مقارنة بين مسائل القيم الخاصة المنتظمة ومسائل القيم الخاصة المنتظمة مع وجود معلمة القيم الخاصة في الشروط الحدودية.

ناجي مطر سحيب
كلية العلوم/ جامعة ديالى

الخلاصة

درسنا في هذا البحث مقارنة بين القيم الخاصة والدوال الخاصة لمسائل القيم الخاصة المنتظمة للمعادلات التفاضلية الاعتيادية في الرتبة الثانية مع مسائل من نفس النوع ولكن الاختلاف وجود معلمة القيم الخاصة في الشروط الحدودية كما تمت مناقشة بعض المسائل ذات الصلة واجراء المقارنة بين حلولها.

مقدمة

لتكن

$$a(x)\, y^{11}+b(x)y^{1}+c(x)y = F(x) \qquad a<x<b \qquad (1)$$

معادلة تفاضلية اعتيادية خطية في الرتبة الثانية وغير متجانسة حيث ان $a(x)\neq 0$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق في الفترة [a,b] و $c(x)$,$b(x)$ دوال مستمرة في [a,b]

بضرب المعادلة (1) بعامل التكامل $\frac{1}{a(x)} e^{\int_a^x \frac{b(x)}{a(x)}dx}$

يمكن كتابتها بالصيغة الاتية:

$$\frac{d}{dx}\left[p\frac{dy}{dx}\right]+qy=f(x) \qquad (2)$$

حيث ان

$$P(x)=e^{\int_a^x \frac{b(x)}{a(x)}dx}$$

$$q(x)=\frac{c(x)}{a(x)}p(x)$$

$$f(x)=\frac{F(x)}{a(x)}p(x)$$

المعادلة (2) تسمى معادلة مترافقة ذاتيا (seff-adjoniut) والمؤثر (operator)

$$L=\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right)+q \qquad (3)$$

يسمى مؤثر مترافقا ذاتيا (seff-adjouiut operator) والمعادلة التفاضلية في النوع

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+qy+r(x)y=0 \qquad (4)$$

تسمى معادلة ستورم- ليوفيلي المنتظمة (Reqular sturm- Liouville) ويمكن كتابتها بالصيغة

$$Ly+\lambda r(x)y=0 \qquad (5)$$

حيث λ عدد يسمى القيم الخاصة ومستقلة عن x والدوال $p(x)$، $q(x)$، $r(x)$ دوال مستمرة في [a,b] و$p(x)$ قابلة للاشتقاق في الفترة [a,b] وان الدالة $y(x)$ تحقق الشروط الحدودية الآتية:

$$\left.\begin{aligned} a_1y(a)+a_2\bar{y}(a)&=0\\ b_1(b)+b_2\bar{y}(b)&=0\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

حيث ان b_2,b_1,a_2,a_1 اعداد حقيقية النظام (5) – (6) يسمى مسالة ستورم – ليوفيلي للقيم الخاصة المنتظمة وان قيم λ التي تجعل للنظام (5) – (6) حل غير تافه (غير صفري) تسمى القيم الخاصة والحلول المقابلة لها تسمى الدوال الخاصة وان مجموعة القيم الخاصة للنظام تسمى طيف النظام (spectrum of system) من ملاحظة النظام (5) -(6) ان القيم الخاصة λ تظهر فقط في المعادلة التفاضلية (5) ولنأخذ الشروط الحدودية الآتية:-

$$a_1y(a)+ a_2\bar{y}(a)= \lambda\ [a_3y\ (a)+a_u\bar{y}\ (b)]$$
$$b_1y(b)+b_2\bar{y}(b)= \lambda[b_3y(b)+b_u\bar{y}\ (b \qquad (7)$$

