تحليل الانحدار المتعدد اللامعلمي مع دالتي Epanechnikov & Gaussion

Nonparametric in Multiple regression analysis function Epanechnikov & Gaussion)

أ.م.د. لقاء علي محمد ميسم عبدالنبي عبدالحسن

الملخص:-

ان تحليل الانحدار هو اداة احصائيه نقوم من خلالها ببناء نماذج احصائيه وذلك لتقدير العلاقه بين المتغير المعتمد والمتغيرات التفسيريه حيث تنتج معادله احصائيه توضح العلاقه بين المتغيرات ويمكن استخدام هذه العلاقه للتقدير والتنبؤ.

يلقى موضوع اللامعلمية اهتماماً واضحا في معظم الدراسات والتي تأخذ طابعا أكثر تقدما في عملية التحليل الإحصائي الدقيق الذي يهدف إلى الحصول على مقدرات ذات مستوى عالٍ من الكفاءة , وتمت المقارنة من خلال أسلوب المحاكاة بأستعمال نموذج اللامعلمية واحجام عينات وتباينات مختلفة بأستعمال معيار المقارنة.

يهدف هذا البحث الى تقدير دالة الانحدار اللامعلميه باستخدام مقدرات *(Nadaraya-Watson) & (Regression local polynomial)* في حالة وجود دالتي *(Epanechnikov) & (Gaussion)*.

من خلال نتائج المحاكاة تبين ان افضل دالة *Epanechnikov* عند استعمال المقدر *Nadaraya-Watson*

الكلمات المفتاحيه :- الانحدار المتعدد , نواة المترابطه للانحدار المتعدد (نواة مترابطه المستمره للانحدار المتعدد (Epanechnikov,Gaussion),(مقدر ناداريا_ واتسون) و(متعدد الحدود الموضعي للانحدار المتعدد) ,عرض الحزمه.

Abstract:-

The regression analysis is a statistical tool through which we build statistical models in order to estimate the relationship between the dependant variable and the explanatory variables. Which produce a statistical equation that shows the relationship between these variables This relationship can be used for estimation and prediction.

In most studies, the subject of non-parametric has a clear interest in a more advanced process of statistical analysis aimed at obtaining high-quality competencies. The simulation method was used to compare the non-parametric model with different size samples and variances using some comparison criterion

The aim of this study is to estimate the function of the regression of the non-parametric using the estimatores of (Nadaraya-Watson) & (Regression local polynomial) in the case of(Epanechnikov), (Gaussion)

The simulation results was found that the Epaneknikov function is the best when using the estimated Nadaraya-Watson

Keywords: - Multiple regression, nucleus correlations of multiple regression (continuous correlation nucleus of multiple regression (Epaneknikov, Gaussion), (Nadaraya_ Watson) and (polynomial of multiple regression), Bandwidth.

المبحث الاول

منهجيه البحث

1 . المقدمه:-

نماذج الانحدار واحدة من اهم اصناف النظرية الإحصائية وذلك لما قدمته للباحثين في شتى المجالات العلمية والإنسانية من حلول علمية لمشاكلهم وبسبب تنوع مجالات تطبيقاتها كان لابد من تنوع أشكالها هي الأخرى وان هذا التنوع يعود سببه لاختلاف طبيعة الموارد المتاحة للباحثين من طبيعة البيانات, هذا من جهة ومن جهة اخرى بسبب اختلاف ما الذي يرده الباحثون من معالجة مشكلة ما. وعلى اساس ذلك قسمت نماذج الانحدار الى صنفين أساسيين بحسب طبيعة البيانات وهي:

أولا: نماذج الانحدار المعلمية

ثانيا: نماذج الانحدار اللامعلميه والتي تقوم على ايجاد العلاقة بين السبب ونتيجة السبب من خلال منحنى يصف تلك العلاقة لذا فانه في الانحدار اللامعلمي يكون الباحث مهتما بإعطاء وصف عام للعلاقة وليس دراسة تفاصيل العلاقة الدقيقة. وعلى الرغم من أن نماذج الانحدار اللامعلمي هي اضعف وصفا من نماذج الانحدار ألمعلمي إلا أنها في الوقت نفسه تحتاج الى قيود او شروط اقل من النماذج المعلمية وهذا الأمر تحديدا هو الذي جعل من نماذج الانحدار اللامعلمية أداة مرغوبة جدا لدى الباحثين لكون إن البيانات الفعلية ليست دوما لديها مواصفات مثالية. وكان الباحثون على الدوام يطرحون مسألة مهمة وهي انه في حالة وجود بيانات غير مثالية هل يقفون عاجزين عن حل تلك المشكلة أو القيام ببعض التنازلات للحصول على نماذج اقل فعالية ولكن في الوقت نفسه يمكن ان توفر حلول منطقية وطبعا يكون الجواب عادة باعتماد الخيار الثاني مما أدى إلى انتعاش طريقة التفكير بنماذج الانحدار اللامعلميه. وتطورت هذه

النماذج بشكل كبير في العقود الأخيرة وفي مجالات عديدة, وكما في الهندسة والجغرافيا وعلم الاقتصاد والطب.

يهدف هذا البحث الى تقدير دالة الانحدار اللامعلميه باستخدام مقدرات *(Nadaraya–Watson)*, *(Regression local polynomial)* في حالة وجود دالتي *(Epanechnikov) (Gaussion)*.

2. مشكلة البحث :-

ان مشكلة الانحدار المتعدد اللامعلمي شهدت اهتماما كبيرا في السنوات الاخيره مما جعل الباحثون يهتمون بدراسة الانحدار المتعدد اللامعلمي عندما تكون بيانات اللاخطيه متعدد المتغيرات اي انها ستخالف الشروط الاساسيه لتحليل الانحدار المتعدد اللامعلمي وبتالي يكون التحليل الاعتيادي غير مرضي ويعطي نتائج غير مجديه.

3. هدف البحث :-

ان هدف البحث هو تقدير دالة الانحدار اللامعلميه وذلك بأستخدام مقدرات اللامعلميه (Nadaraya–Watson) &(Regression local polynomial) بوجود دالتي Epanechnikov & Gaussion.

المبحث الثاني

الجانب النظري

1.2 الانحدار المتعدد :-

نفرض أن(X_1, Y_1),……..,(X_n, Y_n) يمثل متجها من المتغيرات العشوائيه الموزعه توزيعا مستقلا متماثلا على

$T_d X$ R($\subseteq$ R^{d+1})

m(x)=E$(Y|X = x)$

ومعادلة الانحدار تعرف [6.pp:4] :-

$$Y=m(X_i)+\varepsilon_i \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad \ldots(1)$$

من المعلوم ان منحنى الانحدار يصف العلاقه بين متغير الاستجابه (Y) وبين المتغيرات التفسيريه(التوضيحيه) (X), حيث ان (.)m تمثل داله الانحدار غير المعروفه(مجهوله) و,(εi) يمثل أخطاء المشاهدات بمتوسط صفر وتباين محدود

2.2 .نواة المترابطه للأنحدار المتعدد

ان النواة المترابطه تنقسم الى قسمين هما :-

أ : النواة المترابطه المتقطعه للانحدار المتعدد .

ب : النواة المترابطه المستمره للانحدار المتعدد.

ويمكن تعريف النواة المترابطه $K_{x,H}$ (.) على ان $T_d(\subseteq R^d)$ التي تمثل داله الانحدار والتي تقدر X∈ T_d و H هي مصفوفة عرض حزمه ونفرض ان $S_{x,H}$ $(\subseteq R^d)$ تدعى نواة المترابطه اذا توفرت الشروط التاليه [9.pp:5].

1. X ∈ $S_{x,H}$ …(2)

2. E($Z_{x,H}$) = X+a(x,H) … (3)

3. Cov($Z_{x,H}$) = B(x,H) … (4)

حيث $_{x,H}$ متجه عشوائي

$K_{x,H}$ النواة المترابطه

B(x,H) = (b$_{ij}$(x,H)) i,j=1,…..,d

حيث :−

B(x,H) :− مصفوفه صفريه .

