تقدير معلمات التوزيع الاحتمالي كابا المحول باستخدام المحاكاة

Estimation of the transmuted kappa probability distribution parameters in practice

منال موسى عبد اليمّة

Manal mousa abd al-ema

كلية الإدارة والاقتصاد–جامعة كربلاء

manal.m@s.uokerbala.edu.iq

أ.د. مهدي وهاب نعمة نصر الله

Prof.Dr Mahdi Wahab Neama Naser Allah

كلية الإدارة والاقتصاد–جامعة كربلاء

mehdi.wahab@uokerbala.edu.iq

* بحث مستل من رسالة ماجستير في الإحصاء.

الملخص

يعد توزيع كابا ذا الثلاث معلمات من التوزيعات الهامة، وتم العمل على دراسة جديدة للتوزيع خلال خارطة التحويل التربيعية فيصبح بتوزيع كابا المحول ذو الأربع معلمات، وينماز بالمرونة والدقة عن التوزيعات الأخرى، وتمت دراسة خواص التوزيع واستخراجها وتقدير معلمات التوزيع بطريقتين (طريقة الإمكان الأعظم **(Maximum Likelihood Method)** وطريقة كرايمر فون مايسز **(Cramer-Von Mises Minimum)**، ومن أجل إيجاد أفضل طريقة من بين طرائق التقدير تم استعمال أسلوب محاكاة مونتي – كارلو **(Monty Carlo)** باستعمال برنامج **(Mathematica12.2)**، وتم استعمال أربعة نماذج لحجوم عينات مختلفة (صغيرة،متوسطة، كبيرة) واختيار قيم مختلفة لمعلمات التوزيع،والهدف منه دراسة سلوك المقاييس باستعمال متوسط مربعات الخطأ **(MSE)**، وكانت الأفضلية في تقدير المعلمات طريقة الإمكان الأعظم لحجوم العينات الصغيرة والمتوسطة والكبيرة.

الكلمات المفتاحية: توزيع كابا، توزيع كابا المحول، طريقة الإمكان الأعظم، طريقة كرايمر فون مايسز.

Abstract:

The three-parameter kappa distribution is one of the important distributions، a new study has been made for the distribution through the quadratic transformation map، so it becomes the transformed kappa distribution with four parameters. It is characterized by flexibility and accuracy compared to other distributions. The properties of the distribution were studied and extracted and the distribution parameters were estimated in two ways(Maximum Likelihood Method، Cramer-Von Mises Minimum. In order to find the best method among the estimation methods، the Monte-Carlo simulation method was used، Using (Mathematica 12.2) program، four models for different sample sizes (small، medium، large) were used and different values were selected for the distribution parameters. Small، medium and large.

Key words: Kappa Distribution، Transmuted kappa Distribution، Maximum Likelihood Method، Cramer-Von MisesMinimum.

المقدمة

تعتمد جودة الإجراءات المستعملة في التحليل الإحصائي بشكل كبير على أنموذج مفترض أو التوزيع الاحتمالي، وبسبب هذا تم بذل جهد كبير من الباحثين في تطوير فئات عدة من التوزيعات الاحتمالية القياسية، جنبًا إلى جنب مع المنهجيات الإحصائية ذات الصلة، ومع ذلك لا تزال هناك العديد من المشاكل كعدم اتباع البيانات الحقيقية في توزيعها أيًا من النماذج الاحتمالية الكلاسيكية، نستخدم في هذه الدراسة نهج خريطة التحويل الذي اقترحه **Shaw and Buckley** (٢٠٠٩) لتحديد انموذج جديد يعمم توزيع كابا، ويسمى هذا التوزيع بتوزيع كابا المحول وفقا لخريطة تحويل الرتب، وهناك العديد من الدراسات المتعلقة بخرائط تحويل الرتب (**Ranking Transmuted Maps**)، مثال على ذلك، عام، ٢٠١١ تم استعمال خارطة تحويل الرتب لتوزيع ويبل ذو المعلمتين باستعمال خارطة التحويل الرتب التربيعية. **[Aryal، G. R.، & Tsokos، C. P. (2011]**، وفي عام (٢٠١٣) استعملوا خارطة تحويل الرتب التربيعية (**QRTM**)، وذلك لعمل مجموعة من التوزيعات الاحتمالية المرنة التي تأخذ (**Lindley**) كتوزيع اساس **Merovci، F& Elbatal، I.** (٢٠١٣)، (٢٠١٤) قام (**Elbatal**) وآخرون بدراسة توزيع (**Exponentiated fréchet**) المحول، وتم تطبيق تحليل البيانات في الوقت الفعلي لهذا التوزيع، ووجد ان هذا النوع أكثر مرونة، وأن توزيع (**Exponentiated fréchet**) المحول ملائم بشكل أفضل للبيانات التي تم تجميعها وتحليلها في الأصل باستعمال (**fréchet**) أو (**Exponentiated fréchet**). **Elbatal، I.، Asha، G.، & Raja، A. V**.،(٢٠١٤). في عام (٢٠١٥) قام (**Luguterah، A.، & Nasiru، S**)بتعميم جديد لتوزيع (**Exponentiated Pareto**) المسمى بتوزيع (**Exponentiated Pareto**) المحول تم تقدير المعلمات بطريقة الإمكان الأعظم، ويمكن للتوزيع نمذجة البيانات بمعدل خطير مرتفع أو متضائل أو مستقر. **Luguterah، A.، & Nasiru، S**. (٢٠١٥).، عام(٢٠١٩) اقترح (**Khan، M.S**) دراسة توزيع وايبول العكسي المعدل المحول المكون من أربع معلمات، وتمت دراسة الخصائص النظرية لتوزيع وايبول العكسي المعدل المحول **Khan، M. S**. (٢٠١٩))، **Ieren، T. G.، & Abdullahi، J**. (٢٠٢٠) اقترح امتدادًا جديدًا للتوزيع الطبيعي يسمى «التوزيع الطبيعي المحول». يتم تحديد دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي المحول باستخدام خريطة تحويل الترتيب التربيعي تم استخدام ثلاث مجموعات بيانات حقيقية لتحديد ما إذا كان التوزيع الطبيعي المحول أفضل من التوزيع الطبيعي أم لا، وتشير نتائجنا إلى أن النموذج الطبيعي المحول على الرغم من مرونته إلّا أنّه ليس أفضل من التوزيع الطبيعي التقليدي. (**Ieren، T. G.، & Abdullahi، J**). (٢٠٢٠). عام (٢٠٢١) (**Urama**) وآخرون توسيع للتوزيعات الاحتمالية لتحسين مرونتها قاموا بتطوير توزيع باريتو باستعمال طريقة كوماراسوامي وأدت إلى عمل توزيع جديد يسمى توزيع كوماراسوامي- باريتو وتدعى هذه الطريق بطريقة التحويل (**Urama، K.**