حيث ان $b_u,b_3.a_u,a_3$ اعداد حقيقية وتحقق

$a_3^2+a_u^2>o$

$b_3^2+b_u^2>o$

في الشروط الحدودية (7) تلاحظ ظهور القيم الخاصة λ في الطرف الأيمن ان النظام (5)-(7) يسمى مسالة ستورم –ليوفيلي للقيم الخاصة المنتظمة مع وجود معلمة القيم الخاصة في الشروط الحدودية في سنة 1973 (Johann walter)[2] برهن وجود الحل لمسالة ستورم - ليوفيلي للقيم الخاصة مع وجود معلمة القيم الخاصة في الشروط الحدودية اذا تحقق الشرط الأتي:

$a_3= a_u= o$

$b_3b_2-b_1b_u>o$

وفي سنة 1977(Donb Hiuton)[3] برهن مبرهنة النشر للنظام (5) –(7) وفي السنة 2008 (Naming J.Guliyer) [4] برهن وجود الحل لمعكوس النظام (5)-(7).

<u>**مبرهنة 1:**</u>
القيم الخاصة لمسالة ستورم- ليوفيلي المنتظمة (النظام(5)-(6)) تكون حقيقية والدوال الخاصة المقابلة لها تكون دوال حقيقية

<u>البرهان</u> انظر[1]

<u>**مبرهنة 2:**</u> جميع القيم الخاصة لمسالة ستورم-ليوفيلي المنتظمة (النظام (5) –(6)) تكون بسيطة (simple) (في الرتبة الاولى)

البرهان انظر [1]

<u>**مبرهنة 3:**</u>
الدوال الخاصة المقابلة للقيم الخاصة المختلفة للنظام (5)-(6) تكون متعامدة بالنسبة لدالة الوزن r(x) على الفترة [a,b]

<u>البرهان</u> انظر [1]

<u>**مبرهنة 4:**</u> القيم الخاصة للنظام (5)-(6) تكون متتابعة متزايدة ويعبر عنها

$\lambda_1< \lambda_2< \lambda_3\ldots$

وتحقق

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$$

<u>البرهان</u> انظر [1]

<u>**مبرهنة 5:**</u> القيم الخاصة للنظام (5) –(7) تكون متتابعة متزايدة ويعبر عنها

$\lambda_1\le \lambda_2\le \lambda_3 \le\ldots$

وتكون حقيقية

البرهان انظر [2]

مبرهنة6: القيم الخاصة للنظام (5)-(7) تكون ذات تعديدية منتهية (finite multiplicity) وتحقق

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$$

البرهان انظر [2]

مبرهنة 7: الدوال الخاصة للنظام (5)-(7) تكون مجموعة نظامية متعامدة

البرهان انظر [2]

مثال: في هذا المثال سوف نناقش القيم الخاصة والدوال الخاصة لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية مع نوعين من الشروط الحدودية النوع الأول لا تحتوي على القيم الخاص والنوع ال ثاني تحتوي على القيم الخاصة:

$$y^{11} + \lambda y = o \qquad (8)$$

النوع الأول من الشروط الحدودية:

$$y(o)=o \qquad (9)$$
$$3y(\pi) = y^1(\pi)$$

النوع الثاني من الشروط الحدودية:

$$y(o)= o$$
$$3y(\pi) = \lambda y^1(\pi) \qquad (10)$$

الحل

المعادلة الجبرية المميزة للمعادلة (8) هي

$$r^2 + \lambda = 0$$

وسوف نناقش λ لثلاثة حالات (سالبة ، صفر وموجبة)

الحالة1: عندما $\lambda<0$ ولتكن $\lambda = -\mu^2$ و $\mu>0$

$$r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow r^2 = \mu^2$$
$$\Rightarrow r = \pm \mu$$

والحل العام

$$y(x) = C_1 e^{\mu x} + C_1 e^{-\mu x}$$

حيث ان C_2, C_1 ثوابت اختيارية

ويمكن كتابة الحل العام $y(x)$ باستخدام الدوال الزائدية

$$Y(x) = C_1 \cosh \mu x + C_2 \sinh \mu x$$

لإيجاد الثوابت الاختيارية C_2, C_1 تستخدم الشروط الحدودية:

باستخدام الشروط الحدودية من النوع الاول (9):

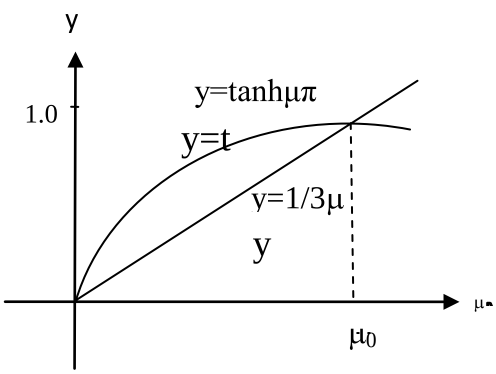
$$y(o)= o \Rightarrow C_1 = o$$
$$3y(\pi) = y^1(\pi) \Rightarrow 3C_2 \sinh \mu\pi = C_2 \cosh \mu\pi$$
$$\Rightarrow C_2(3\sinh \mu\pi - \mu \cosh \mu\pi) = o$$

$\Rightarrow C_2 = 0$

$\Rightarrow 3\sinh\mu\pi = \mu\cosh\mu\pi$

$\Rightarrow \tanh\mu\pi = 1/3\mu$

نرسم المنحنيين tanhμπ و1/3μ حيث μ>0 في المستوى μy



الشكل 1: مخططات = الدوال y=μ/3 y=tanh μπ

من الشكل أعلاه توجد قيمة واحدة ل μ وهي نقطة التقاطع μ_0 ولذا توجد قيمة خاصة واحدة فقط

$$\lambda_0 = -\mu_0^2$$

وتوجد دالة خاصة واحدة مقابلة لها هي

$$y_o(x) = c_o \sinh \mu_o x \ , \ \ c_o \neq 0$$

استخدام النوع الثاني من الشروط الحدودية (10)

$y(o) = o \quad \Rightarrow c_1 = o$

$3y(\pi) = \lambda y(\pi) \Rightarrow 3c_2 \sinh\mu\pi = -\mu^3 c_2 \cosh\mu\pi$

$\Rightarrow 3C_2 \sinh\mu\pi + \mu^3 c_2 \cosh\mu\pi = o$

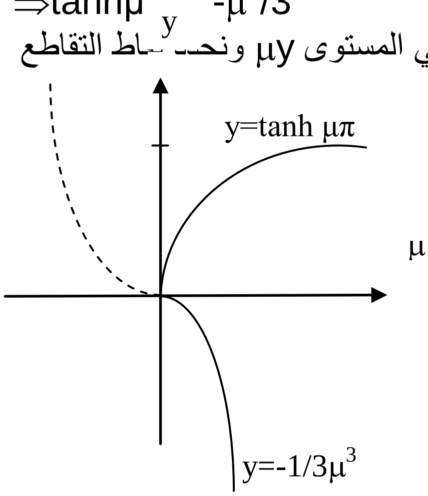
$\Rightarrow C_2 (3\sinh\mu\pi + \mu^3 \cosh\mu\pi) = o$

$\Rightarrow C_2 \neq o$

$\Rightarrow 3\sinh\mu\pi + \mu_3 \cosh\mu\pi = o$

$\Rightarrow \tanh\mu \quad -\mu^3/3$

نرسم المنحنيين tauh μπ ,3/$-\mu^3$ حيث μ>o في المستوى μy ونحـ ـاط التقاطع



شكل 2: مخططات الدوال $y = tauh\ \mu\pi\ ,\ y= -\ 1/3\ \mu^3$

عندما $\mu>o$ لا توجد نقاط تقاطع وعليه لا توجد قيم خاصة ولا توجد دوال خاصة.

