Poisson Cusum بعملية ماركوف بمجال حالة مستمر. وبافتراض إن عدد حالات سلسلة ماركوف تعتمد على تقسيم فترة اتخاذ القرار الى عدد من الحالات. وسيتم تعميم الصيغة المعتمدة في البحث لدراسة خصائص طول التشغيل للوحة cusumعندما تكون عدد الوحدات المعيبة للعملية تخضع لتوزيع ثنائي الحدين. اذ يتم تحديد قيم معلمات لوحة Binomial Cusum (h , k) بقيم ذات اعداد صحيحة موجبة. وبذلك يمكن للمتغير العشوائي Si ان يأخذ احدى القيم (0, 1, 2, …,h).

بافتراض إن عدد الحالات لسلسلة ماركوف تكون مساوية لـ h 1 والتي سميت بـ $E_0, E_1, \ldots, E_h$ حيث ان الحالة E_h تمثل الحالة المنتهية او الحالة المشبعة (Absorbing State)وهي حالة الخروج عن السيطرة اعلى او اسفل فترة حد القرار (h). فاذا كانت العملية الإنتاجية في مبتدئها عند الحالة E_0 فان الاحتمالات الانتقالية من الحالة E_i الى E_j $(i, j = 0,1,2,\ldots,h-1)$.وان الاحتمالات الانتقالية لسلسلة ماركوف للحالات $(i = 0,1,2,\ldots,h-1)$ لتكوين مصفوفة الاحتمالات الانتقالية (P) تحتسب على وفق الاتي :-

$$P_{i0} = Pr(x_t \quad k-i) \quad , i = 0,1,2,..,h-1 \qquad ..(9)$$

$$P_{ij} = Pr(x_t = k+j-i) \quad , j = 0,1,2,..,h-1 \qquad ..(10)$$

$$P_{ih} = Pr(x_t \quad k+h-i) \quad , j = 0,1,2,..,h-1 \qquad ..(11)$$

حيث ان P_{ij} تمثل احتمال انتقال احصاءة الاختبار للوحة الى الحالة j في الفترة القادمة .و يعرف P_{ij} بانه الاحتمال الانتقالي من الحالة i الى الحالة j .وبذلك تعرف

مصفوفة الاحتمالات الانتقالية P من الرتبة $(h \quad 1) \quad (h \quad 1)$ على وفق الصيغة الآتية :

$$P \quad \frac{R}{0^T} \left| \frac{(I \quad R)\underline{1}}{1} \right. \qquad \ldots(12)$$

إذ إن I مصفوفة وحدة من الرتبة $h \quad h$ ، و إن $\underline{1}$ متجه عمودي من الرتبة $h \quad 1$ تكون قيمة كل عنصر من عناصره مساوية للواحد. وان R مصفوفة جزئية من مصفوفة الاحتمالات الانتقالية P برتبة $h \quad h$ والتي يتم حسابها بالاعتماد على الصيغة (9,10) . وان 0^T تمثل مبدلة متجه صفري من الرتبة $h \quad 1$.اما العنصر الأخير في مصفوفة الاحتمالات الانتقالية P فان قيمته تكون مساوية للواحد ويمثل الحالة المنتهية .

وان القيمة الاحتمالية التجميعية لطول التشغيل للوحة Cusum تبدأ من الحالات $(E_0, E_1, \ldots, E_{h-1})$ تحتسب على وفق الصيغة الاتية: -

$$F_r = (I - R^r)\underline{1} \quad , \quad r = 1,2,3,.. \qquad \ldots(13)$$

اذ إن طول التشغيل يكون طويل عندما تكون العملية تحت السيطرة في حين يكون قصير عندما تحيد العملية عن السيطرة الإحصائية. يتم الحصول على متجة قيم معدل طول التشغيل ((Average Run Length (ARL)) على وفق الصيغة الآتية:

$$ARL = \underline{\mu} = (I - R)^{-1}\underline{1} \qquad \ldots(14)$$

وباستعمال العلاقة $(I - R)\underline{\mu}^{(s)} = sR\,\underline{\mu}^{(s)}$ حيث ان $s=2,3,....$ وبالاعتماد على العلاقة بين العزوم العاملية والعزوم المركزية (انظر المصدر[2])، يمكن إيجاد متجة الانحراف المعياري لطول التشغيل (Standard Deviation Run Length (SDRL)) على وفق الصيغة الآتية:

$$SDRL \quad \sqrt{2((I \quad R)^{\ 1} \quad I)\underline{\mu} \quad \underline{\mu} - (\underline{\mu})^2} \qquad \ldots(15)$$

حيث إن أول عنصر بالمتجه $\underline{\mu}$ يعطي قيم معدل طول التشغيل للوحة Cusum تبدء من حالة الصفر وبشكل عام من العنصر رقم i، إي تعطي المعدل لطول التشغيل عندما تبدأ الخطة من الحالة $(Ei, \quad i = 0,1,2,\ldots,h-1)$.

5.2 الصيغ التقريبية خصائص طول التشغيل للوحة الـ Binomial EWMA

يبدأ أسلوب سلاسل ماركوف المقترح من قبل الباحث Borror واخرون معه [2,7] في عام 1998 بتقريب انتقالات إحصاءه الاختبار للوحة Binomial EWMA