U.، Onyeagu، S. I.، & Eze، F. C ((٢٠٢١))، وقدم الباحث (هدير سعدي) عام(٢٠٢٢) بحثاً لتوزيع احتمالي مركب محول Composite Distibution (TEFD)(Exponential- Fréchet))، وتمّت دراسة الخصائص لهذا التوزيع كدالة الكثافة الاحتمالية والدالة التجميعية ودالة البقاء والمخاطرة وعمل أنموذج احتمالي حديث وتقدير معلمات الأنموذج بطريقة الإمكان الأعظمK Maximum Likelihood وطريقة المربعات الصغرى الموزونة Weighted Least square وطريقة أندرسون – دارلنك Anderson darling، وعند إجراء المحاكاة تبيّن أن أفضل طريقة هي اندرسون دارلنك عند حجم عينات صغيرة وعند حجم عينات كبيرة طريقة الإمكان الأعظم طبقت على بيانات مرض الفشل الكلوي وتقدير دالة البقاء للمرض. (هدير سعدي، ٢٠٢٢).

مشكلة البحث:

توجد في مجالات مختلفة كثيرة، ويتم دراستها في علم الإحصاء بظواهر عدة، يصع على الباحثين دراستها وتحليلها أو عدم القدرة على معرفة التوزيع الملائم لدراستها، وهذا الأمر يختلف لاختلاف بيئة البيانات والتطبيقات المختلفة، حيث أن مشكلة الدراسة تكمن في ضعف التوزيعات التقليدية في إيجاد أفضل مقدر يمثل دالة المخاطرة لبيانات التوزيع المحول ليصبح أفضل دقة ومرونة في وصف البيانات وتمثيلها.

هدف البحث:

الهدف من هذا البحث استعمال خارطة تحويل الرتب التربيعية لتوزيع كابا (Transmuted kappa distribution) ت،ومن ثم استعمال طرق التقدير للتوزيع المحول مثل (طريقة الإمكان الأعظم، طريقة كريمر فون مايسز،) وإيجاد أفضل مقدر من قيم المعلمات.

الجانب النظري:

١. توزيع كابا Kappa Distribution

هو من التوزيعات الاحتمالية المستمرة يدرس السلوك العشوائي للظواهر الهامة علميًا وحياتيا، وقد مّر بتطورات هامة على يد (Hosking 1994) وآخرين، وقد قام على تطوير طرائق التقدير لمعلماته (Hutson 1998) و (Ani shabri& Abdul aziz 2010)، حيث استنتج الباحثون الطريقة الأفضل لدراسة الظاهرة التي تناولوها، أي الطريقة الأفضل في تقدير معلمات التوزيع، وقام بعض علماء الإحصاء بتطوير صيغة التوزيع من معلمتين إلى ثلاث معلمات وصولاً إلى أربع معالمات، الصيغة الأصعب في الأشكال المختصة بدراسة الفضاء الخارجي، حيث أن كثيرا ما يتم استخدام هذا التوزيع في ظواهر الفضاء الخارجي والغلاف الجوي، مثلاً سرعة الجزيئات وخصائصها وبلازما الفضاء ودرجة الحرارة للبلازما، ويدرس درجات الحرارة القصوى وظاهرة الرياح الشمسية والظواهر

الحياتية والطبيعية، مثل نمذجة السلوك العشوائي للرياح العاصفة والامطار والفيضانات وتغير المناخ، وكذلك التطبيقات الإحصائية والظواهر الجوية وفي هذه الدراسة يكون صيغة التوزيع ناتجاً عن خلط توزيعين هما توزيع كاما (Gamma distribution) والتوزيع اللوغاريتم الطبيعي (Log-normal distribution)، وإن هذه الصيغة كانت في الدراسة المنشورة عام ١٩٦٤ التي قدمها الباحثان (Earl S.Johson،JR ; Paul W.Milke)، وهناك أيضا صيغة تحتوي على ثلاثة معالم ولكن تكون تلك الصيغة هي صيغة قياسية غير ناتجة عن خلط توزيعين مختصة بدراسة ظواهر خارج نطاق اهتمامنا في هذه الدراسة [باقر كريم، ٢٠١٨].

[A.Monserud،Robert ; Rik، Leemans، (1992)]

دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كابا يمكن كتابتها بالشكل الآتي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha\theta}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1}\left[\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}\right]^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}, & (\text{if } x>0)\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \quad (١)$$

دالة التوزيع التراكمي كالآتي:

$$F(x)=\begin{cases}\left[\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}}\right]^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)}, & (\text{if } x>0)\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \quad (٢)$$

حيث أن:

(α،Θ): هما معلمتا الشكل لتوزيع كابا

(β): معلمة القياس لتوزيع كابا

$(\alpha, \Theta, \beta) > 0$

وبذلك تكون دالة البقاء لتوزيع كابا بالشكل الآتي:

$$S(t) = 1 - \left[\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}}\right]^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \quad (٣)$$

أما دالة المخاطرة لهذا التوزيع فهي:

$$H(t) = \frac{\frac{\alpha\theta}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1}\left[\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}\right]^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}}{1-\left[\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}}\right]^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)}} \quad (٣)$$

٢. خارطة تحويل الرتب (Rank Transformation Map)

تعدّ خرائط تحويل الرتب طريقة ملائمة وحديثة لبناء توزيعات جديدة لا سيما توزيعات الفشل أو البقاء على قيد الحياة، وهي تشتمل على التركيب الوظيفي لدالة التوزيع التراكمي cdf لتوزيع معين مع دالة التوزيع التراكمي العكسي (الدالة الكمية) لتوزيع آخر.

(Granzotto، D. C. T.، Louzada، F.، & Balakrishnan، N. (2017))

حيث تم تقديم خارطة تحويل الرتب التربيعية QRTM من قبل الباحثين [Shaw and Buckley] كوسيلة لتمديد التوزيعات المعروفة عن طريق إضافة معلمة إضافية إلى دالة التوزيع الأساس وتحويلها إلى توزيعات توفر مجموعة أدوات للسيطرة على التواء و تفلطح التوزيع من أجل أن تناسب البيانات الحقيقية.

