ايجاد القيود الفائضة في النماذج الرياضية الخطية بالاعتماد على خوارزمية Cosine Simplex

المدرس الدكتور براق صبحي كامل

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Find Redundant Constraints in Linear Mathematical Models Based on the Cosine Simplex Algorithm

Barraq Subhi Kaml[1]

المستخلص:

متى ما كان بناء نماذج البرمجة الخطية الكبيرة والواسعة النطاق, كلما اشتملت في تكوينها على قيود فائضة بسبب احد الامور الشائعة الا وهو الاهمال الذي يحدث لتجنب خطر حذف بعض القيود ذات الصلة أثناء وضع نموذج للمشكلة المدروسة, وقد يحصل ايضاً في مرحلة صياغة النموذج الرياضي بسبب سوء مصدر البيانات. ان وجود قيود فائضة عن الحاجة هو الوضع المشاع الذي يحدث في صياغة النماذج الرياضية الكبيرة , لذا فقد تم التركيز في هذا البحث على ايجاد اسلوب جديد لتحديد القيد الفائض في نموذج البرمجة الخطية بعد ان استعرضت بعض المفاهيم العامة والجوهرية في الوقت ذاته عن النموذج الرياضي فضلاً عن ابراز انواع القيود وما هي تصنيفات القيد الفائض كذلك تم عرض منظور عام عن برمجة القيد, بعدها جرى الانتقال الى تفصيل الاسلوب المقترح في تحديد القيد الفائض بالاستناد الى خوارزمية Cosine Simplex , حيث ان هذه الطريقة المقترحة تعتمد بصورة رئيسية على دمج القيود فيما بينها بعد ايجاد قوة العلاقة الرابطة بين كل قيدين في النموذج, ختاماً فقد زود البحث ببعض الامثلة التوضيحية الشاملة التي تدعم الاسلوب المقترح.

الكلمات المفتاحية: البرمجة الخطية, تصنيف القيود, القيود الفائضة, خوارزمية Cosine Simplex.

Abstract

When large and large-scale linear programming models were built, it consisted of redundant constraints because of one of the common of neglect that occurs to avoid the risk of deleting some of the relevant constraints during modeling the problem due to poor data source. Redundant constraints are common in the formulation of large mathematical models. In this paper, a new approach was established to determine the redundant constraint in the linear programming model after reviewing some general and fundamental concepts at the same time about the mathematical model as well as In addition, a general perspective on constraint programming was presented. The proposed method of determining the redundant constraint was based on the Cosine Simplex algorithm. The proposed method is based mainly on the integration of constraints between them after finding the strength of the relationship between each constraint in the model. Finally, the paper provided some comprehensive illustrations examples that support the proposed method.

Keywords: Linear programming, classification constraints, redundant constraints, Cosine Simplex algorithm.

1. مقدمة

عند صياغة نموذج البرمجة الخطية, غالبًا ما يميل محللوا النظم والباحثون إلى تضمين جميع القيود المحتملة عن طريق الخطأ ، على الرغم من أن بعضها قد لا يكون ملزما في الحل الأمثل. بما أن نسبة صغيرة نسبياً فقط من القيود ملزمة في الحل الأمثل لمعظم مشاكل البرمجة الخطية ، فإن محللي النظم

والباحثين يهتمون بتطوير اساليب رياضية لتحديد القيود الفائضة وغير الضرورية. يدخل القيد الفائض في الحل الأمثل بقيمة موجبة ضئيلة جداً ويدخل المتغير بقيمة صفرية. إن هذا النوع من القيود إن وجدت في نموذج البرمجة الخطية فسوف تتسبب في ضياع الجهد الحسابي.

2. بعض من الدراسات السابقة

اقترح العديد من الباحثون خوارزميات مختلفة لتحديد حالات القيود الفائضة وإزالتها للحصول على نموذج مخفض للبرمجة الخطية, في عام 1975 افترض Brearly وآخرون[2] طريقة بسيطة لتحديد القيود الفائضة عن الحاجة من نظام القيود الخطية , تتضمن هذه الطريقة الحدود الدنيا والعليا لمتغيرات القرار , في عام 1983 اقترح Telgan [9] طريقة محددة (deterministic) لتحديد القيود الفائضة باستخدام معايير النسبة الدنيا كما في طريقة (simplex), في عام 2001 افترض كل من Stojkovic و [8] Stanimirovicطريقة لتحديد القيود الفائضة عن طريق تطبيق مبدأ الحد الادنى والحد الاعلى, في عام 2006 اقترح Paulraj واخرون[7] طريقة استدلالية لتحديد القيود الفائضة باستخدام مصفوفة التقاطع لقيود مشكلة البرمجة الخطية.