بعملية ماركوف بمجال حالة مستمر. وبافتراض إن عدد حالات سلسلة ماركوف تعتمد على تقسيم فترة اتخاذ القرار الى عدد من الحالات. وسيتم تعميم الصيغة المعتمدة في البحث لدراسة خصائص طول التشغيل للوحة EWMA عندما تكون عدد الوحدات المعيبة للعملية تخضع لتوزيع ثنائي الحدين .بافتراض عدد من الحالات لسلسلة ماركوف(N) ،وذلك بتقسيم الفترة بين حدي السيطرة (h_L, h_U) المحتسبة على وفق الصيغة (8) مقسمة الى N من الفترات الجزئية . وان الفترة الجزئية رقم j (L_j , U_j) تعرف كالاتي [1,6]:-

$$L_j = h_L + (j-1)g \quad ..(16)$$

$$U_j = h_L + jg \quad ..(17)$$

حيث ان $g = (h_U - h_L)/N$ ووفقا لحدي السيطرة المحتسبة على وفق الصيغة (8) تكون مساوية لـ $g = ((np_0 \quad A\sqrt{np_0(1 \quad p_0)}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}) - 0)/N$. وان نقطة المنتصف (m_i) للفترة الجزئية رقم j يمكن ان تكتب على وفق الصيغة الاتية:

$$m_i = h_L + 0.5(2i-1)g \quad ..(18)$$

وبذلك تكون نقطة المنتصف (m_i) للفترة الجزئية رقم j مساوية لـ $m_i = 0 + 0.5(2i-1)(np_0 \quad A\sqrt{np_0(1 \quad p_0)}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}})/N$.وان الحالة رقم (N +١) تمثل الحالة المنتهية او الحالة المشبعة حالة الخروج عن السيطرة اعلى او أسفل حدي السيطرة. حيث ان P_{ij} تمثل احتمال انتقال احصاءة الاختبار للوحة الى الحالة j في الفترة القادمة أي عند الفترة t.و يعرف P_{ij} بانه الاحتمال الانتقالي من الحالة i الى الحالة j ويعبر عنه بالصيغة الاتية :-

$$P_{ij} = Pr(L_j < Z_t < U_j \setminus Z_{t-1} = m_i) \quad ..(19)$$

بتعويض عن m_i المبينة بالصيغة (18) في الصيغة (19)واجراء بعض الخطوات للتبسيط يمكن ان يعبر عن P_{ij} بالصيغة الاتية :-

$$P_{ij} = Pr(h_L + (0.5g/\lambda)(2(j-1) - (1-\lambda)(2i-1)) < x_t < h_L + (0.5g/\lambda)(2j - (1-\lambda)(2i-1)))$$

$$i,j = 1,2,3.,N \quad ..(20)$$

حيث يتم تقريب احصاءة الاختبار في الصيغة (20)الى أقرب عدد صحيحة لحساب احتمالات توزيع ثنائي الحدين. وبذلك تعرف مصفوفة الاحتمالات الانتقالية P على وفق الصيغة الآتية:

$$P \quad \frac{Q}{0^T} \Big| \frac{(I \quad Q)\underline{1}}{1} \qquad \ldots(21)$$

إذ إن I مصفوفة وحدة من الرتبة N N، و إن $\underline{1}$ متجه عمودي من الرتبة N 1 تكون قيمة كل عنصر من عناصره مساوية للواحد. وان Q مصفوفة جزئية من مصفوفة الاحتمالات الانتقالية P برتبة N N والتي يتم حسابها بالاعتماد على الصيغة (20) . وان 0^T تمثل مبدلة متجه صفري من الرتبة N 1. اما العنصر الأخير في مصفوفة الاحتمالات الانتقالية P فان قيمتة تكون مساوية للواحد ويمثل الحالة المنتهية.

وان القيمة الاحتمالية التجميعية لطول التشغيل للوحة Binomial EWMA عند كل من المدخلات N تكون القيمة الابتدائية Z_0 وان r يمثل طول التشغيل يحسب على وفق الصيغة الاتية: -

$$F_r = (I - Q^r)\underline{1} \ , \ r = 1,2,3,.. \qquad \ldots(22)$$

اذ إن طول التشغيل يكون طويل عندما تكون العملية تحت السيطرة في حين يكون قصير عندما تحيد العملية عن السيطرة الإحصائية. ويتم الحصول على متجة قيم معدل طول التشغيل ((Average Run Length (ARL) على وفق الصيغة الآتية:

$$ARL = \underline{\mu} = (I - Q)^{-1}\underline{1} \qquad \ldots(23)$$

وباستعمال العلاقة $(I - Q)\underline{\mu}^{(s)} = sQ\underline{\mu}^{(s)}$ حيث ان s=2,3,.... وبالاعتماد على العلاقة بين العزوم العاملية والعزوم المركزية (انظر المصدر[2,3])، يمكن إيجاد متجة الانحراف المعياري لطول التشغيل (Standard Deviation Run Length (SDRL))على وفق الصيغة الآتية:

$$SDRL \quad \sqrt{2((I \quad Q)^{\ 1} \quad I)\underline{\mu} \quad \underline{\mu} - (\underline{\mu})^2} \qquad \ldots(24)$$

6. الجانب التطبيقي ومناقشة النتائج

يتضمن هذا الجانب عرض الاساليب التي يتم من خلالها تسليط الضوء على اداء لوحات Binomial Cusum و Binomial EWMA عندما يكون المتغير تحت السيطرة يخضع لتوزيع ثنائي الحدين لمراقبة المتوسط للعملية الإنتاجية تحت السيطرة من خلال تطبيق الصيغ المتقدم ذكرها في الجانب النظري. وقد تم كتابة برامج باستعمال برنامج Matlab -R2018a للحصول على نتائج البحث وفقا لتوزيع ثنائي الحدين ولتوليفات مختلفة لمعلمات تلك اللوحتين وعدد الحالات في سلسلة ماركوف.

اما البيانات المعتمدة لتوزيع ثنائي الحدين فقد كانت عدد الوحدات التالفة في دفعات انتاجية يومية بحجم (٧٠) دفعة لمنتج منظف الحمامات رونق احد منتجات الشركة

العامة للمنتوجات الغذائية- مصنع المأمون والمستحصلة من السجلات قسم السيطرة النوعية أنظر الملحق(A) . فقد اختير منتوج منظف الحمامات رونق. حيث تقوم الشركة باستعمال التطبيقات الجاهزة لمراقبة خط الانتاج بتطبيق لوحات السيطرة (لوحة شيوارت ولوحة المدى) الشائعة الاستعمال في كشف الانحرافات الكبيرة في العملية. وبما ان هدف الشركة هو الكشف المبكر عن الخلل وخروج العملية عن السيطرة الإحصائية، وبالتالي تحديد أسباب الخلل وإعادتها تحت السيطرة الإحصائية لتحسين نوعية المنتج وبأقل كلفة ممكنه، ولهذا السبب فقد استعملت لوحات Binomial Cusum وBinomial EWMA اذ تمتاز تلك اللوحتين بكونهما أكثر حساسية للكشف عن الانحراف الصغيرة والمتوسطة في العملية.