[Iriarte، Y. A.، & Astorga، J. M. (2014)]

إذا كان للتوزيع الأساس دالة توزيع CDF فأن المتغير العشوائي (x) يكون محولاً بواسطة خارطة تحويل الرتب التربيعية، وإذا كان له G(x) حسب الآتي:

$$G(x)=(1+\gamma)F(x)-\gamma[G(x)]^2 , \quad -1<\gamma<1 \quad (٥)$$

حيث أن γ تمثل معلمة التحويل

وباشتقاق الصيغة أعلاه نحصل على pdf للتوزيع كالآتي:

$$g(x) = f(x)[1 + \gamma - 2\gamma F(x)] \quad (٦)$$

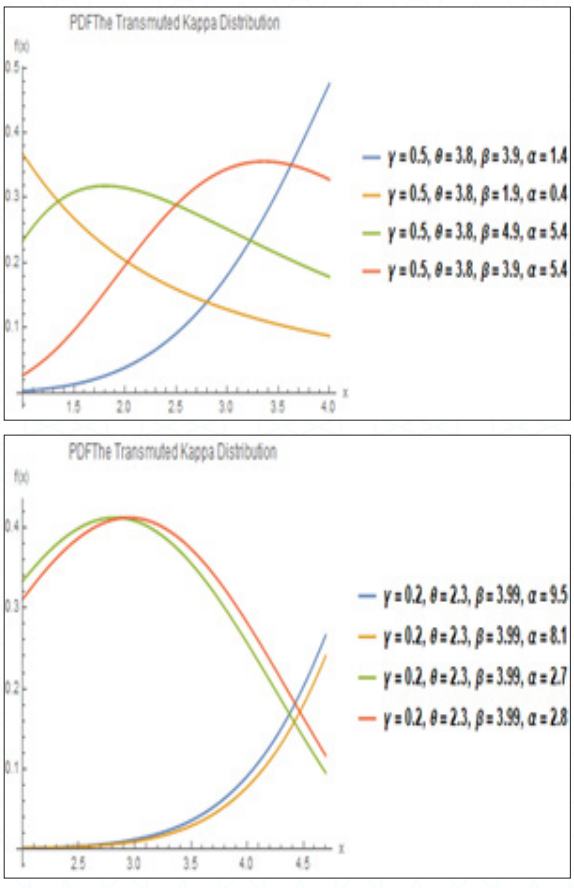
و إن التوزيع الناتج يمثل دالة كثافة احتمالية يطلق عليه اسم التوزيع المحول Transformed distribution، كما هو موضح ان التوزيع الأساس قبل التحويل هو حالة خاصة من التوزيع المحول عندما γ=0

[Arshad، M. Z.، Iqbal، M. Z.، & Ahmad، (2018)]

٣. توزيع كابا المحول Transmuted kappa Distribution

إن توزيع كابا المحول تم استنتاجه من قبل الباحث خلال تطبيق توزيع كابا على خارطة تحويل الرتب للحصول على دالة الكثافة الاحتمالية pdf لتوزيع كابا المحول بعد تعويض المعادلتين (١) (٢) في المعادلة (٦) التي يمكن التعبير عنها بالصيغة الآتية:

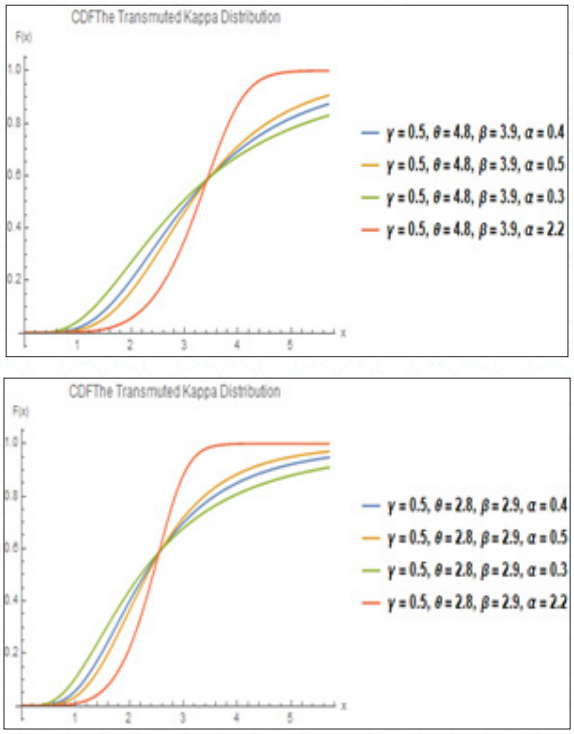
$$g(x)=\frac{\alpha\theta}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1}\left[\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}\right]^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\left[1+\gamma-2\gamma\left[\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right] \quad (٧)$$



شكل (١) دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) لتوزيع كابا المحول

وإن الدالة التراكمية (C.D.F) لتوزيع كابا المحول تكون بالشكل الآتي:

$$F(x)=\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\left(\frac{x}{\beta}\right)(1+\gamma)-\gamma\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)^{-2/\alpha}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{2\theta} \quad (8)$$



شكل (٢) الدالة التجميعية (C.D.F) لتوزيع كابا المحول

٣-١ الخصائص الإحصائية:

٣-١-١: العزم اللامركزي من الرتبة (r^{th}):

$$E(x^r)=\int_0^{\infty} x^r\,\frac{\alpha\theta}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1}\left[\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}\right]^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}dx \quad (9)$$

$$E(x^r)=\left[\beta^r\alpha^{\frac{r}{\alpha\theta}-1}\left[\frac{\Gamma\frac{r+\theta}{\alpha\theta}\Gamma1-\frac{r}{\alpha\theta}}{\Gamma\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right](1+\gamma)-2\gamma\beta^r\alpha^{\frac{r}{\alpha\theta}-1}\left[\frac{\Gamma1-\frac{r}{\alpha\theta}\Gamma\frac{r+2\theta}{\alpha\theta}}{\Gamma\frac{\alpha+2}{\alpha}}\right]\right];\ r=1,2,3\ldots.. \quad (10)$$

٣-١-٢: العزم المركزي من الرتبة (rth):

$$E(x-\mu)^r=\int_0^{\alpha}(x-\mu)^r f(x)\,dx \quad (11)$$

$$\mu_r=\begin{pmatrix}\beta^j\alpha^{\frac{j}{\alpha\theta}-1}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-\mu)^{r-j}\beta^j\alpha^{\frac{j}{\theta\alpha}-1}\left[\frac{\Gamma\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\Gamma1-\frac{j}{\alpha\theta}}{\Gamma1+\frac{1}{\alpha}}\right](1+\gamma)\\ -2\gamma\beta^r\alpha^{\frac{r}{\theta\alpha}-1}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\left(-\frac{\mu}{\alpha^{\frac{1}{\theta\alpha}}\beta}\right)^{r-j}\left[\frac{\Gamma\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{2}{\alpha}\Gamma1-\frac{j}{\alpha\theta}-\frac{1}{\alpha}}{\Gamma1+\frac{1}{\alpha}}\right]\end{pmatrix} \quad (12)$$