الحالة2: عندما $\lambda=o$

الحل العام للمعادلة (8)هو

$$y(x)= c_1x+ c_2$$

باستخدام النوع الأول من الشروط الحدودية (9):

$$y(o) = o \Rightarrow c_2 =o$$

$$3y\ (\pi)= y^1(\pi) \Rightarrow 3\ c_1\pi= c_1$$

$$\Rightarrow c_1\ (3\pi-1)= o$$

$$\Rightarrow c_1 = o$$

$$\Rightarrow\ y(x)=o$$

لا توجد قيم خاصة ودوال خاصة

باستخدام النوع الثاني من الشروط الحدودية (10):

$$y(o)=o \Rightarrow\ c_2 =o$$

$$3y\ (\pi) =o\Rightarrow 3c_1\ \pi = o$$

$$\Rightarrow c_1 = o$$

$$\Rightarrow y(x) = o$$

لا توجد قيم خاصة ودوال خاصة

حالة 3: عندما $\lambda > 0$ ولتكن $\lambda = \mu^2\ ,\ \mu>0$

$$r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r^2 + \mu^2 = 0 \Rightarrow r^2 = -\ \mu^2$$

$$\Rightarrow\ r = \pm\ i\ \mu\ ,\ i =\sqrt{-1}$$

الحل العام هو

$$y(x)= c_1\ \cos\mu x+ c_2\ \sin\mu x$$

حيث c_2,c_1 ثوابت اختيارية

باستخدام الشروط الحدودية من النوع الاول (9):

$$y(o)=o \Rightarrow c_1=o$$

$$3y(\pi)=y^1\ (\pi)\Rightarrow 3c_2\ \sin\mu\pi= \mu\ c_2 \cos\mu\pi$$

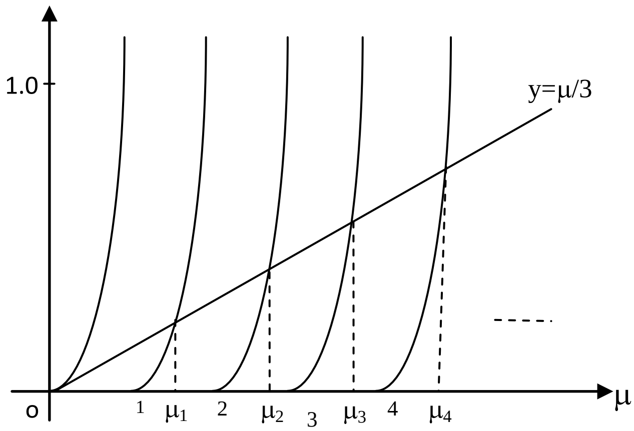
$$\Rightarrow c_2(3\sin\mu\pi-\ \mu\cos\mu\pi)=o$$

$$\Rightarrow c_2\neq o$$

$$\Rightarrow 3\sin\mu\pi-\mu\ \cos\mu\pi=o$$

$$\Rightarrow\ \tan(\mu\ \pi) = 1/3\mu$$

نرسم المنحنيين $\tan\ \mu\ \pi,\ 1/3\mu$ حيث $\mu>o$ في المستوى μy



الشكل 3: مخططات الدوال $y= \tan \mu\pi,\ y=\mu/3$

نلاحظ من الرسم توجد عدد لا نهائي في نقاط التقاطع

$\mu_n,\ n =1,2,3,\ldots$

وعليه يوجد عدد لانهائي من القيم الخاصة

$\lambda= \mu^2_n\ ,\ n=1,2,3,\ldots\ldots\ldots..$

والدوال الخاصة

$y_n (x) = c_n \sin\mu_n x$

$n=1,2,3,\ldots$

باستخدام الشروط الحدودية في النوع الثاني(10):