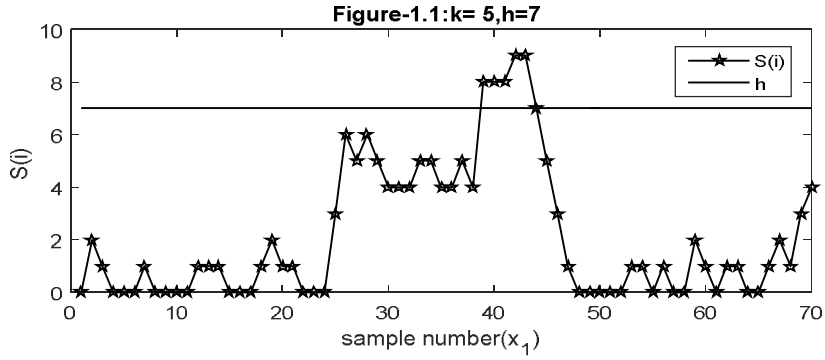
وقد استعمل التطبيق الجاهز Statgraph لأجراء اختبار حسن المطابقة للمنتج منظف الحمامات رونق لتوزيع ثنائي الحدين .ووفقا لاختبار حسن المطابقة لتوزيع ثنائي الحدين لمنتج منظف الحمامات رونق(x_1) ، فقد كان متوسط العملية عند مستوى النوعية المقبول مساوي لـ 4.8714 $\bar{x}$ ثم قدرت معلمتي توزيع ثنائي الحدين استعمال التطبيق الجاهز Statgraph حيث كانت $\hat{n}=9$ و $\hat{p}=0.54$ (لمزيد من التفاصيل انظر الملحق).

A.1 لوحة Binomial Cusum لمراقبة متوسط العملية

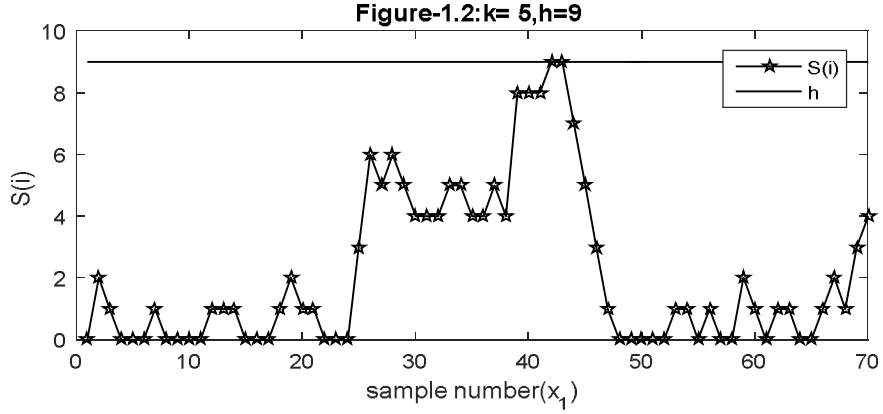
وقد تم رسم لوحة Binomial Cusum لمراقبة متوسط العملية لمنتج منظف الحمامات رونق(x_1) .عندما يكون متوسط العملية عند مستوى النوعية المقبول مساوي لـ 4.86 $\hat{\mu}_0 \quad \hat{n}\hat{p}_0 \quad 9(0.54)$. وان قيم معلمات لوحة Binomial Cusum التي اعتمدت في رسم اللوحة لمنتج منظف الحمامات رونق (x_1).

فقد تم حساب احصاءة الاختبار لوحة Binomial Cusum على وفق الصيغة (2).اما قيمة K فقد حسبت على وفق الصيغة (3) و تساوي 5 4.86 $\hat{\mu}_0$ K عندما تكون التغير في متوسط العملية مساوي للصفر أي 0 ■ .اما قيمة حد القرار فقد حسبت عند قيمتين الأولى مساوية لـ 7 7.48 $5\sqrt{\hat{n}\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}$ $5\sqrt{9(0.54)(1-0.54)}$ h .اما القيمة الثانية لحد القرار تكون مساوية لـ 9 8.97 $6\sqrt{\hat{n}\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}$ $6\sqrt{9(0.54)(1-0.54)}$ h .

وكما مبين ادناه في الاشكال (1-1) و (2-1) نلاحظ بان العملية تكون خارج السيطرة وذلك لوجود عدد من العينات خارج السيطرة. وان عدد العينات خارج السيطرة يتناقص بزيادة قيمة h.اي ان حساسية اللوحة تزداد بتناقص قيمة حد القرار (h) .



الشكل (1-1) يبين لوحة سيطرة Binomial Cusum لمنتج منظف الحمامات رونق(x_1) .



الشكل (2-1) يبين لوحة سيطرة Binomial Cusum لمنتج منظف الحمامات رونق(x_1) .

A.2 حساب قيم ARL و قيم SDRL للوحات Binomial Cusum

لغرض حساب قيم ARL على وفق الصيغة (14)، اي العدد المتوقع من العينات المسحوبة لغاية ورود ما يشير الى ان العملية قد اصبحت خارج السيطرة، كذلك حساب قيم SDRL على وفق الصيغة (15) .ووفقا لاختبار حسن المطابقة لتوزيع ثنائي الحدين لمنتج منظف الحمامات رونق (x_1) ، فقد كان متوسط العملية عند مستوى النوعية المقبول مساوي لـ $\hat{\mu}_0 \quad n\hat{p}_0 \quad 9(0.54) \quad 4.86$.