وتباين توزيع كابا المحول يكون على النحو الآتي:

$$V(x)=\begin{pmatrix}\beta^j\alpha^{\frac{j}{\theta\alpha}-1}\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}(-\mu)^{2-j}\beta^j\alpha^{\frac{j}{\theta\alpha}-1}\left[\frac{\Gamma\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\Gamma1-\frac{j}{\alpha\theta}}{\Gamma1+\frac{1}{\alpha}}\right](1+\gamma))\\ -2\gamma\beta^2\alpha^{\frac{2}{\theta\alpha}-1}\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}\left(-\frac{\mu}{\alpha^{\frac{1}{\theta\alpha}}\beta}\right)^{2-j}\left[\frac{\Gamma\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{2}{\alpha}\Gamma1-\frac{j}{\alpha\theta}-\frac{1}{\alpha}}{\Gamma1+\frac{1}{\alpha}}\right]\end{pmatrix} \quad (13)$$

٣-١-٣: معامل الالتواء (S.K):

$$S.K=\frac{\begin{bmatrix}\beta^j\alpha^{\frac{j}{\theta\alpha}-1}\sum_{j=0}^{3}\binom{3}{j}(-\mu)^{3-j}\beta^j\alpha^{\frac{j}{\theta\alpha}-1}\left[\frac{\Gamma\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\Gamma1-\frac{j}{\alpha\theta}}{\Gamma1+\frac{1}{\alpha}}\right](1+\gamma)\\ -2\gamma\beta^3\alpha^{\frac{3}{\theta\alpha}-1}\sum_{j=0}^{3}\binom{3}{j}\left(-\frac{\mu}{\alpha^{\frac{1}{\theta\alpha}}\beta}\right)^{3-j}\left[\frac{\Gamma\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{2}{\alpha}\Gamma1-\frac{j}{\alpha\theta}-\frac{1}{\alpha}}{\Gamma1+\frac{1}{\alpha}}\right]\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\beta^j\alpha^{\frac{j}{\theta\alpha}-1}\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}(-\mu)^{2-j}\beta^j\alpha^{\frac{j}{\theta\alpha}-1}\left[\frac{\Gamma\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\Gamma1-\frac{j}{\alpha\theta}}{\Gamma1+\frac{1}{\alpha}}\right](1+\gamma)\\ -2\gamma\beta^2\alpha^{\frac{2}{\theta\alpha}-1}\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}\left(-\frac{\mu}{\alpha^{\frac{1}{\theta\alpha}}\beta}\right)^{2-j}\left[\frac{\Gamma\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{2}{\alpha}\Gamma1-\frac{j}{\alpha\theta}-\frac{1}{\alpha}}{\Gamma1+\frac{1}{\alpha}}\right]\end{bmatrix}^{\frac{3}{2}}} \quad (14)$$

٣-١-٤: معامل التفلطح (C.k):

$$C.k=\frac{\begin{pmatrix}\beta^j\alpha^{\frac{j}{\theta\alpha}-1}\sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}(-\mu)^{4-j}\beta^j\alpha^{\frac{j}{\theta\alpha}-1}\left[\frac{\Gamma\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\Gamma1-\frac{j}{\alpha\theta}}{\Gamma1+\frac{1}{\alpha}}\right](1+\gamma)\\ -2\gamma\beta^4\alpha^{\frac{4}{\theta\alpha}-1}\sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}\left(-\frac{\mu}{\alpha^{\frac{1}{\theta\alpha}}\beta}\right)^{4-j}\left[\frac{\Gamma\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{2}{\alpha}\Gamma1-\frac{j}{\alpha\theta}-\frac{1}{\alpha}}{\Gamma1+\frac{1}{\alpha}}\right]\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\beta^j\alpha^{\frac{j}{\theta\alpha}-1}\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}(-\mu)^{2-j}\beta^j\alpha^{\frac{j}{\theta\alpha}-1}\left[\frac{\Gamma\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\Gamma1-\frac{j}{\alpha\theta}}{\Gamma1+\frac{1}{\alpha}}\right](1+\gamma)\\ -2\gamma\beta^2\alpha^{\frac{2}{\theta\alpha}-1}\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}\left(-\frac{\mu}{\alpha^{\frac{1}{\theta\alpha}}\beta}\right)^{2-j}\left[\frac{\Gamma\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{2}{\alpha}\Gamma1-\frac{j}{\alpha\theta}-\frac{1}{\alpha}}{\Gamma1+\frac{1}{\alpha}}\right]\end{pmatrix}^2} \quad (15)$$

٣-١-٥: دالة البقاء:

$$S(t)=\left(1-\left[\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\left(\frac{x}{\beta}\right)(1+\gamma)-\gamma\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)^{-2/\alpha}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{2\theta}\right]\right) \quad (16)$$

٣-١-٦: دالة المخاطرة:

$$H(x)=\left[\frac{\frac{\alpha\theta}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1}\left[\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}\right]^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\left\{1+\gamma-2\gamma\left[\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right.}{1-\left[\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}\left(\frac{x}{\beta}\right)(1+\gamma)-\gamma\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)^{-2/\alpha}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{2\theta}\right]}\right] \quad (17)$$

٤- طرائق التقدير لتوزيع كابا المحول

Estimation Methods

٤-١ طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Method (MLE

تُعدّ طريقة الإمكان الأعظم من طرائق التقدير التقليدية الجيدة في عملية التقدير، وتكون أكثر دقة عندما يكون حجم العينة كبيرا، وأكثرها استعمالا كونها تمتاز بخصائص جيدة منها الكفاية والثبات والاتساق وعدم التحيز، وتملك أقل تباين، وهي واحدة من طرائق الاستدلال الإحصائي التي لها استعمالات واسعة، وأول من صاغ هذه الطريقة هوفي عام (١٩٢٢)، وقام بتطبيقها لأول مرة الباحث وأن مبدأ هذه الطريقة وهدفها هو إيجاد قيم تقديرية للمعلمات التي نريد تقديرها، وذلك بجعل دالة الأماكن في نهايتها العظمى. (Coit، D. W.، &) (Jin، T. (2000)، (حافظ، علي ماضي ٢٠٢٠).