3. النموذج الرياضي

ان العديد من التطبيقات العلمية تستفيد من النموذج وعادة ما يستخدم هذا المصطلح لهيكل تم بناءه بهدف اظهار مميزات وخصائص اشياء اخرى. بعض من هذه الميزات والخصائص سيتم الاحتفاظ بها في نموذج تبعاً للاستخدام الذي يوضع له, ان الميزة الاساسية للنموذج الرياضي في بحوث العمليات هو ان ينطوي على مجموعة من العلاقات الرياضية (كالمعادلات والمتراجحات) التي تتوافق مع العلاقات الاكثر قرباً الى العالم الحقيقي (مثل العلاقات التكنولوجية,قوانين الفيزياء وقيود التسويق وغيرها). وهناك عدد من الدوافع لبناء مثل هذه النماذج, Paul williams [6]:

1- الممارسة الفعلية لبناء نموذج غالبا ما يكشف عن العلاقات التي لم تكن واضحة لكثير من المهتمين, ونتيجة لذلك، يتم التوصل إلى فهم أكبر للهدف الذي يتم تصميمه.

2- بعد بناء النموذج من الممكن تحليله رياضياً للمساعدة في اقتراح مسارات العمل.

3- من الممكن اجراء التجربة على النموذج بدلاً من واقع المشكلة .

من المهم ادراكه أن النموذج يعرف من العلاقات التي تتضمنها والتي تكون الى حد ما مستقلة عن البيانات في النموذج, ويمكن استخدامه في العديد من الحالات المختلفة بأختلاف البيانات.ان العديد من النماذج المستخدمة في بحوث العمليات (وحقول أخرى مثل الهندسة والاقتصاد) تتخذ أشكالا قياسية, ومن انواع النماذج , النماذج الفيزيائية (المادية) والنماذج الرياضية (التحليلية) وبشقيها الساكنة والديناميكية.

4. المفهوم العام للفائض

يتم حل مشكلة البرمجة الرياضية باستخدام أحد أساليب الحل, ومن ثم تظهر النتائج لغرض تنفيذها في المشاكل الحقيقية, اذ يمكن أن نرى أن هناك ثلاث محاور قد يحدث فيها الفائض التي يمكن تحديدها على النحو التالي [5]:

1- فائض في سياق المشكلة: قد يكون هنالك حذف او اهمال لبعض جوانب المشكلة دون حدوث تغيير في نتائج الحل.

2- فائض في سياق المنهجية: في بعض المسائل يكون اهمال تاثير الطريقة المستخدمة لايسبب اي تغيير في هيكلية الحل.

3- فائض في سياق الحل: قد يحدث اهمال او تجاهل لبعض جوانب المشكلة التي لها التاثير الكبير على نتائج الحل النهائي.

يعرف النوع الاول بالفائض المطلق اما النوعين الاخريين فيعرفان بالفائض النسبي , يحدث القيد الفائض في مرحلة صياغة النموذج الرياضي بسبب الصعوبات المتأصلة في عملية الصياغة ، خاصة في الانظمة الكبير ومن الممكن أن تصبح المشكلة كبيرة إلى درجة أن يفقد صانع القرار الحل لتلك المشكلة برمتها.

5.ما هو القيد وما تصنيف القيد الفائض: عادةً ما ينطوي القيد $c(x_1,...,x_n)$ على عدد محدد من متغيرات القرار $x_1,...,x_n$, كل متغير x_i يأخذ القيمة μ_i من المجموعة المحددة Ω_i والتي تسمى بمجال المتغير x_i.

يعرف القيد c بالعلاقة $\Re_c \subset \Omega_1 \times ... \times \Omega_n$, ويعد قيد محقق فيما اذا كانت $(\mu_1,...,\mu_n) \in \Re_c$.