و

a(x,H) = (a_1(x,H),….,a_d(x,H))^T

حيث :−

a(x,H)=0

وان متجه T_d=: x∈ R^d

H : – مصفوفه عرض الحزمه مع متوسط صفر ومصفوفه تباين تسمى نواة (متعدد المتغيرات) [2.pp:5].

$$K_{x,H}(.) = \frac{1}{\det H} K[H^{-1}(x-.)] \quad \ldots (5)$$

$$S_{x,H} = X - HS_d \quad \ldots (6)$$

مع

$$E(Z_{x,H}) = X \quad \ldots (7)$$

و

$$Cov(Z_{x.H}) = H\sum H \quad \ldots (8)$$

حيث :–

$Cov(Z_{x,H})$:– مصفوفه التباين .

ويمكن تعريف النواة المترابطه متعدده [8.pp:389]:–

$$K_{x,H}(.) = \prod_{j=1}^{d} K_{xj,hjj}^{[j]}(.) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

حيث ان:–

$K^{[j]}{}_{xj,hjj}$:– نواة مترابطه احاديه المتغير (مستمر او متقطعه) وان j=1,…,d .

3.2 طرائق تقدير دالة الانحدار اللامعلمي:-

هناك العديد من الطرائق لتقدير دالة الانحدار اللامعلمي m(Xi) ,ان هدفنا هو تقدير دالة الانحدار غير المعروفه من خلال معادلة الانحدار التي تمثل بالمتغيرات التوضيحيه (X) ومتغير الاستجابه (Y) ,لتقدير دالة الانحدار اللامعلميه:-

Y=m(Xi)+ε_i $\quad\quad i = 1,2, \dots \dots .., n$

1.3.2 ممهد ناداريا -واتسون(NW):-

يعتبر من اكثر الممهدات استخدما واكثرهم شيوعا في تقدير دالة الانحدار اللامعلمي والذي تم اقتراحه من قبلNadaraya و Watson (1964)ان مقدر نادريا-واتسون باستخدام نواة المترابطه Associated Kernel [6.pp:5]

$$\text{Mn}(X;K_{x,H})=\sum_{i=1}^{n} \frac{Y\, K_{x,H}(Xi)}{\sum_{i=1}^{n} K_{x,H}(Xi)} \quad \dots \dots \dots (10)$$

حيث لكل $x \in T_d \subseteq R^d$

حيث:-

$H \equiv H_n$:- هي مصفوفه عرض الحزمه

بحيث:-

$$H_n \to 0 \quad\quad and \quad\quad n \to \infty$$

K :-تمثل نوع من النواة المترابطه $K_{X,H}$

2.3.2 ممهد متعدد الحدود الموضعي للانحدار المتعدد :

ويدعى أيضا بممهد الانحدار الخطي المحدد (الموضعي) والذي تم اقتراحه من قبل الباحث Fan(1993) , وان الانحدار الموضعي متعدد الحدود يعد طريقه مرنة لنموذج الانحدار اللامعلمي المتعدد الحدود

$$\mathrm{K_H}\,(\mathrm{x}) = \frac{1}{|\mathrm{H}|}\,K(H^{-1}x) \qquad \dots (11)$$

حيث :-

K :- تمثل دالة النواة

H:- تمثل مصفوفه عرض حزمه متماثله وموجبه وذات بعد d*d [1.pp:130].

$$\mathrm{K}\,(\|\mathrm{x}\|/\mathrm{h})$$

حيث :-

K:-تمثل دالة النواة مع معلمة التمهيد h.

وان مجموع المحلي لمربعات الصغرى تعطي بواسطه [4.pp:97].

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(x)(Yi - a_0 - \sum_{j=1}^{d} a_j\,(X_{ij} - X_j))^2 \qquad \dots (12)$$

حيث:-

$$w_i(x)=\mathrm{K}(\|xi - x\|/\mathrm{h}) \qquad \dots(13)$$

وبفرض ان a_j و a_0 معادله في (12) يمثلان حل المسأله بأستخدام المربعات الصغرى الموزونه في حساب تقدير $\hat{a}$ ف معادله (14) وهي قيمه ل a.