لتكن مشاهدات عشوائية بحجم n تتبع توزيع كابا المحول ذي الأربع معلمات فأن دالة الأماكن للمشاهدات يمكن صياغتها بالشكل الآتي:

$$f(x,\beta,\alpha,\theta,\gamma)=\frac{\alpha\theta}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1}\left[\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}\right]^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\left[1+\gamma-2\gamma\left[\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right];x>0,,\beta,\alpha,\theta,\gamma\geq 0 \quad (18)$$

$$Lf(x_1,x_2,\dots\dots x_n,\beta,\alpha,\theta,\gamma)=\prod_{i=1}^{n}f(x,\beta,\alpha,\theta,\gamma)$$

تعويض دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كابا المحول (٧) في الصيغة المذكورة آنفاً:

$$Lf(xi,\beta,\alpha,\theta,\gamma)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\alpha\theta}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1}\left[\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}\right]^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\left[1+-2\gamma\left[\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right]\right] \quad (19)$$

$$Lf(xi,\beta,\alpha,\theta,\gamma)=\frac{\alpha^n\theta^n}{\beta^n}\prod_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1}\left[\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}\right]^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\left[1+\gamma-2\gamma\left[\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right]\right]$$

وبأخذ اللوغاريتم لطرفي المعادلة نحصل على:

$$LnLf(xi,\beta,\alpha,\theta,\gamma)=\left\{\begin{array}{l}nLn\alpha+nLn\theta-nLn\beta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}Ln\left(\frac{xi}{\beta}\right)-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\sum_{i=1}^{n}Ln\left(\alpha+\left(\frac{xi}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)\\ +\sum_{i=1}^{n}Ln\left[1+\gamma-2\gamma\left[\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right]\end{array}\right\} \quad (20)$$

$$\frac{dLnLf(xi,\beta,\alpha,\theta,\gamma)}{d\beta}=\left\{\begin{array}{l}-\frac{n}{\beta}-\frac{n(-1+\theta)}{\beta}+\frac{nx(1+\alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-1+\alpha\theta}\theta}{\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)\beta^2}-\\ \frac{2n\left(\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}\right)^{-1+\frac{1}{\alpha}}\left(-\frac{x\alpha\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-1+\alpha\theta}\theta}{\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)\beta^2}+\frac{x\alpha\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-1+2\alpha\theta}\theta}{\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)^2\beta^2}\right)\gamma}{\alpha\left(1+\gamma-2\left(\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\gamma\right)}\end{array}\right\} \quad (21)$$

$$\frac{dLnLf(xi,\beta,\alpha,\theta,\gamma)}{d\theta}=\left\{\begin{array}{l}\frac{n}{\theta}+nLog\left[\frac{x}{\beta}\right]-\frac{n(1+\alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}Log\left[\frac{x}{\beta}\right]}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}\\ -\frac{2n\left(\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}\right)^{-1+\frac{1}{\alpha}}\gamma\left(\frac{\alpha\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}Log\left[\frac{x}{\beta}\right]}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}-\frac{\alpha\left(\frac{x}{\beta}\right)^{2\alpha\theta}Log\left[\frac{x}{\beta}\right]}{\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)^2}\right)}{\alpha\left(1+\gamma-2\left(\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\gamma\right)}\end{array}\right\} \quad (22)$$

$$\frac{dLnLf(xi,\beta,\alpha,\theta,\gamma)}{d\alpha}=\left\{\begin{array}{l}\frac{n}{\alpha}-\frac{nLog\left[\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right]}{\alpha}+\frac{n(1+\alpha)Log\left[\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right]}{\alpha^2}-\frac{n(1+\alpha)\left(1+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\theta Log\left[\frac{x}{\beta}\right]\right)}{\alpha\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)}-\\ \frac{2n\left(\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\gamma\left(\frac{Log\left[\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}\right]\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha\theta}\left(\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\theta Log\left[\frac{x}{\beta}\right]\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\left(1+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\theta Log\left[\frac{x}{\beta}\right]\right)\right)}{\alpha^2}+\frac{\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)^2}{\alpha}\right)}{1+\gamma-2\left(\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\gamma}\end{array}\right\}$$

(23)

$$\frac{dLnLf(xi,\beta,\alpha,\theta,\gamma)}{d\gamma}=\frac{n(1-2(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}})^{\frac{1}{\alpha}})}{1+\gamma-2(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}})^{\frac{1}{\alpha}}\gamma}$$

وبعد مساواة المعادلات (٢٠) (٢١) (٢٢) (٢٣) بالصفر ولكونها غير خطية، لذا لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية، ولذلك تم حلها باستعمال الطريقة العددية (نيوتن رافسون) للحصول على مقدرات طريقة الإمكان الأعظم.

٢-٤ طريقة كرايمر فون مايسز Method of Cramer-Von Mises Minimum

تعتمد طريقة كريمر فون مايسز على مقدرات الحد الأدنى للمسافة إذ يمكننا الحصول على تقديرات المسافة الدنيا لطريقة **Cramer-Von Mises Minimum** وذلك بتقليل المسافة بين الدالة بالنسبة للمعلمات غير المعروفة ويمكننا الحصول على المقدرات، وذلك بالاشتقاق الجزئي **c(γ،θ،β،α،x)** بالنسبة للمعلمات غير المعروفة ومساواتها للصفر وكالآتي:

[Al-Mofleh، H.، Afify، A. Z.، & Ibrahim، N. A. (2020)]

(24)

$$c(\gamma,\theta,\beta,x)=\frac{1}{12n}+\sum_{i=1}^{n}\left[F(\gamma,\theta,\beta,x)-\frac{2i-1}{2n}\right]^2$$

إذ أن **F(γ،θ،β،x)** تمثل الدالة التجميعية لتوزيع كابا المحول وبتطبيق المعادلة رقم (٢٤) نحصل على:

$$c(\gamma,\theta,\beta,x)=\frac{1}{12n}+\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}(1+\gamma)-\gamma\left(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}\right)^{\frac{2}{\alpha}}-\frac{2i-1}{2n}\right]^2$$

ولتصغير المسافة الدنيا يتم اشتقاق جزئي بالنسبة للصيغة السابقة ومساواتها للصفر وحسب ما يأتي:

الاشتقاق بالنسبة γ للحصول على المقدر **γ^_Cvm** وكالاتي:

(25)

$$\frac{c(\gamma,\theta,\beta,x)}{d\gamma}=2\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-\left(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\left[\left(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}(1+\gamma)-\gamma\left(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}\right)^{\frac{2}{\alpha}}-\frac{2i-1}{2n}\right]=0$$

الاشتقاق بالنسبة β للحصول على المقدر **α^_Cvm** كالآتي:

(26)

$$\frac{c(\gamma,\theta,\beta,x)}{d\alpha}=\left\{2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}(1+\gamma)-\gamma\left(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}\right)^{\frac{2}{\alpha}}-\frac{2i-1}{2n}\right]\left(\frac{\left(1-\frac{\alpha}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(-1+(-1+2(1-\frac{\alpha}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}})^{\frac{1}{\alpha}})\gamma\right)\left(-(\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta})Log[1-\frac{\alpha}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}]+\alpha(-1+\alpha\theta Log[\frac{x}{\beta}])\right)}{\alpha^2(\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta})}\right)\right\}$$