ان القيد الفائض هو قيد يمكن إزالته من نظام القيود الخطية دون حدوث تغير لمنطقة الحل المقبولFeasible Region , ليكن لدينا النظام التالي المؤلف من m من المتباينات (قيود خطية غير سالبة) و n من المتغيرات , $m \geq n$:

$$AX \leq b\,,\, X \geq 0 \qquad (1)$$

حيث ان

$$A \in R^{m+n}, b \in R^m, X \in R^n$$

ليكن $A_i X \leq b_i$, يمثل القيد i في المنظومة (1) ولتكن $S = \{X \in R^n \mid A_i X \leq b_i \,, X \geq 0\}$, تمثل منطقة الحل المقبول الخاصة بمنظومة المعادلات (1).

اذا كان $S_k = \{X \in R^n \mid A_i X \le b_i \, , X \ge 0, i \ne k\}$, منطقة الحل المقبول المتعلقة بمنظومة المعادلات $A_i X \le b_i \, , i = \overline{1,m}, i \ne k$, القيد k, $A_k X \le b_i ,(1 \le k \le m)$ يعد قيد فائض عن المنظومة (1) اذا وفقط اذا $S = S_K$, ويعرف بالقيد الضروري (necessary constraint) اذا وفقط اذا $S \ne S_K$.

يمكن تصنيف القيود الفائضة كقيود فائضة قوية واخرى ضعيفة, اذ يعتبرالقيد $A_i X \le b_i$ فائض ضعيف اذا كان $A_i X = b_i$ لبعض قيم $X \in S$, ويعد فائض قوي اذا كان $A_i X < b_i$ لجميع قيم $X \in S$.

كذلك فان القيد المستنفذ (Binding constraint) هو الذي يمر عبر النقطة المثلى ويطلق عليه أيضا بالقيد الوثيق الصلة بالحل الامثل, اما القيد غير المستنفذ (Nonbinding Constraint) فهو القيد الذي لا يمر عبر نقطة الحل الأمثل, لكنه يمكن أن يحدد حدود منطقة الحل المقبول.

6. برمجة القيد:

تعتبر برمجة القيد اسلوب مختلف لحل العديد من المشاكل التي يمكن حلها بواسطة البرمجة الخطية, في بعض الأحيان يعرف ايضاً باسم القيد المحقق أو برمجة المجال المحدد او المنتهي, في حين أن الأساليب المستخدمة يمكن اعتبارها أقل تعقيداً ، بالمعنى الرياضي التقليدي.

في برمجة القيد كل متغير له مجال محدود من القيم المحتملة, هذه القيود ذات تنوع أكثر شمولاً من القيود الخطية الاعتيادية ويتم التعبير عنها عادةً في شكل واضح والتي تاخذ قيمة صحيحة أو خاطئة وهي تُعرف أيضًا بالقيود العليا (meta) حيث يتم تطبيقها (إذا ما تم استخدامها) على النموذج ككل وإدراجها في نظام برمجة القيد المستخدم, وهذا على النقيض من القيود "المحلية" أو "الإجرائية" التي يمكن أن ينشئها المستخدم للمساعدة في عملية الحل.

ان مفهوم "القيد" في برمجة القيد هو عام جدا, وهي تشمل القيود الرياضية التقليدية مثل المعادلات الخطية أو اللاخطية وعدم المساواة ، والتي غالبا ما تسمى القيود الحسابية, مع ذلك ، هناك ميزة جوهرية لبرمجة القيد هي أنها تقدم بالإضافة إلى ذلك مجموعة كبيرة ومتنوعة من القيود الأخرى ، والتي يمكن أن تسمى القيود الرمزية. تُعرف القيود الرمزية التي تنشأ من خلال تجميع عدد من القيود البسيطة ، كل عدد صغير من المتغيرات يحول إلى قيد جديد يشمل جميع هذه المتغيرات معاً ، وتسمى بالقيود العليا و التي تعد المفهوم الرئيسي لبرمجة القيد.