- لمعرفة تأثير انحراف قيمة متوسط العملية عن مستوى النوعية المقبول على قيم ARLوقيم SDRL ،أي اكتشاف تغيير في متوسط العملية أي عند مستوى

النوعية المرفوض، سيتم افتراض عدة قيم للتغيير 2 , 1 , 0 في متوسط العملية الذي نرغب باكتشافها بوقت مبكر. وذلك فان قيمة متوسط العملية عند ذلك التغيير وفقا لـ $\hat{\mu}_a = \hat{n}\hat{p}_0 \pm \sqrt{\hat{n}\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}$ ستكون مساوية لـ $\hat{\mu}_a = 6.36, 7.85$. بافتراض ثيوت حجم العينة n=9 يمكن ان نستنتج قيم المعلمة $(\hat{p}_1)$لتوزيع ثنائي الحدين عند مستوى النوعية المرفوض قيم $\hat{p}_1$ 0.71 , 0.87 . اما عندما تكون قيمة 0 فانه سيتم افتراض ان قيمة $\hat{\mu}_0$ 4.86 . بثيوت حجم العينة n=9 وقيمة المعلمة $(\hat{p}_0$ 0.54) لتوزيع ثنائي الحدين عند مستوى النوعية المقبول.

- اما القيمة المرجعية(K) التي يتم حسابها وفقا للصيغة (3) ستكون مساوية لـ $K = 5.57, 6.24$ عندما يكون التغيير في متوسط العملية مساوي لـ 1 , 2 , 3 ،وسيتم تقريبها الى اقرب عدد صحيح لتكون مساوية لـ $K = 6, 6$.اما عندما يكون التغيير في متوسط العملية مساوي لـ 0 فانه سيتم افتراض ان قيمة $K = 5$.
- سيتم دراسة تأثير حد القرار للوحة الـ Cusum،و ان قيمة حد القرار يمكن ان تكون مساوية7 7.48 $5\sqrt{9(0.54)(1-0.54)}$ $5\sqrt{\hat{n}\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}$ h وكذلك عندما 9 8.97 $6\sqrt{9(0.54)(1-0.54)}$ h على وفق الصيغة المبينة في المبحث (2).
- وبذلك سيكون عدد الحالات في سلسة ماركوف المعتمدة في حساب الاحتمالات الانتقالية مساوي لـ 9 , 7 h مبتدئه من الحالة رقم الصفر الى الحالة رقم 1 h أي الحالة رقم 6 عندما تكون 7 h والحالة ٨ عندما تكون 9 h .

اذ نعتمد على التوزيع الاحتمالي لتوزيع ثنائي الحدين لحساب الاحتمالات الانتقالية $(P_{ij} = 1, 2, \ldots, h-1)$ للمصفوفة R برتبة h h باستخدام الصيغة (9,10)، على وفق الفروض المتقدم ذكرها للمنتج (x_1) . ثم حساب قيم ARL على وفق الصيغة (14)وقيم SDRL على وفق الصيغة (15). و قد اختيرت الحالات ($E_0, E(h \quad 1)/2, E(h \quad 1)$) كمقياس للمقارنة بين لوحات السيطرة المفترضة للتوليفات أعلاه حيث ان:-

- E_0 تمثل الحالة التي تكون فيها احصاءة الاختبار قريبة من حد السيطرة المركزي (الحالة صفر) للوحة الـBinomial Cusum،أي تكون العملية الانتاجية تحت السيطرة.
- وان $E(h_{1)/2}$ تمثل الحالة التي تكون فيها احصاءة الاختبار عند منتصف الفترة المحصورة بين $(0, h)$ للوحة الـBinomial Cusum.
- اما $E(h_{1})$ تمثل الحالة التي تكون فيها احصاءة الاختبار قريبة من حد السيطرة الاعلى (h) للوحة الـBinomial Cusum والتي يتم ايقاف العملية الانتاجية.

وقد تم تنفيذ التجارب وفقا للتوليفات المتقدم ذكرها لمنتج منظف الحمامات رونق (x_1) لحصول قيم ARL وقيم SDRL للوحات الـBinomial Cusum ، وقد لخصت النتائج مما تقدم ذكره بالجدولين (1-1) و(2-1).

جدول (1-1) قيم ARL وSDRL للوحات Binomial Cusum لمنتج منظف الحمامات رونق

(x_1) بمتوسط مساوي لـ 4.86 $9(0.54)$ $\hat{n}\hat{p}_0$ $\hat{\mu}_0$ وحد القرار $(7 \quad h)$ بعدد حالات لسلسلة ماركوف $(1 \quad h)$ لكل من الحالات $(E_0, E(h_{1)/2}, E(h_{1)})$.

The stateth			E_0	$E(h_{1)/2}$	$E(h_{1)}$
■	K	$\hat{p}$	ARL SDRL	ARL SDRL	ARL SDRL
٠	5	$\hat{p}_0$ 0.54	45.311 39.431	32.065 37.745	17.157 30.855
١	٦	$\hat{p}_1$ 0.71	14.804 9.2635	7.9956 7.914	3.615 5.429
٢	٦	$\hat{p}_1$ 0.87	4.178 1.099	1.968 0.836	1.121 0.396

جدول (2-1) قيم ARL وSDRL للوحات Binomial Cusum لمنتج منظف الحمامات رونق

(x_1) بمتوسط مساوي لـ 4.86 $\hat{n}\hat{p}_0$ 9(0.54) وحد القرار (h 9) بعدد حالات لسلسلة ماركوف (h 1) لكل من الحالات (E_0 , $E(h \ 1)/2$, $E(h \ 1)$).

The stateth			E_0	$E(h \ 1)/2$	$E(h \ 1)$
δ	K	$\hat{p}$	ARL SDRL	ARL SDRL	ARL SDRL
٠	5	$\hat{p}_0$ 0.54	77.257 68.126	57.051 65.852	24.992 50.318
١	٦	$\hat{p}_1$ 0.71	19.802 11.681	10.738 9.9018	3.7095 5.92
٢	٦	$\hat{p}_1$ 0.87	5.2673 1.248	2.5879 0.8349	1.1211 0.396

ونلاحظ منها بشكل عام بان ان قيم ARL وقيم SDRL: -

١. تتناقص بزيادة القيمة التغيير (δ) في متوسط العملية بثبوت الحالة E_i وعدد الحالات في سلسلة ماركوف (h 1) وحد القرار (h) .
٢. تتناقص بزيادة القيمة المرجعية (k) والتي يعتمد في حسابها على قيمة متوسط العملية عند مستوى النوعية المرفوض $\hat{\mu}_a$ بثبوت الحالة E_i وعدد الحالات في سلسلة ماركوف (h 1) وحد القرار (h) .
٣. تتناقص بزيادة رقم الحالة E_i بثبوت القيمة المرجعية (k) وعدد الحالات في سلسلة ماركوف (h 1) وحد القرار (h) .
٤. تزداد بزيادة حد القرار (h) بثبوت الحالة E_i وعدد الحالات في سلسلة ماركوف (h 1) والقيمة المرجعية (k) .
٥. تزداد بزيادة وعدد الحالات في سلسلة ماركوف (h 1) بثبوت الحالة E_i والقيمة المرجعية (k) .