الاشتقاق بالنسبة θ للحصول على المقدر **θ^_Cvm** كالآتي:

(27)

$$\frac{c(\gamma,\theta,\beta,x)}{d\theta}=\left\{2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}(1+\gamma)-\gamma\left(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\theta\alpha}}\right)^{\frac{2}{\alpha}}-\frac{2i-1}{2n}\right]\left(-\frac{2(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}\right)^{-1+\frac{2}{\alpha}}\gamma\left(\frac{\alpha(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}Log[\frac{x}{\beta}]}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}-\frac{\alpha(\frac{x}{\beta})^{2\alpha\theta}Log[\frac{x}{\beta}]}{(\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta})^2}\right)}{\alpha}+\frac{\left(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}\right)^{-1+\frac{1}{\alpha}}(1+\gamma)\left(\frac{\alpha(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}Log[\frac{x}{\beta}]}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}-\frac{\alpha(\frac{x}{\beta})^{2\alpha\theta}Log[\frac{x}{\beta}]}{(\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta})^2}\right)}{\alpha}\right\}$$

الاشتقاق بالنسبة β للحصول على المقدر β^_Cvm كالآتي:

$$\frac{c(\gamma,\theta,\beta,x)}{d\beta}=\left\{\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}(1+\gamma)-\gamma\left(\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\alpha}}\right)^{\frac{2}{\alpha}}-\frac{2i-1}{2n}\right]\\ -\frac{2\left(\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}\right)^{-1+\frac{2}{\alpha}}\gamma\left(-\frac{x\alpha\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-1+\alpha\theta}\theta}{\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)\beta^{2}}+\frac{x\alpha\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-1+2\alpha\theta}\theta}{\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)^{2}\beta^{2}}\right)}{\alpha}+\\ \frac{\left(\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}\right)^{-1+\frac{1}{\alpha}}(1+\gamma)\left(-\frac{x\alpha\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-1+\alpha\theta}\theta}{\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)\beta^{2}}+\frac{x\alpha\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-1+2\alpha\theta}\theta}{\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)^{2}\beta^{2}}\right)}{\alpha}\end{array}\right)\end{array}\right\}$$

وبعد مساواة المعادلات (٨٢) (٧٢) (٦٢) (٥٢) بالصفر ولكونها غير خطية، لذا لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الإعتيادية ولذلك تم حلها باستعمال الطريقة العددية (نيوتن رافسون) للحصول على مقدرات طريقة كرايمر فون مايسز.

(γ^_CVM ،β)^_(CVM، α^_CVM،θ^_(CVM)

الجانب التجريبي:

في هذا القسم، سيتم مناقشة نتائج أسلوب المحاكاة، الذي سيقارن بين طرائق التقدير المستعملة لتقدير معلمات توزيع كابا المحول، وأجريت الدراسة على أحجام عينات مختلفة (صغيرة، متوسطة، كبيرة)، وقيم افتراضية محددة مسبقا مختلفة لمعلمات الأنموذج المحول الجديد، واستعمل المعيار الإحصائي(MSE) كأساس للمقارنة، وذلك لتحديد أفضلية طرائق التقدير.

١ - مفهوم المحاكاة (The Simulation Concept):

(الأسلوب الذي يتم خلاله التعامل مع كافة المعضلات المعقدة التغيير التي تتداخل فيه العلاقات الرياضية المستندة إلى منطق حركة تلك المتغيرات بغية وصف نظام معين ومحاولة إيجاد الحلول المناسبة لكافة معضلاته)، وكذلك عرفت بأنها (طريقة عددية تعالج التجارب الرياضية المختلفة باستعمال الحاسوب الألكتروني الذي يحتوي على العديد من العلاقات الرياضية والمنطقية)، وأيضًا عرفت بأنها (نوع من أنواع التقنيات الرقمية تستعمل لأجراء التجارب بوساطة الحاسوب الألكتروني الرقمي. [علي ماضي ٢٠٢٠].

ويمكن فهم أسلوب المحاكاة (Simulation) على إنَّه عميلة تمثيل أو تقليد للواقع الحقيقي، وذلك باستعمال أساليب وطرائق ونماذج معينة، حيث إننا نجد في الواقع الحقيقي العديد من العمليات تكون معقدة الفهم وصعبة التحليل والتفسير، لذلك من الأفضل إنَّ يتم وصف هذه العمليات بصورة مشابهة للصور الحقيقية بنماذج معينة، ففهم الأسلوب يحقق لنا قدراً كبيرا من الإدراك لماهية الواقع الحقيقي خلال محاكاة الأنموذج، حيث أنَّ درجة التقارب أو الشبه بين تجربة المحاكاة والواقع الحقيقي تعتمد بالأساس على مدى المطابقة بين الواقعين الافتراضي المتمثل بـ((Simulation) والواقع الحقيقي. [Casals، M،A،Gil & P Gil (1986)]

٢- وصف مراحل تجربة المحاكاة Describe the stages of the simulation experiment

شملت تجارب المحاكاة مراحل عدّة لتقدير معلمات الأنموذج الاحتمالي، كابا المحول(TKD) وكما يأتي:-

تم اعتماد طريقة مونتي كارلو (Mont- Carlo) لهدف توليد بيانات بأحجام مختلفة تستخدم لتقدير معلمات توزيع كابا المحول،وذلك باستعمال برنامج (Wolfram Mathematica 12.2) وبحسب المراحل الآتية:

المرحلة الأولى:

وهي من أهم مراحل تجربة المحاكاة وهي المبدأ الأساس في بناء المحاكاة، وتعتمد عليها المراحل الأخرى بشكل كبير ويعتمد عليها تطبيق البرنامج وعملياته، إذ يتم فيها اختيار قيم افتراضية، وتتكون هذه المرحلة من الخطوات الآتية:

١. تحديد قيم افتراضية لمعلمات التوزيع المقترح (TKD)

اختيار قيم افتراضية لمعلمات التوزيع المقترح (TKD)، وحسب ما مبين في الجدول (١) أدناه:

جدول (١) القيم الافتراضية للمعلمات والنماذج المقترحة لتوزيع (TKD)

Experiment	θ	α	β	γ
1	2	2.7	2.5	0.5
2	3	2.5	2	0.3
3	2	2.6	3.5	0.3
4	3.5	3	4	0.5

١. اختيار حجم العينة حيث تم اختيار أربعة أحجام وهي (الصغيرة والمتوسطة والكبيرة) وهي (٣٠،٥٠،١٠٠،١٥٠) من أجل تحديد تأثير حجم العينة على نتائج التقدير.