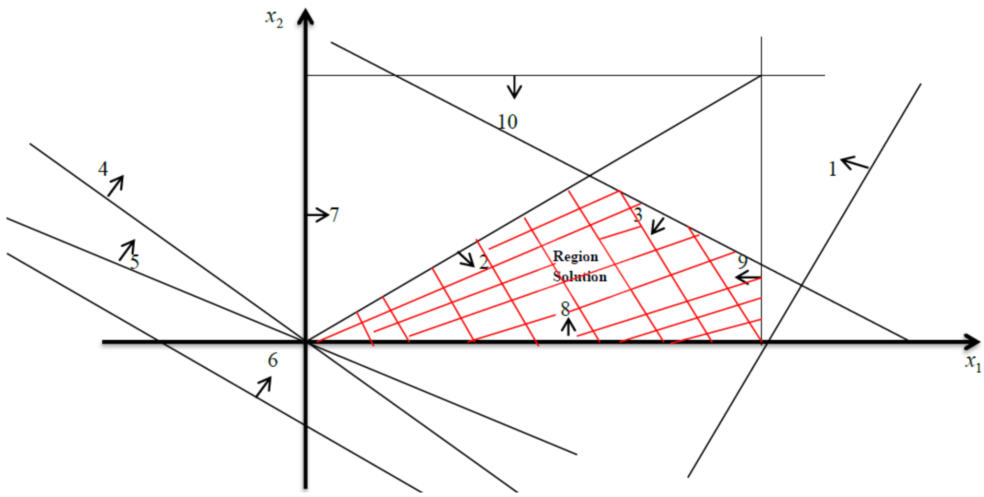
يوضح المثال التالي انواع وتصنيف القيود المتعلقة بنماذج البرمجة الخطية.

مثال (1)

ليكن لدينا منظومة المتباينات المدرجة ادناه ,Barraq [3]:

القيد	رقم القيد
$x_1 - x_2 \le 8$	1
$-x_1 + x_2 \le 0$	2
$x_1 + x_2 \le 12$	3
$-2x_1 - x_2 \le 0$	4
$-x_1 - x_2 \le 0$	5
$-x_1 - x_2 \le 4$	6
$-x_1 \le 0$	7
$x_1 \le 8$	8
$-x_2 \le 0$	9
$x_2 \le 8$	10

عند القيام برسم منظومة المعادلات بالصيغة البيانية ينتج لنا المخطط رقم (1)



المخطط رقم (1) يوضح انواع القيود في البرمجة الخطية

يتضح من المخطط رقم (1) ان القيود رقم (9,8,3,2) تصنف بأنها قيود ضرورية, والقيود رقم (1,4,5,6,7,10) هي قيود فائضة, اضافة الى ذلك فأن القيود (1, 4, 5, 7) تعتبر قيود فائض ضعيف, اما القيدين (6, 10) فيعدان فائضين قويين.

ويلاحظ من المخطط (1) ، أن القيود الفائضة الضعيفة تقع على مسساس من منطقة الحل المقبول Feasible Region, بيد ان القيود الفائضة القوية لا تمس تلك المنطقة.

7.خوارزمية Cosine Simplex:

لتكن مشكلة البرمجة الخطية التالية Herbert, Corley [4] :

$$\max z = C^T X$$
$$s.t$$
$$AX \le b \qquad (2)$$
$$X \ge 0$$

يرمز الى الصف i من المصفوفة A بـ a_i , كذلك فأن القيد i من المنظومة رقم (2) يكون على الشكل

$$a_i X \le b_i \ , i = 1,\dots,m \qquad (3)$$

حيث ان X يمثل مجموعة من متغيرات نموذج البرمجة الخطية التي تاخذ الشكل $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, b_i الجانب الايمن من المورد (القيد) رقم i.

لنفترض ان النموذج رقم (2) يمتلك منطقة حل مقبول بقيد رقم r في المعادلة (3) لكل $a_{rj} > 0, j = 1,\dots,n$ و $b_r > 0$, هذه الفرضية تضمن ان المنظومة رقم (1) لها حل امثل.

لكل قيد i في المعادلة (3), تعرف الزاوية الواقعة بين المتجهات a_i للقيد i ومتجه معاملات متغيرات دالة الهدف C على النحو التالي:

$$\cos\theta_i = \frac{a_i^T c}{\|a_i\|\|c\|} \qquad (4)$$

وتعرف المتجهات المذكورة في المعادلة اعلاه على النحو التالي:

a_i: متجه المعاملات التقنية Technology Coefficient من الجانب الايسر من القيد رقم i.

c: معاملات متغيرات دالة الهدف لنموذج البرمجة الخطية.