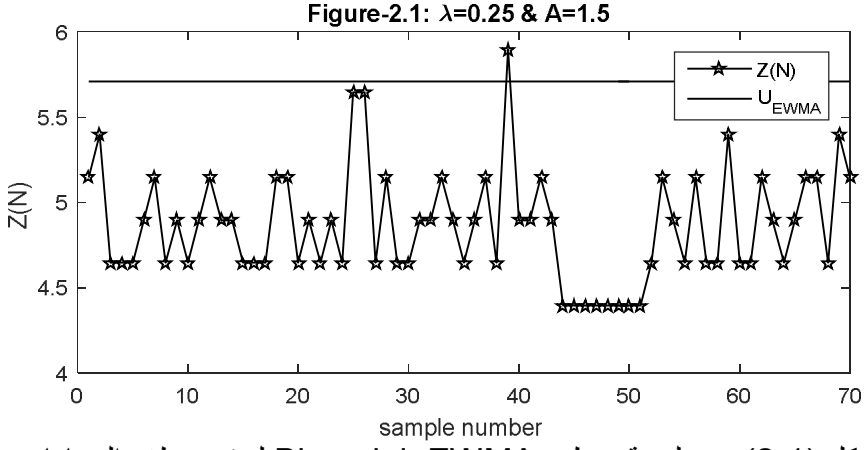
وبناء على ما تقدم نلاحظ بانه زيادة عدد الحالات في سلسلة ماركوف يؤدي زيادة قيمة قيم ARL وقيم SDRL.اي حساسية اللوحة تزداد كلما تتناقص عدد الحالات في سلسلة ماركوف.

B.1 لوحات الـ Binomial EWMA لمراقبة متوسط العملية

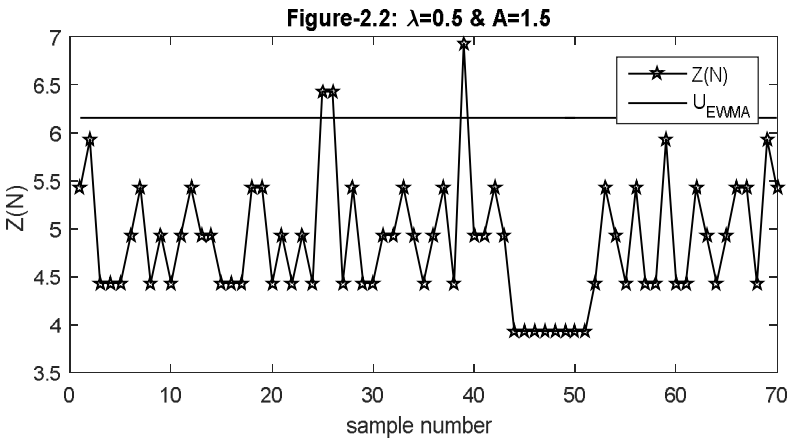
لقد تم رسم لوحة Binomial EWMA مراقبة متوسط العملية لمنتج منظف الحمامات رونق(x_1) عندما يكون متوسط العملية عند مستوى النوعية المقبول مساوي لـ 4.86 $9(0.54)$ $\hat{\mu}_0$ $n\hat{p}_0$.فقد تم حساب احصاءة الاختبار لوحة Binomial EWMA على وفق الصيغة (5,6) وكانت قيمة 4.86 $\hat{\mu}_0$ Z_0 .

اما قيمة حد القرار الأعلى والادنى فقد حسبت على وفق الصيغة (8).بافتراض ان قيمة λ مساوية لـ 0.25 λ وان قيمة ثابت حد السيطرة مساوية لـ 1.5 A . وبذلك فان حدي السيطرة للوحة مساوية لـ[5.7077 $1.5\sqrt{9(0.54)(1-0.54)}\sqrt{\frac{0.25}{2-0.25}}$ $9(0.54)$, 0) C_{EWMA} .وكذلك عندما تكون قيمة λ مساوية لـ 0.5 λ وان قيمة ثابت حد السيطرة مساوية لـ 1.5 A . وبذلك فان حدي السيطرة للوحة مساوية لـ[6.1549 $1.5\sqrt{9(0.54)(1-0.54)}\sqrt{\frac{0.5}{2-0.5}}$ $9(0.54)$, 0) C_{EWMA} .وكما مبين ادناه في الشكلين (1-2) و (2-2) .

Figure-2.1: λ=0.25 & A=1.5



الشكل (1-2) يبين لوحة سيطرة Binomial EWMA لمنتج منظف الحمامات رونق (x_1) .



الشكل (2-2) يبين لوحة سيطرة Binomial EWMA لمنتج منظف الحمامات رونق (x_1).

وتعد العملية خارج السيطرة الإحصائية لمنتج منظف الحمامات رونق (x_1), وكما مبين في الشكلين (1-2) و (2-2) نلاحظ بان تشتت احصاءة الاختبار يعتمد على قيمة معلمة التمهيد ، اذ يزداد تشتت احصاءة الاختبار بزيادة قيمة λ.وان عدد العينات خارج السيطرة يتناقص بتناقص قيمة λ. اذ نلاحظ نقطة واحدة خارج حد السيطرة عندما تكون قيمة λ 0.25 .في حين نلاحظ ثلاث نقاط خارج حد السيطرة عندما تكون قيمة λ 0.5 .بمعنى اخر تزداد حساسية اللوحة بزيادة قيمة λ.