٢. تكرار التجربة (١٠٠٠) مرة لغرض الحصول على أفضل نتائج متجانسة.

المرحلة الثانية:

في هذه المرحلة من مراحل المحاكاة التي يتم فيها توليد البيانات عشوائية بما ينسجم مع التوزيع الاحتمالي المقترح (Transmuted Kappa Disdtribution TKD) باستعمال البرنامج الإحصائي (Wolfram Mathematica 12) وذلك باستعمال طريقة الرفض والقبول كما يأتي:

المرحلة الثالثة:

هي مرحلة التقدير التي فيها يتم الحصول على مقدرات المعلمات لتوزيع، وذلك باستعمال الطرائق المبينة في الجانب النظري التي هي:-

١- طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Method) ويرمز لها بالجداول بالرمز MLE.

٢- طريقة كرامر فون مايسز (Cramer-Von Mises Minimum) ويرمز لها بالجداول بالرمز CVM.

المرحلة الرابعة:

تتم المقارنة في هذه المرحلة بين المقدرات التي تم الحصول عليها لمعلمات توزيع كابا المحول والمبينة في الجداول (٢-٥) وذلك باستعمال متوسط مربعات الخطأ (MSE) كمعيار إحصائي للمقارنة.

جدول (٢) معلمات التوزيع المحول للأنموذج الأول عندما تكون

n	Method		Model 1				Best
			γ^=0.5	θ^=2	β^=2.5	α^_ =2.7	
30	MLE	parameter	0.567768	2.862434	2.556756	2.767096	MLE
		MSE-MLE	0.00263094	0.00273836	0.00276113	0.00273094	
	CVM	parameter	0.534356	2.143115	2.594604	2.6049413	
		MSE -CVM	0.00366595	0.00379281	0.0043432	0.0044683	
50	MLE	parameter	0.6646342	2.133994	2.530671	2.6310146	MLE
		MSE -MLE	0.002611853	0.002728471	0.00249108	0.0025143	
	CVM	parameter	0.512655	2.1043319	2.564355	2.6497364	
		MSE -CVM	0.002976804	0.002873796	0.00395265	0.00490342	
100	MLE	parameter	0.575642	2.179484	2.504844	2.7151853	MLE
		MSE -MLE	0.002310434	0.002123179	0.00225764	0.00259612	
	CVM	parameter	0.554647	2.00859	2.984123	2.7026531	
		MSE -CVM	0.0021405	0.000236567	0.00267213	0.00326557	
150	MLE	parameter	0.5322449	2.056675	2.579453	2.7896792	MLE
		MSE -MLE	0.002004461	0.002011216	0.002150585	0.00224731	
	CVM	parameter	0.443487	2.045665	2.567115	2.66792502	
		MSE -CVM	0.002044514	0.002147672	0.00231728	0.00269709	

جدول (٣) معلمات التوزيع المحول للأنموذج الثاني عندما تكون

n	Method		Model 2				Best
			γ^=0.3	θ^=3	β^=2	α^_ =2.5	
30	MLE	parameter	0.421923	3.121923	2.135848	2.521541	MLE
		MSE-MLE	0.0047594	0.0040995	0.0048854	0.0057043	
	CVM	parameter	0.397045	3.197045	2.110669	2.496268	
		MSE -CVM	0.00440262	0.0039019	0.0039445	0.0041107	
50	MLE	parameter	0.396832	3.296832	2.111497	2.495566	MLE
		MSE -MLE	0.00361239	0.00340426	0.0025605	0.0028742	
	CVM	parameter	0.37267	3.27267	2.085614	2.671053	
		MSE -CVM	0.0013606	0.00031464	0.0029612	0.0036392	
100	MLE	parameter	0.421865	3.021865	2.137876	2.519896	MLE
		MSE -MLE	0.00277258	0.0026043	0.0021024	0.0022285	
	CVM	parameter	0.3956799	3.29599	2.111223	2.553014	
		MSE -CVM	0.0027894	0.0026757	0.002180946	0.0023275	

150	MLE	parameter	0.3767527	3.152544	2.067187	2.453593	MLE
		MSE -MLE	0.00239633	0.00231488	0.001188041	0.0001189	
	CVM	parameter	0.42947523	3.545355	2.249734	2.535162	
		MSE -CVM	0.0025656	0.00257334	0.00205674	0.0021075	

جدول (٤) معلمات التوزيع المحول للأنموذج الثالث عندما تكون

n	Method		Model 3				
			γ^=0.3	θ^=2	β^=3.5	α^_ = 2.6	Best
30	MLE	parameter	0.919312	2.019628	3.327523	2.6213341	CVM
		MSE-MLE	0.00471967	0.0049401	0.0106164	0.0346926	
	CVM	parameter	0.935228	2.033569	3.741231	2.622264	
		MSE -CVM	0.00414554	0.004106963	0.00494864	0.0092413	
50	MLE	parameter	0.895283	1.994449	3.703634	2.698561	MLE
		MSE -MLE	0.0032327	0.0030235	0.0033521	0.00334795	
	CVM	parameter	0.317467	2.245267	3.085616	2.611454	
		MSE -CVM	0.00343592	0.00329599	0.00392192	0.0038755	
100	MLE	parameter	0.121865	2.0341865	3.137878	2.719491	MLE
		MSE -MLE	0.00273777	0.0026819	0.00306973	0.0031107	
	CVM	parameter	0.868788	2.369523	3.677921	2.743051	
		MSE -CVM	0.0031312	0.0029229	0.0033231	0.0032993	
150	MLE	parameter	0.86921	1.969394	3.678813	2.652557	MLE
		MSE -MLE	0.0021493	0.0021031	0.00212036	0.000237	
	CVM	parameter	0.5644808	2.934508	3.652725	2.635461	
		MSE -CVM	0.0022357	0.0024176	0.002861	0.0030043	

جدول رقم (٥) معلمات التوزيع المحول للأنموذج الرابع عندما تكون

n	Method		Model 4				
			γ^=0.5	θ^= 3.5	β^=4	α^_ = 3	Best
30	MLE	parameter	0.521295	3.523341	4.089996	3.093026	MLE
		MSE-MLE	0.0061312	0.0059229	0.0048971	0.0048755	
	CVM	parameter	0.496535	3.498068	4.066291	3.067693	
		MSE -CVM	0.00671967	0.00650023	0.0492192	0.0051107	
50	MLE	parameter	0.495445	3.497366	4.065464	3.067888	MLE
		MSE -MLE	0.0040307	0.0039304	0.0053521	0.00442147	
	CVM	parameter	0.043195	3.700604	3.472853	1.471399	
		MSE -CVM	0.0038866	0.003858	0.0053231	0.0041962	