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2} = \|C\| \quad , \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2} = \|a_i\|$$

ولتبيسط الطريقة نتبع الخطوات التي الموضحة ادناه:

الخطورة (1) : تحسب المعادلة رقم (4) وترتب القيود بحسب تناقص قيمة $\cos\theta_i$.

الخطورة (2) : حساب النموذج رقم (2) للحصول على قيم (x^1), التي تمثل القيم الحل الاولية للنموذج .

الخطورة (3) : التحقق من القيود المعطلة (الفائضة) من $\cos\theta_i$, بأخذ اول قيد متضارب بواسطة قيم (x^1)ومن ثم الذهاب الى الخطوة التي بعدها. في حال عدم وجود ذلك يعد الحل الذي تم التوصل اليه هو الحل الامثل.

الخطورة (4) : ادراج القيد الفائض بالجدول النهائي للحصول على مسالة جديدة عندئذٍ يطبق اسلوب dual simplex والعودة الى الخطوة (3).

8.طريقة مقترحة لايجاد القيود الفائضة بالاعتماد على خوارزمية Cosine Simplex:

في هذا البند من الدراسة ، يتم عرض طريقة جديدة مقترحة لتحديد القيد الفائض. خطوات الطريقة المقترحة على النحو التالي:

نختار مشكلة البرمجة الخطية التقليدية التي تصف الفكرة الأساسية الطريقة المقترحة:

$$Max \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{5}$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \;,\; i=\overline{1,m} \tag{6}$$

$$x \ge 0;\; x \in R^n .$$

بدءً دعنا نقدم تعريف عن الرموز التالية:

$F_i=(f_{i1}, f_{i2},..., f_{in})^T$: يمثل متجه معاملات الجانب الايسر من القيد رقم i.

$\overline{F}_i=(f_{i1}, f_{i2},..., f_{in}, b_i)^T$: يمثل المتجه الممتد للمتجه F_i والذي يحتوي ايضاً على معاملات الجانب الايمن للقيد رقم i, $i=\overline{1,m}$.

تعتمد هذه الطريقة المقترحة بصورة رئيسية على دمج القيود فيما بينها بعد ايجاد قوة العلاقة الرابطة بينهما ولتوضيح هذه الطريقة سيتم استخدام التعاريف التالية التي تم اعتمادا من المصدر , Almodars,[1] :

<u>تعريف (1)</u>

اذا كان هناك قيدين خطيين كما في المنظومة (2) بالرقم $i\,,\,j$,$1\le i,j \le m,$ تسمى العلاقة المعرفة بالمعلمة η علاقة ضعيفة اذا كانت قيمة $\psi_{ij}=(F_i,F_j)/(\|F_i\|\|F_j\|)$, $1\le i,j\le m$, $\psi_{ij}\le \eta$, $0\le \eta<1$.

حيث ان :

$$\|F_j\|=\sqrt{f_1^2+f_2^2+...+f_m^2} \;\;,\|F_i\|=\sqrt{f_1^2+f_2^2+...+f_m^2} \tag{7}$$

وان :

$(F_i,F_j)=\sum_{s=1}^{n} f_{is} f_{js}$ يمثل حاصل الضرب العددي للمتجهين F_i,F_j , $1\le i,j\le m$.

ان قيمة المعلمة η تسمح لنا بتحديد مستوى الترابط بين اثنين من المتباينات (القيود), حيث من السهل معرفة قيمة ψ_{ij} المطابقة لقيمة جيب تمام الزاوية بين المتجهين F_i,F_j , $1\le i,j\le m$, وان $\psi_{ij}=\cos\phi_{ij}=\cos\phi(F_i,F_j)$.

<u>تعريف (2)</u>

اذا كان هناك قيدين خطيين كما في المنظومة (2) بالرقم $i\ ,\ j$ $1\le i,j\le m,$ تسمى العلاقة المعرفة بالمعلمة η علاقة قوية اذا كانت قيمة ψ_{ij} التي يمكن ايجادها بالصيغة اعلاه , بحيث $\psi_{ij}\ge\eta$, $0<\eta\le 1$.