B.2 حساب قيم ARL و قيم SDRL للوحات الـ Binomial EWMA

لغرض حساب قيم ARL على وفق الصيغة (23)، اي العدد المتوقع من العينات المسحوبة لغاية ورود ما يشير الى ان العملية قد اصبحت خارج السيطرة ،كذلك حساب قيم SDRL على وفق الصيغة (24).و وفقا لاختبار حسن المطابقة لتوزيع ثنائي الحدين لمنتج منظف الحمامات رونق(x_1) ،بمتوسط العملية عند مستوى النوعية المقبول مساوي لـ $\hat{\mu}_0 \quad n\hat{p}_0 \quad 9(0.54) \quad 4.86$.

- لمعرفة تأثير انحراف قيمة متوسط العملية عن مستوى النوعية المقبول على قيم ARLوقيم SDRL ،أي اكتشاف تغيير في متوسط العملية أي عند مستوى النوعية المرفوض، سيتم افتراض عدة قيم للتغيير δ 0,1 , 2 في متوسط العملية الذي نرغب باكتشافه بوقت مبكر. بذلك فان قيمة متوسط العملية عند ذلك التغيير وفقا لـ $\hat{\mu}_a = n\hat{p}_0 \pm \sqrt{n\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}$ ستكون مساوية لـ $\hat{\mu}_a = 6.36, 7.85$.

بافتراض يثبوت حجم العينة n=9 يمكن ان نستنتج فيم المعلمة $(\hat{p}_1)$لتوزيع ثنائي

الحدين عند مستوى النوعية المرفوض قيم $0.87, 0.71$ $\hat{p}_1$. اما عندما تكون قيمة 0 ◘ فانه سيتم افتراض ان قيمة 4.86 $\hat{\mu}_0$. بثبوت حجم العينة n=9 و فيمه المعلمة (0.54 $\hat{p}_0$) لتوزيع ثنائي الحدين عند مستوى النوعية المقبول.

- اختيرت عدة قيم لمعلمة التمهيد λ مساوية لـ $(0.1,0.15,0.25, 0.35, 0.45,0.55,0.65,0.75,0.85,0.95)$ λ .
- اختيرت قيمتين لثابت حد السيطرة مساوية لـ A=1.35, 1.45 .
- وبافتراض قيمتين لعدد الحالات لسلسلة ماركوف مساوية لـ N=17, 21.

اذ نعتمد على التوزيع الاحتمالي لتوزيع ثنائي الحدين لحساب الاحتمالات الانتقالية $(P_{ij} \quad =1, 2, \ldots, N)$ للمصفوفة Q برتبة N N باستخدام الصيغة (20) ،ثم حساب قيم ARL على وفق الصيغة (23) وقيم SDRL على وفق الصيغة (24) على وفق الفروض المتقدم ذكرها للمنتج (x_1).و قد اختيرت الحالات $(E_1, E_{(N\ 1)/2}, E_{(N)})$ كمقياس للمقارنة بين لوحات السيطرة المفترضة للتوليفات أعلاه حيث ان:-

- E_1 تمثل الحالة التي تكون فيها احصاءة الاختبار قريبة من حد السيطرة المركزي للوحة الـ Binomial EWMA ، اي العملية الانتاجية تكون تحت السيطرة.
- وان $E_{(N\ 1)/2}$ تمثل الحالة التي تكون فيها احصاءة الاختبار عند منتصف الفترة المحصورة بين حدي السيطرة الأعلى والادنى (h_L, h_U) للوحة الـ Binomial EWMA.
- اما $E_{(N)}$ تمثل الحالة التي تكون فيها احصاءة الاختبار قريبة من حد السيطرة الاعلى (h_U) للوحة الـ Binomial EWMA والتي يتم ايقاف العملية الانتاجية.

وقد تم تنفيذ التجارب وفقا للتوليفات المتقدم ذكرها لمنتج معجون اسنان عنبر (x_1) لحصول قيم ARL وقيم SDRL للوحات الـ Binomial EWMA ، وقد لخصت النتائج مما تقدم ذكره بالجدولين (1-3).

جدول (1-2) قيم ARL وSDRL للوحات Binomial EWMA منتج منظف الحمامات رونق

(x_1) بمتوسط مساوي لـ 4.86 $9(0.54)$ $\hat{n}\hat{p}_0$ $\hat{\mu}_0$ ولعدة قيم لمعلمة التمهيد (λ)

بعدد حالات لسلسلة ماركوف (N=17) لكل من الحالات $(E_1, E_{(N\ 1)/2}, E_{(N)})$.

The stateth				E_1		$E_{(N\ 1)/2}$		$E_{(N)}$	
◘	A	$\hat{p}$	λ	ARL	SDRL	ARL	SDRL	ARL	SDRL
٠	١.٣٥	$\hat{p}_0$ 0.54	0.1	592.27	556.43	583.74	556.43	494.11	552.12
			0.15	320.35	298.63	314.93	298.63	210.86	284.53
			0.25	102.71	91.77	99.68	91.76	73.09	89.34
			0.35	75.58	68.26	73.06	68.25	56.06	66.79
			0.45	60.54	55.73	58.87	55.73	46.99	54.77
			0.55	47.34	43.86	46.08	43.86	38.80	43.40
			0.65	41.20	38.58	40.36	38.57	34.56	38.23
			0.75	30.55	28.61	29.33	28.61	26.15	28.39
			0.85	30.69	29.29	29.78	29.29	29.78	29.29
			0.95	28.77	28.26	28.77	28.26	28.77	28.26
٠	1.4٥	$\hat{p}_0$ 0 .54	0.1	777.63	737.99	768.93	737.98	644.99	730.98
			0.15	320.49	298.63	314.93	298.63	210.86	284.53
			0.25	288.93	277.05	285.38	277.05	221.73	271.07
			0.35	89.88	82.80	87.31	82.79	67.76	81.08
			0.45	84.03	78.95	82.39	78.94	66.35	77.68
			0.55	64.61	61.13	63.47	61.12	53.53	60.49
			0.65	42.86	40.23	42.07	40.22	35.88	39.84
			0.75	44.58	42.58	44.02	42.58	42.39	42.55
			0.85	32.06	30.60	31.04	30.59	31.04	30.59
			0.95	28.77	28.26	28.77	28.26	28.77	28.26

نلاحظ من جدول (1-2) للوحات Binomial EWMA بان حساسية اللوحة تزداد من خلال تناقص قيم ARL وكذلك قيم SDRL، وان قيم ARL وSDRL:

- تتناقص بتناقص قيمة ثابت حد السيطرة (A).
- تتناقص بزيادة قيمة معلمة التمهيد (λ) .
- يكون معدل طول التشغيل كبير عندما تكون العملية تحت السيطرة كما هو مبين في الحالة E_1 . ويتناقص عندما تحديد العملية عن السيطرة وتقترب احصاءة الاختبار من حد السيطرة الأعلى كما هو مبين في الحالة $E_{(N)}$.