ومن المربعات الصغرى الموزونه نحصل على [1.pp:130]:-

$$\hat{a} = (X^T\, W\, X)^{-1}\, X^T\, W\, Y \qquad \ldots (14)$$

حيث :-

$$X=\begin{pmatrix} 1 & x_{11}-x_1 & \cdots & x_{1d}-x_d \\ 1 & x_{21}-x_1 & & x_{2d}-x_d \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1}-x_1 & \cdots & x_{nd}-x_d \end{pmatrix}$$

$$Y=(Y_1, \ldots \ldots \ldots, Y_n)^T$$

وان W_{x} :- هي مصفوفه الاوزان وهي مصفوفه قطريه عناصرها wi(x)

4.2 نواة المترابطه :-

من اجل توضيح اهميه النواة المترابطه في الانحدار المتعدد تم استخدام بعضها في دراسات عديده منها نواة احاديه المتغيرات متقطعه (Binomial Kernel ,Discret triangular Kernel,,Dirac Du Kernel) وبعض الاخر احاديه المتغيرات مستمره (Epanechnikov Kernel ,Gamma Kernel .Beta Kernel ,Gaussian Kernel) وواحد منها ثنائيه المتغيرات (Bivariatr Beta)[7.pp:5].

- في هذا البحث تم دراسة المتغيرات للانحدار المتعدد (Epanechnikov Kernel) & (Gaussion Kernel)

5.2 نواة مستمره أحادية المتغيرات:-

في هذا البحث سندرس نواة أحادية المتغيرات للانحدار المتعدد اللامعلمي:-

1 . نواة Epanechnikov

2 . نواة Gaussion

1.5.2 نواة Epanechnikov :-

ومن المعروف ان نواة Epanechnikov تعرف ب [7.pp:6].

$$K^E(u) = \frac{3}{4}(1-u^2) \quad l_{[-1.1]}(u) \qquad \dots(15)$$

تعرف النواة المترابطه نواة Epanechnikov (Epan) في Sx,h={x−h,x+h} مع X ∈T1:=R و h>0 تعرف

$$K^E_{x.h}(u) = \frac{3}{4h}\left\{1-(\frac{u-x}{h})^2\right\} \; 1_{[x-h.x+h]}(u) \qquad \dots(16)$$

2.5.2 نواة كاوس :-

تعرف نواة كاوس للانحدار المتعدد [10.pp:261].

$$K^G_{x.h} = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{u-x}{h}\right)^2\right\} \; 1_{R(u)} \qquad \dots(17)$$

حيث:-

h>0, X ∈T:=R مع Sx,h=R

6.2 عرض الحزمه:-

المعلمة الممهدة(smoothing parameter) ويرمز لها بالرمز (H) اذا كانت تستخدم لمتعدد المتغيرات , ويرمز لها بالرمز (h) اذا كانت تستخدم لاحادي المتغير, والتي تدعى (Bandwidth) أي عرض الحزمة او تسمى حجم النافذه او معلمة الانتشار او تسمى سعة

القيد. وهناك عدة طرق تحسب منها عرض الحزمه (Bandwidth) ومنها طريقة Least
(Square Cross_ Validation(LSCV)).

7.2 اختيار مصفوفه عرض الحزمة:-

ان اختيار معلمة عرض الحزمه في حالة أحادي المتغير يتضمن اختيار معلمه مفرده ,اما في حالة متعدد المتغيرات تتضمن اختيار مصفوفة عرض حزمه, ان طريقة(Least (Square Cross_ Validation(LSCV)) لمتعدد المتغيرات هي تعميم لنموذج احادي المتغير التي وضعها الباحثون((Rudemo(1982), Bowman (1984)) وهي احدى طرائق Cross_Validation,تعرف معلمة عرض الحزمه[7.pp:8] .

$$\text{LSCV(H)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[Yi-\widehat{m}_{-i}(Xi,k)]^2 \qquad \dots(18)$$

$$\widehat{\mathrm{H}}=\arg\min_{\mathrm{H}\in H}\mathrm{H}$$

حيث :-

$\widehat{m}_{-i}(Xi,k)$:- المقدرات(Nadaraya–Watson) و(Local Polynomial) .