100	MLE	parameter	0.489995	3.492041	4.058696	3.061726	MLE
		MSE -MLE	0.0024564	0.00252899	0.00393215	0.00301346	
	CVM	parameter	0.329198	3.421029	4.05303	3.053246	
		MSE -CVM	0.00314554	0.0030235	0.0046973	0.0032413	
150	MLE	parameter	0.537914	3.541707	4.108944	3.112952	MLE
		MSE -MLE	0.0017348	0.00016416	0.0019612	0.00030043	
	CVM	parameter	0.514342	3.518006	4.083358	3.088316	
		MSE -CVM	0.0021493	0.00210307	0.0028485	0.0022285	

الاستنتاجات:

١. نلحظ خلال الجدول رقم (٢) أن قيم المعلمات المقدرة للأنموذج الأول كانت طريقة الإمكان الأعظم هي الأفضل خلال عينات (٣٠،٥٠،١٠٠،١٥٠)

٢. نلحظ من جدول رقم (٣) أن قيم المعلمات المقدرة للأنموذج الثاني كانت الإمكان الأعظم هي الأفضل عند حجوم عينات (٣٠،٥٠،١٠٠،١٥٠).

٣. تبيّن من الجدول رقم (٤) أن قيم المعلمات المقدرة للأنموذج الثالث كانت طريقة الإمكان الأعظم عند حجوم عينات (٥٠،١٠٠،١٥٠) وعند حجم عينة (٣٠) كانت طريقة كرايمر فون مايسز هي الأفضل.

٤. نلحظ من جدول (٥) أن أفضل طريقة للمعلمات المقدرة هي الإمكان الأعظم عند حجوم عينات (٣٠،١٠٠،١٥٠)، وعند حجم عينة (٥٠) كانت طريقة كرايمر فون مايسز.

٥. تبيّن من الجداول السابقة أن أفضلية طريقة الإمكان الأعظم للنماذج كافة عند حجوم العينات الصغيرة والكبيرة والمتوسطة.

التوصيات:

١. يمكن إجراء مقارنة بين توزيع كابا المحول وتوزيعات أخرى.

٢. يوصي الباحث بتطوير استخدام توزيع أنموذج كابا المحول ذي الأربع معالم لكي يصبح بالإمكان أن يستخدم في دراسات أخرى.

٣. تطبيق توزيع كابا المحول في مجالات عدة، مثل الجانب الطبي الجانب الزراعي والهندسي والصناعي.

٤. استعمال طرائق أخرى لتقدير توزيع كابا المحول ولا سيما الطرائق اللامعلمية عند حجوم عينات مختلفة.

المصادر

(١) حافظ، علي ماضي، (٢٠٢٠).»بناء دالة احتمالية للتوزيع المختلط (الآسي –فريجت) لتقدير دالة المعولية الضبابية»، رسالة ماجستير، كلية الإدارة والاقتصاد – جامعة كربلاء.

(٢) صاحب، هدير سعدي ٢٠٢٢ «التحويل التربيعي للتوزيع المركب اسي فريجيت»،رسالة ماجستير، كلية الإدارة والاقتصاد– جامعة كربلاء.

(٣) فهد، باقر كريم،٢٠١٨ «اختيار أفضل طريقة لتقدير معلمات توزيع كابا الاحتمالي مع تطبيق عملي»،رسالة ماجستير، كلية الإدارة والاقتصاد–جامعة كربلاء.

(4) Ieren، T. G.، & Abdullahi، J. (2020). A transmuted Normal distribution: properties and applications. Equity journal of science and technology، 7(1)، 16-16.

(5) Merovci، F.، & Elbatal، I. (2013). The McDonald modified Weibull distribution: properties and applications. arXiv preprint arXiv:1309.2961.

(6) Al-Mofleh، H.، Afify، A. Z.، & Ibrahim، N. A. (2020). A new extended two-parameter distribution: Properties، estimation methods، and applications in medicine and geology. Mathematics، 8(9)، 1578.

(7) Arshad، M. Z.، Iqbal، M. Z.، & Ahmad، M. (2018). Transmuted exponentiated moment pareto distribution. Open Journal of Statistics، 8(6)، 939-961.

(8) Aryal، G. R.، & Tsokos، C. P. (2011). Transmuted Weibull distribution: A generalization of theWeibull probability distribution. European Journal of pure and applied mathematics، 4(2)، 89-102.

(9) Casals، M. R.، Gil، M. A.، & Gil، P. (1986). On the use of Zadeh's probabilistic definition for testing statistical hypotheses from fuzzy information. Fuzzy Sets and Systems، 20(2)، 175-190

(10) Coit، D. W.، & Jin، T. (2000). Gamma distribution parameter estimation for field reliability data with missing failure times. Iie Transactions، 32(12)، 1161-1166.

(11) Elbatal، I.، Asha، G.، & Raja، A. V. (2014). Transmuted exponentiated Fréchet distribution: Properties and applications. Journal of Statistics Applications & Probability، 3(3)، 379.

(12) Granzotto، D. C. T.، Louzada، F.، & Balakrishnan، N. (2017). Cubic rank transmuted distributions: inferential issues and applications. Journal of statistical Computation and Simulation، 87(14)، 2760-2778.

(13) Hassan، D. S.، Albadri، F. F.، Ibrahim، N. A.، & Ameen، H. A. (2012). Proposed methods for estimating parameters of the generalized Rayleigh distribution in the presence of one outlier. American Journal of mathematics and statistics، 2(6)، 178-183.

(14) . J.R.M Hosking، (1994)، The four parameter kappa distribution، IBM J.RES. DEVELP. VOL 38، NO3 MAY 1994

(15) Iriarte، Y. A.، & Astorga، J. M. (2014). Distribución de probabilidad de Maxwell transmutada. Revista Integración، 32(2)، 211-221.

(16) Khan، M. S. (2019). Transmuted Modified Inverse Weibull distribution: Properties and application. Pakistan Journal of Statistics and Operation Research، 667-677.

(17) Luguterah، A.، & Nasiru، S. (2015). Transmuted exponential Pareto distribution. Far East Journal of Theoretical Statistics، 50(1)، 31.

(18) Monserud، R. A.، & Leemans، R. (1992). Comparing global vegetation maps with the Kappa statistic. Ecological modelling، 62(4)، 275-293.

(19) Shabri Ani ; Abdul Aziz Jemain، (2010)، LQ-moments: Parameter Estimation for Kappa Distribution، Sains Malaysiana 39 (5) (2010):P845-850.

(20) Urama، K. U.، Onyeagu، S. I.، & Eze، F. C. (2021). The Transmuted Kumaraswamy Pareto Distribution. Earthline Journal of Mathematical Sciences، 6(2)، 325-358.