تعريف (3)

اذا كان هناك قيدين خطيين كما في المنظومة (2) بالرقم $i\ ,\ j$ $1\le i,j\le m,$ تسمى العلاقة المعرفة بالمعلمة $\bar{\eta}$ علاقة ضعيفة اذا كانت قيمة $\bar{\psi}_{ij}=(\bar{F}_i,\bar{F}_j)\big/(\|\bar{F}_i\|\|\bar{F}_j\|)$, $1\le i,j\le m$, $\bar{\psi}_{ij}\le\bar{\eta}$, $0\le\bar{\eta}<1$.

تعريف (4)

اذا كان هناك قيدين خطيين كما في المنظومة (2) بالرقم $i\ ,\ j$ $1\le i,j\le m,$ تسمى العلاقة المعرفة بالمعلمة $\bar{\eta}$ علاقة قوية اذا كانت قيمة $\bar{\psi}_{ij}=(\bar{F}_i,\bar{F}_j)\big/(\|\bar{F}_i\|\|\bar{F}_j\|)$, $1\le i,j\le m$, $\bar{\psi}_{ij}\ge\bar{\eta}$, $0\le\bar{\eta}<1$.

من الواضح أن مفهوم $\bar{\eta}$ العلاقة القوية و $\bar{\eta}$ العلاقة الضعيفة بين القيود كما في حالة η للعلاقة القوية والضعيفة وكلاهما مرتبط بقيمة الزاوية الواقعة بين المتجهين $\bar{\psi}_{ij}=\cos\bar{\phi}_{ij}=\cos\bar{\phi}(\bar{F}_i,\bar{F}_j)$ تحسب للمتجهين الممتده $\bar{F}_i,\bar{F}_j$, $1\le i,j\le m$.

ان الفكرة الرئيسية لاقتراحنا في ايجاد القيد الفائض يحتم أن ندرس كل قيد مع جميع القيود المتبقية التي يكون لدى أحدها العدد الاكبر المقابل للشرط $\bar{\psi}_{ij}<\psi_{ij}$ وبذلك يكون القيد فائض.

مثال توضيحي (2):

لتكن لدينا مشكلة البرمجة الخطية التالية:

$$\begin{aligned}
&\max\ z=3x_1+4x_2\\
&s.t\\
&\qquad x_1+3x_2\le 15\\
&\qquad 2x_1+x_2\le 10\\
&\qquad 2x_1+3x_2\le 18\\
&\qquad x_1+x_2\le 7\\
&\qquad 4x_1+5x_2\le 40
\end{aligned}
\qquad x_i\ge 0\ ,\ i=\overline{1,2}$$

لحل النموذج وفقاً للطريقة المقترحة نتبع الخطوات التالية:

الخطوة(1)

بدايةً يقوم صانع القرار بتحديد قوة العلاقة بين القيود والقيود الممتدة ولتكن $\eta=0.6$ و $\bar{\eta}=0.75$.

الخطوة(2)

يتم حساب قيمة ψ_{ij} لكل قيد i مع كل قيد j , باستخدام المعادلة $\psi_{ij} = (F_i, F_j) / (\|F_i\| \|F_j\|)$ للحصول على النتائج المبينة في الجدولين $(2-1)$,$(2-2)$ ادناه بالاعتماد على الحسابات التقديرية.

ψ_{12}	ψ_{13}	ψ_{14}	ψ_{15}	ψ_{23}	ψ_{24}	ψ_{25}	ψ_{34}	ψ_{35}	ψ_{45}
0.752	0.965	1.052	0.94	0.924	1.2	0.966	1.7	0.995	0.991

جدول (2−1)

<u>الخطوة(3)</u>

يتم حساب قيمة $\overline{\psi}_{ij}$ لكل قيد i مع كل قيد j , باستخدام المعادلة $\overline{\psi}_{ij} = (\overline{F}_i, \overline{F}_j) / (\|\overline{F}_i\| \|\overline{F}_j\|)$, للحصول على النتائج المبينة ادناه:

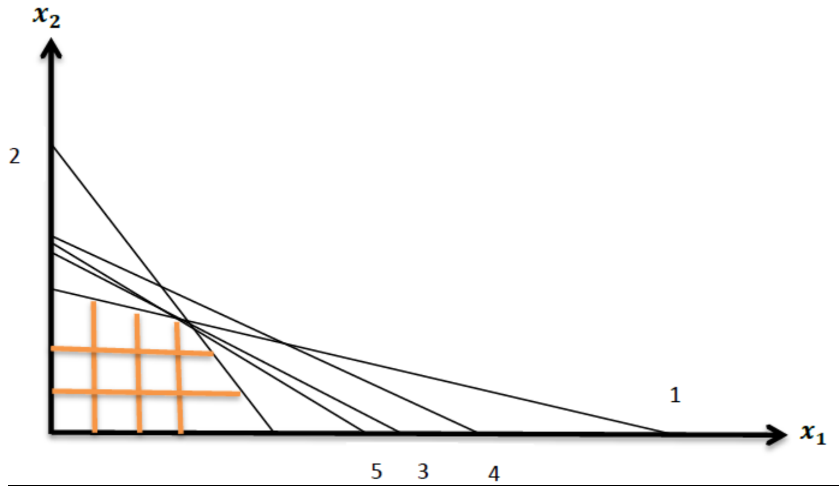
$\overline{\psi}_{12}$	$\overline{\psi}_{13}$	$\overline{\psi}_{14}$	$\overline{\psi}_{15}$	$\overline{\psi}_{23}$	$\overline{\psi}_{24}$	$\overline{\psi}_{25}$	$\overline{\psi}_{34}$	$\overline{\psi}_{35}$	$\overline{\psi}_{45}$
0.98	0.998	0.995	0.997	0.994	0.997	0.994	0.999	0.998	1.004

جدول (2−2)

<u>الخطوة(4)</u>

مقارنة نتائج كل قيمة من ψ_{ij} مع القيمة المقابلة لها من $\overline{\psi}_{ij}$, فاذا كانت $\psi_{ij} > \overline{\psi_{ij}}$, لكل قيد i , عند ذلك يعد القيد فائض, وللامر ذاته فيما يخص القيد j كذلك مقارنتها مع كل من $\eta, \overline{\eta}$, يلاحظ من النتائج اعلاه ان $\overline{\psi}_{14} < \psi_{14}, \overline{\psi}_{24} < \psi_{24}$ و $\overline{\psi}_{34} < \psi_{34}$, لذلك وطبقاً للشرط آنف الذكر يعتبر القيد الرابع من النموذج قيد فائض .

عند القيام برسم منظومة المعادلات بالصيغة البيانية ينتج لنا المخطط رقم (2)



المخطط رقم (2) يوضح القيد الفائض

يلاحظ ان القيد رقم (4) هو قيد فائض كما جاء في الاسلوب المقترح.

<u>مثال توضيحي (3)</u>: لتكن لدينا مشكلة البرمجة الخطية التالية:

$$\max\ z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

$$s.t$$

$$\begin{array}{ll} 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 50 & ,5x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 35 \\ 12x_1 + 6x_2 + 9x_3 \le 40 & ,2x_1 + \ 2x_2 + x_3 \le 40 \\ 4\,x_1 + \ x_2 + 2x_3 \le 20 & ,7x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 30 \\ x_1 \qquad\qquad\quad \le 4 & ,x_i \ge 0\,, i = \overline{1,3} \end{array}$$

لحل النموذج وفقاً للطريقة المقترحة نتبع سلسلة الخطوات التي تم ذكرها في حل المثال السابق, وقد تم الحصول على النتائج المدرجة في الجدولين (3−1),(3−2) ادناه علماً ان $\eta = 0.5$ و $\bar{\eta} = 0.75$:

ψ_{12}	ψ_{13}	ψ_{14}	ψ_{15}	ψ_{16}	ψ_{17}	ψ_{23}	ψ_{24}	ψ_{25}	ψ_{26}	ψ_{27}
0.9981	0.994	0.977	0.943	0.881	0.65	0.971	0.962	0.923	0.87	0.667

ψ_{34}	ψ_{35}	ψ_{36}	ψ_{37}	ψ_{45}	ψ_{46}	ψ_{47}	ψ_{56}	ψ_{57}	ψ_{67}
0.95	0.94	0.889	0.722	0.964	0.882	0.577	0.973	0.743	0.87