المبحث الثالث

الجانب العملي

1.3 مراحل بناء تجربة المحاكاة:-

لتوضيح الجانب التجريبي تم تقسيمه الى عدة اقسام وهي:-

المرحلة الأولى:-

ان اهم مرحله هي مرحلة تحديد القيم الافتراضيه والتي تعتمد عليها المراحل التاليه:-

وقد تم اختيار القيم بشكل الاتي:_

1. تحديد حجم العينه n (n=30, n=60, n=120)

2. تحديد قيمه الانحراف المعياري σ (σ=0.5 ,σ=1 ,σ=2)

3. تحديد ابعاد المتغيرات التوضيحيه p (p=4,p=7,p=10)

4. تحديد عدد مرات تكرار التجربه (r=400)

المرحله الثانيه:-

هي مرحلة توليد المتغيرات وقد تم توليد المتغيرات التوضيحيه باستعمال التوزيع المنتظم القياسي Standard Uniform $x_i \sim$ Uni(0,1)

اما الخطأ e_i فقد تم توليده حسب التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين σ^2

$e_i \sim N(0.\sigma^2)$

وتم حساب المتغير المعتمد Y_i على أساس النماذج الاتيه [5.pp:8] Y=$\sin(10\,\pi\,x) + e_i$

<u>المرحله الثالثه :-</u>

لتقدير دالة الانحدار المتعدد اللامعلمي وذلك بوجود دالتي Epanechnikon & Gaussion

الجدول (1) يوضح قيم متوسط مربعات الخطأ MSE عندما تكون عدد المتغيرات التوضيحية (P=4)

الدوال		0.5		1.0		2.0	
	n	NW	LLS	NW	LLS	NW	LLS
Epanechnikov * Epanechnikov	30	1.0552	16.2748	1.0330	35.7537	1.8812	11.7322
	60	0.0187	1.1129	0.0183	0.1239	0.00064	0.0419
	120	0.000068	0.00059	0.0000427	0.00017	0.000232	0.00075
Gaussion * Gaussion	30	0.9701	18.1255	1.0341	39.7583	1.1290	46.7000
	60	0.0149	0.3825	0.0151	1.3578	0.0159	1.6622
	120	0.0000611	0.0014	0.0000603	0.0213	0.000058	0.0980

1.قيم MSE تتناقص عند زيادة حجوم العينات ولجميع الممهدات والدوال .

2. عند حجم العينه n=30 و σ= 1,2 كانت اقل قيمه ل MSE للممهدين (NW,LLS) عند دالة Epanechnikov

3.عند حجم العينه n=60 و σ=0.5 كانت اقل قيمه ل MSE للممهدين (NW,LLS) عند دالة Gaussion وعند σ=1,2 كانت اقل قيمه ل للممهدين (NW,LLS) عند دالة Epanechnikov

4.عند حجم العينه n=120 وσ=1,2 كانت اقل قيمه ل MSE للممهدين (NW,LLS) عند دالة Epanechnikov

الجدول (2) يوضح قيم متوسط مربعات الخطأ MSE عندما تكون عدد المتغيرات التوضيحية (P= 7)

الدوال		0.5		1.0		2.0	
	n	NW	LLS	NW	LLS	NW	LLS
Epanechnikov * Epanechnikov	30	2.4710	2.5679	2.5199	13.7708	2.8204	74.4992
	60	0.0651	0.000252	0.0380	0.2267	0.0220	0.0625
	120	0.9991524	0.000307	0.000160	0.0026	0.000148	0.0069
Gaussion * Gaussion	30	2.2157	17.2806	2.3181	20.6293	2.5275	22.8235
	60	0.0381	1.2107	0.0391	1.6156	0.0413	1.7315
	120	0.000149	0.0058	0.000147	0.0125	0.000141	0.0130

1. قيم MSE تتناقص عند زيادة حجوم العينات ولجميع الممهدات والدوال .

2. عند حجم العينه n=30 و σ= 2 كانت اقل قيمه ل MSE للممهدين (NW,LLS) عند دالة Gaussion وعندσ=0.5,1 كانت اقل قيمه ل للممهدين (NW,LLS) عند دالة Epanechnikov.

3.عند حجم العينه n=60 و σ=1,2 كانت اقل قيمه ل للممهدين (NW,LLS) عند دالة Epanechnikov.

4.عند حجم العينه n=120 وσ=2 كانت اقل قيمه ل MSE للممهدين (NW,LLS) عند دالة Epanechnikov.