$y(o)=o \Rightarrow c_1= 0$

$3y(\pi)=xy^1(\pi)\Rightarrow 3c_2 \sin M\pi= \mu^3 c_2 \cos\mu\pi$

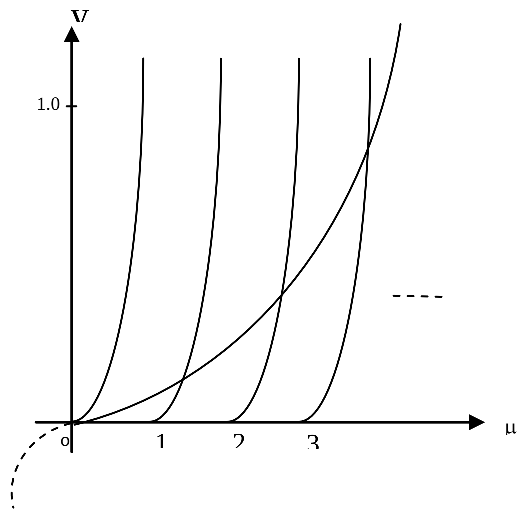
$\Rightarrow c_2\ (3\mathrm{siu}\mu\pi-\mu^3\cos\mu\pi) = 0$

$\Rightarrow c2 \neq 0$

$\Rightarrow 3\sin\mu\pi-\mu^3\cos\mu\pi = 0$

$\Rightarrow \tan\mu\pi= \frac{1}{3}\mu^3$

نرسم المنحنيين $\mu3/3,\tan \mu\pi$ حيث $\mu>o$ في المستوى μy



الشكل 4: مخططات الدوال $y=\tan\mu\pi, y=\mu^3/3$

يوجد عدد لا منتهي من نقاط التقاطع وعليه توجد عدد ما لا نهاية من القيم الخاصة والدوال الخاصة

الاستنتاجات

١. القيم الخاصة للنظام (5)-(6) تكون أعداد حقيقية وكذلك للنظام (5)-(7).
٢. القيم الخاصة للنظام (5)-(6) تكون بسيطة في الرتبة الأولى والقيم الخاصة للنظام (5)-(7) تكون ذات تعددية منتهية .
٣. القيم الخاصة للنظام (5)-(6) تكون متتابعة متزايدة ويعبر عنها

$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$

وتحقق

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$$

أما القيم الخاصة للنظام (5)-(7) تكون متتابعة ومتزايدة ويعبر عنها

$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots$

وتحقق

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$$

٤. الدوال الخاصة للنظام (5)-(6)تكون دوال حقيقية وكذلك للنظام (5)- (7)
٥. من المثال السابق نستنتج ما يلي:

حالات λ	القيم الخاصة للنظام (8)-(9)	القيم الخاصة للنظام (8)-(9)	الدوال الخاصة للنظام (8)-(9)	الدوال الخاصة للنظام (8)-(10)
λ<o	قيمة خاصة واحدة	لا توجد	دالة خاصة واحدة	لا توجد
λ=o	لا توجد	لا توجد	لا توجد	لا توجد
λ>o	ما لا نهاية	ما لا نهاية	ما لا نهاية	ما لا نهاية

References

[1] Nagle, B.saff, snider ‘’Fundamental of differential equation and Boundary value problems’’ Addison Wesley 2000

[2] Walter, J. ‘’Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions”, Maths. 7. 133 (1973), 301-312.

[3] Doub hinton “An expausion theorem for an eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions” The quarterly joumal of mathematics 1979. Oxford Univ. press.

[4] Naming J. Guliyer “Inverse eigenvalue problems for sturm liouville equations with spectral parameter linearly contained in one of the boundary conditions” Addison Wesley 2008.

[5] Yuji Liu “On sturm liouville boundary value problems for second order nonlinear functional finite difference equation” Elsevier science publishers B.V. 2008.

Abstract

The purpose of this paper is to give an comparison between eiguvalues and eigenfunctions for regular eiqenvalue problems for the second under ordinary differential equations and regular eigeuvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions. some related problems are discussed