جدول (3−1)

$\overline{\psi}_{12}$	$\overline{\psi}_{13}$	$\overline{\psi}_{14}$	$\overline{\psi}_{15}$	$\overline{\psi}_{16}$	$\overline{\psi}_{17}$	$\overline{\psi}_{23}$	$\overline{\psi}_{24}$	$\overline{\psi}_{25}$	$\overline{\psi}_{26}$	$\overline{\psi}_{27}$
0.997	0.987	0.995	0.998	0.993	0.982	0.973	0.985	0.994	0.987	0.98

$\overline{\psi}_{34}$	$\overline{\psi}_{35}$	$\overline{\psi}_{36}$	$\overline{\psi}_{37}$	$\overline{\psi}_{45}$	$\overline{\psi}_{46}$	$\overline{\psi}_{47}$	$\overline{\psi}_{56}$	$\overline{\psi}_{57}$	$\overline{\psi}_{67}$
0.994	0.998	0.989	0.977	0.995	0.992	0.975	0.998	0.987	0.993

جدول (2−3)

عند مقارنة نتائج كل قيمة من ψ_{ij} مع القيمة المقابلة لها من $\overline{\psi}_{ij}$, فاذا كانت $\psi_{ij} > \overline{\psi_{ij}}$, لكل قيد i , عند ذلك يعد القيد فائض, وللامر ذاته فيما يخص القيد j , كذلك مقارنتها مع كل من $\eta,\overline{\eta}$, يلاحظ من النتائج اعلاه ان $\overline{\psi}_{13} < \psi_{13}$ و $\overline{\psi}_{12} < \psi_{12}$, لذلك وطبقاً للشرط آنف الذكر يعتبر القيد الاول من النموذج قيد فائض.

9. الاستنتاجات والتوصيات

تم التركيز في هذا البحث على عرض طريقة لايجاد القيد الفائض في نموذج البرمجة الخطية اذ تعتمد هذه الطريقة على مقارنة قوة التقارب بين كل قيد في النموذج مع القيود الاخرى آخذين بنظر الاعتبار معاملات, متجهات ومعالم النموذج المدروس و طبقت هذه الطريقة على مسألتين مختلفتين من مسائل البرمجة الرياضية الخطية وقد توصل المقترح الى نتائج تطابق الجانب النظري الذي عرض, نوصي بأن يتم تطوير هذه الطريقة لتشتمل على النماذج الرياضية الخطية وغير الخطية ايضاً Linear and Non-Linear Models.

المصادر

1- Almodars Barraq Subhi Kaml,Improve the methods and algorithms of fuzzy linear programming problems with limited resources, Doctorate dissertation, National University of Kyiv,Kyiv2015.
2- A. L. Brearley, G. Mitra, and H. P.Williams, “Analysis of mathematical programming problems prior to applying the simplex algorithm,” Mathematical Programming, vol. 8, pp. 54–83, 1975.
3- Barraq Subhi Kaml," New Approach for Determining a Redundant constraint in Linear Programming Problems",Journal of Baghdad College of Economics Sciences, vol(25),2015.
4- Herbert Corley, Jay M. Rosenberger, Wei-Chang Yeh," The Cosine Simplex Algorithm",International Journal of Advanced Manufacturing Technology · February 2006.
5- Mark Karwan, Valid Lotfi, Jan Telgen, Stanly Zionts,”A study of redundancy in mathematical programming”, operational research 1981.
6- Paul Williams," Model Building in Mathematical Programming",A John Wiley & Sons, Ltd., Publication 2013.
7- Paulraj, C. Chellappan, and T. R. Natesan, “A heuristic approach for identification of redundant constraints in linear programming models,” International Journal of Computer Mathematics, vol. 83, no.8-9, pp. 675–683, 2006.
8- Stojkovi´c and P. S. Stanimirovi´c, “Two direct methods in linear programming,” European Journal of Operational Research, vol. 131, no. 2, pp. 417–439, 2001.
9- Telgen, “Identifying redundant constraints and implicit equalities in system of linear constraints,”Management Science, vol. 29, no. 10, pp. 1209–1222, 1983.