الجدول (3) يوضح قيم متوسط مربعات الخطأ MSE عندما تكون عدد المتغيرات التوضيحية (P=10)

الدوال		0.5		1.0		2.0	
	n	NW	LLS	NW	LLS	NW	LLS
Epanechnikov * Epanechnikov	30	3.1933	5.6049	3.7746	16.55805	0.2324	0.00321
	60	0.0671	0.1401	0.0745	0.0080	0.1128	0.0013
	120	0.0002311	0.0010	0.000254	0.0119	0.000216	0.0097
Gaussion * Gaussion	30	3.6926	20.1549	3.8672	22.3982	4.2176	24.5838
	60	0.0602	1.3655	0.0619	1.5712	0.0653	1.6659
	120	0.000235	0.0079	0.000230	0.0112	0.000222	0.0111

1.قيم MSE تتناقص عند زيادة حجوم العينات ولجميع الممهدات والدوال .

2. عند حجم العينه n=30 و σ=0.5 ,1,2 كانت اقل قيمه ل MSE للممهدين (NW,LLS) عند دالة Epanechnikov.

3. عند حجم العينه n=60 و σ=0.5 ,1,2 كانت اقل قيمه ل MSE للممهدين (NW,LLS) عند دالة Epanechnikov.

4.عند حجم العينه n=120 وσ=0.5,1,2 كانت اقل قيمه ل MSE للممهدين (NW,LLS) عند دالة Epanechnikov.

المبحث الرابع

الاستنتاجات والتوصيات

1.4 . الاستنتاجات :-

1. نستنتج ان افضل دالة ولجميع المقدرات وحجوم العينات وقيم التباين كانت دالة Epanechnikov .

2. نستنتج ان افضل مقدر عند استعمال دالة هو مقدر Nadaraya-Watson.

3.نستنتج وجود علاقه عكسيه بين قيم MSE وبين حجوم العينات اذ كلما قلت قيمه MSE زادت حجوم العينات ولجميع الحالات.

2.4 . التوصيات :-

1. نوصي باستخدام دوال Triweight Quartic.

2. نوصي باستخدام مقدرات اللامعلميه اخرى في الانحدار المتعدد اللامعلمي Nearest Neighbor ,Splin.

المصادر :-

1-EL-Housseiny , A. R., Dalia ,Z (2014) "Estimation of Population Total using Local Polynomial Regression with Two Auxiliary Variables" University, Cairo, Egypt , Vol (3) No(2) PP[129-136].

2- Kokonendjia ,C.C., Some´,S.M.,(2015) " On multivariate associated kernels for smoothing general density functions" aUniversity of Franche-Comt´e, Besanc¸on, France ,arXiv:1502.01173.

3-Rosipal .R ., Trejo .L.J (2001) "Kernel Partial Least Squares Regression in Reproducing Kernel Hilbert Space" University of Paisley ,Vol(2) pp[97-123].

4-Schafer ,C ., Wasserman. L " Tutorial on Nonparametric

InferenceWith R "University Carnegie Mellon ,PP[1-202].

5-Smith .M ., Kohn .R (1994) "Nonparametic Regression Using Bayesian Variable Selection" University New South Wales ,Vol(15) pp[1-35].

6- Some´,S.M., Kie´sse´,T,S., Kokonendjia ,C.C " Re´gression multiple non-parame´trique par noyaux associe´s" 1Universite´ de Franche-Comte´and 2Universite´ Nantes Angers Le Mans,pp[1-6].

7- Some´,S.M., Kokonendji,C.C (2014) "Effects of associated kernels in nonparametric multiple regressions" aUniversity of Franche-Comt´e, Besanc¸on, France , arXiv:1502.01488v1,pp[1-18].

8- Some' .S.M., Kokonendjia .C.C, and Ibrahimb .M (2016) "Associated kernel discriminant analysisfor multivariate mixed data"aBourgogne Franche-Comte' University, LMB Besancon, Vol. 09, Issue 02 pp[385-399].

9-Tristan Senga Kiess´e 1;a & Andy Andrianandraina 1;b ''Discrete and continuous nonparametric kernel estimations for global sensitivity analysis''L'Université Nantes Angers Le Mans (LUNAM) Chaire Génie Civil Eco-construction.

10- Wansouwé ,W.E ., Somé ,S.M., and Kokonendji C.C. (2016) "Ake: An R Package for Discrete and Continuous Associated Kernel Estimations" The University of Maroua and Université Bourgogne Franche-Comté vol(8) , no(2) p[258-276].