و بناءا على ما تقدم فقد تم تنفيذ التجارب وفقا للتوليفات المتقدم ذكرها لمنتج منظف الحمامات رونق (x_1) لحصول قيم ARL وقيم SDRL للوحات الـ Binomial EWMA عندما تكون قيمة التغيير في متوسط العملية 0 ◘. وبافتراض ان قيمة ثابت حد السيطرة مساوى لـ (A=1.35) ولعدة قيم لمعلمة التمهيد (λ) و بعدد حالات لسلسلة ماركوف (N=21).و قد لخصت النتائج مما تقدم ذكره بالجدول (2-2).اذ نلاحظ بان قيم ARL وقيم SDRL للوحات الـ

Binomial EWMA تزداد بزيادة عدد حالات لسلسلة ماركوف كما هو مبين مقارنة بنفس القيم لـ ARL و لـ SDRL المبينة في الجدول (1-2) .

جدول (2-2) قيم ARL وSDRL للوحات Binomial EWMA منتج منظف الحمامات رونق

(x_1) بمتوسط مساوي لـ $\hat{\mu}_0 \quad \hat{n}\hat{p}_0 \quad 9(0.54) \quad 4.86$ ولعدة قيم لمعلمة التمهيد (λ)

بعدد حالات لسلسلة ماركوف (N=21) لكل من الحالات ($E_1, E_{(N+1)/2}, E_{(N)}$).

The stateth				E_1		$E_{(N+1)/2}$		$E_{(N)}$	
■	A	$\hat{p}$	λ	ARL	SDRL	ARL	SDRL	ARL	SDRL
٠	1.3٥	$\hat{p}_0 \quad 0.54$	0.1	393.87	359.16	385.51	359.16	246.78	339.87
			0.15	298.04	275.38	292.38	275.37	196.21	262.83
			0.25	168.97	157.66	165.65	157.64	126.90	154.20
			0.35	105.16	97.79	102.97	97.78	80.45	95.90
			0.45	63.14	58.14	61.52	58.13	49.28	57.20
			0.55	42.80	39.21	41.51	39.21	34.03	38.66
			0.65	39.64	37.05	38.56	37.04	33.33	36.73
			0.75	31.80	29.92	30.52	29.92	27.22	29.68
			0.85	30.66	29.26	29.75	29.26	29.76	29.26
			0.95	28.77	28.26	28.77	28.26	28.77	28.26

وبذلك فقد تم تنفيذ التجارب وفقا للتوليفات المتقدم ذكرها لمنتج منظف الحمامات رونق (x_1) لحصول قيم ARL وقيم SDRL للوحات الـ Binomial EWMA عدة قيم للتغيير في متوسط العملية $\delta \quad 1,2$.وبافتراض قيمة ثابت حد السيطرة مساوى لـ (A=1.35) ولعدة قيم لمعلمة التمهيد (λ) و بعدد حالات لسلسلة ماركوف (N=17). و قد لخصت النتائج مما تقدم ذكره بالجدول (2-3).اذ نلاحظ بان قيم ARL وقيم SDRL للوحات الـ Binomial EWMA تتناقص بزيادة قيمة التغيير في متوسط العملية $\delta \quad 1,2$. بثبوت بقية معلمات لوحة السيطرة كما هو مبين في الجدول (3 - 2).

جدول (3-2) قيم ARL وSDRL للوحات Binomial EWMA منتج منظف الحمامات رونق

(x_1) بمتوسط مساوي لـ 4.86 $\hat{n}\hat{p}_0$ 9(0.54) ولعدة قيم لمعلمة التمهيد (λ)

بعدد حالات لسلسلة ماركوف (N=17) لكل من الحالات ($E_1, E_{(N-1)/2}, E_{(N)}$).

The stateth				E_1		$E_{(N-1)/2}$		$E_{(N)}$	
▪	A	$\hat{p}$	λ	ARL	SDRL	ARL	SDRL	ARL	SDRL
١	1.3٥	$\hat{p}_1$ 0.71	0.1	23.19	6.33	17.80	6.27	5.53	5.38
			0.15	15.64	4.15	12.17	4.09	2.45	2.41
			0.25	9.86	3.36	7.80	3.33	2.64	2.61
			0.35	7.87	3.21	6.32	3.17	2.64	2.60
			0.45	6.73	3.26	5.58	3.25	2.69	2.70
			0.55	6.00	3.34	5.19	3.33	3.01	3.05
			0.65	5.42	3.31	4.82	3.30	3.01	3.04
			0.75	4.89	3.12	4.02	3.16	2.94	2.90
			0.85	5.45	4.16	4.67	4.14	4.67	4.14
			0.95	4.66	4.13	4.66	4.13	4.66	4.13
٢	1.3٥	$\hat{p}_1$ 0.87	0.1	12.81	1.35	8.65	1.28	1.50	0.87
			0.15	8.75	1.06	6.12	1.01	1.11	0.37
			0.25	5.41	0.82	3.77	0.80	1.12	0.38
			0.35	4.07	0.79	2.92	0.79	1.12	0.38
			0.45	3.33	0.78	2.48	0.72	1.12	0.39
			0.55	2.81	0.78	2.35	0.64	1.14	0.47
			0.65	2.47	0.71	1.92	0.78	1.14	0.47
			0.75	2.34	0.63	1.47	0.76	1.14	0.47
			0.85	2.07	0.99	1.49	0.86	1.49	0.86
			0.95	1.49	0.86	1.49	0.86	1.49	0.86

٧. الاستنتاجات

أهم الاستنتاجات التي تم التوصل إليها من خلال نتائج البحث وبشكل عام:

- تزداد حساسية لوحات الـBinomial Cusum من خلال تناقص قيم معيار معدل طول التشغيل والذي يمثل معدل عدد العينات المفحوصة لغاية ورود ما يشير الى ان العملية اصبحت خارج السيطرة بتناقص قيمة حد القرار (h) وبزيادة قيمة التغيير في متوسط العملية الإنتاجية (▪) والقيمة المرجعية (k) عند ثبوت الحالة E_i وعدد الحالات في سلسلة ماركوف (1 h).
- تزداد حساسية لوحات Binomial EWMA من خلال تناقص قيم معيار معدل طول التشغيل والذي يمثل معدل عدد العينات المفحوصة لغاية ورود ما يشير الى

ان العملية اصبحت خارج السيطرة بتناقص قيمة ثابت حد السيطرة (A) وبزيادة قيمة التغيير في متوسط العملية الإنتاجية(□)وقيمة معلمة التمهيد λ عند ثبوت الحالة E_i وعدد الحالات في سلسلة ماركوف(N).

٨.التوصيات

أهم التوصيات التي تم التوصل إليها من خلال البحث عموما: -

- الاهتمام باستعمال لوحات السيطرة Binomial Cusum وEWMA Binomial بوصفها مؤشرا لقياس قدرة المصنع على تقليل الانحرافات في عملية الانتاج، وذلك من خلال مراقبة عمليات الإنتاج والتعرف على مسببات الانحراف التي قد تحدث لأسباب عشوائية او غير عشوائية وبالتالي تحسين الجودة المنتج.
- اعتماد معيار معدل طول التشغيل والانحراف المعياري لطول التشغيل لأنهما يساعدان على الكشف المبكر للانحرافات في عملية الانتاج والعمل على تقليلها وتلافي الانحرافات قبل حدوثها. اذ تعد قيم معدل طول التشغيل (ARL) كقيم للتنبؤ بمعدلات العينات المسحوبة لغاية ورود ما يشير الى ان العملية قد اصبحت خارج السيطرة التي تؤدي الى تقليل كلفة ايقاف العملية الإنتاجية والفحص للمنتج. اما الانحراف المعياري لطول التشغيل يعد مؤشرا لتجانس العينات المسحوبة.

References

1. Angelo Marcio Olive ira Sant' Anna, (2012). process monitoring for nonconforming proportion in manufacturing.Congreso Latino-Iberoamericano de Investigacion Operativa .Rio de Janeiro, Brazil.
2. Borror, C. M., Champ, C. W. and Rigdon, S. E. (1998). Poisson EWMA control charts. Journal of Quality Technology, 30, 352-361.
3. Brook, D. and Evans, D. A. (1972). An approach to the probability distribution of CUSUM run length. Biometrika, 59, 539-549.
4. Edokpa I.W. and Osabuohien-Irabor Osa. and Ogbeide E. Michael,(2013). The Distribution of the Average run Length (ARL) of the Cusum Control Charts for Binomial Parameters when Observation are Poisson Distributed. International Journal of Scientific & Engineering Research, Volume 4, Issue 12.
5. Henning ,E. and konrath ,A. C. and Alves, C.C. and Walter O.M. and Samohy,R.W., (2015). Performance of combined shewhart-Cusum control chart with binomial data for large shifts in the process mean. Journal of Engineering Research and Application. Vol.5, Issue8, (part-5), pp.235-243.
6. Johnson N.L and Leone F.C.(1962), "Cumulative Sum Control Charts: Mathematical Principles Applied to Their Construction and use,part III", Industrial Quality Control, No 19(1),pp 22-28
7. Montgomery, D. C. (1997). Introduction to Statistical Quality control. 3rd ed., John Wily &Sons Inc., New York.
8. Page, E. S., (1954). Continuous inspection schemes. Biometrika, 41(1-2), 100-114.

9. Roberts, S. W., (1959). Control chart tests based on geometric moving average .Technometrics , 1(3), 239–250.
10. Sukparungsee, S. ,(2018). An approximation of average run length using the Markov chain approach of a generally weighted moving average chart to monitor the number of defects. Songklanakarin J. Sci. Technol. 40 (6), 1368-1377.
11. Sukparungsee, S. and Areepong, Y., (2016). Approximation average run length of zero-inflated binomial GWMA chart with Markov chain approach. Far East Journal of Mathematical Sciences, 99(3), 413-428.

الملحق- (A)

أولا: - الحسابات الضرورية لاختبار حسن مطابقة لمنتج منظف الحمامات رونق (x_1). تحت الفرضية H_0 وان البيانات تتبع توزيع ثنائي الحدين. انظر الجدول (a-1) يبين الحسابات الضرورية لاختبار حسن مطابقة والمستحصلة باستعمال التطبيق الجاهز Statgraph.

H_0: البيانات تتبع توزيع ثنائي الحدين

H_1: البيانات لا تتبع توزيع ثنائي الحدين

فقد كان المتوسط مساوي لـ 4.8714 $\bar{x}$ ثم قدرت معلمتي توزيع ثنائي الحدين استعمال التطبيق الجاهز Statgraph وكانت قيم المعلمتين المقدرة $\hat{n} = 9$ و $\hat{p} = 0.54$.

جدول (a-1)يبين الحسابات الضرورية لاختبار حسن مطابقة لمنتج منظف الحمامات رونق (x_1).

Number of defective	Observed frequency	Expected frequency	Contribution to Chi-Sq
At or Below 3.5	8	13	1.6653
3.5 - 4.5	24	15	4.8336
4.5 – 5.5	17	18	0.0723
5.5 – 6.5	15	18	0.0370
Above 6.5	6	10	1.3660
	70		7.97418

بمقارنة قيمة مربع كاي المحسوبة $\chi^2_{cal} = 7.97418$ مع قيمة مربع كاي الجدولية بدرجة حرية (٣) وبمستوى معنوية $\alpha = 0.01$ أي مع القيمة الجدولية 11.3449 $\chi^2_{table}(3,0.99)$.نلاحظ ان قيمة مربع كاي المحسوبة اقل من قيمة مربع كاي الجدولية وبذلك نقبل فرضية العدم وان البيانات تتبع توزيع ثنائي الحدين.