Tikrit Journal of Administration and Economics Sciences, (31/12/2021);Vol. 17, No. 56, Part (4): 547-557
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.17.56.4.33

Tikrit Journal of Administration and Economics Sciences
مجلة تكريت للعلوم الإدارية والاقتصادية
ISSN: 1813-1719 (Print)

Estimation for parameters of Generalized Poisson Distribution by Simulation Study

Researcher: Maithem Kifah Kadhum
College of Administration and Economics
University of Baghdad
Maithem.kadhum1201@coadec.uobaghdad.edu.iq

Assist. Prof. Dr. Ebtisam K. Abdulah
College of Administration and Economics
University of Baghdad
ekabdullah@coadec.uobaghdad.edu.iq

Abstract:

The Poisson distribution has the property of equal dispersion because of the equal variance and mean this characterizes this distribution from among other discrete distributions. Often and in many real data the population under study are loss of heterogeneous and most of datasets express over dispersion. In this paper, we introduced the generalized Poisson distribution with two parameters (λ, α) as one of the characteristics of this distribution is that the population is non-heterogeneous also it provides a model which suits most count data. The parameters of the generalized Poisson distribution were estimation by different methods, which are Moment method, maximum likelihood method and Mixed (Shrinkage) method. Also, comparison between those methods through simulation study, with different sample sizes and different values of (λ , α) using the mean square error (MSE). The theoretical results are supported by a simulation and lead to that the Mixed (Shrinkage) method is better.

Keywords: Generalized Poisson Distribution, Moment Method, Maximum Likelihood Method, Mixed (Shrinkage) method.

تقدير معلمات توزيع بواسون المعمم باستخدام أسلوب المحاكاة

الباحث: ميثم كفاح كاظم
كلية الإدارة والاقتصاد
جامعة بغداد

أ.م.د. ابتسام كريم عبدالله
كلية الإدارة والاقتصاد
جامعة بغداد

المستخلص:

يمتلك توزيع بواسون الاعتيادي خاصية التشتت المتساوي بسبب تساوي التباين والمتوسط وهذا ما يميز هذا التوزيع عن التوزيعات المتقطعة الاخرى، الا ان كثير من الاحيان وفي العديد من الدراسات تكون المجتمعات تحت الدراسة غير متجانسة وتعاني من تشتت عالي. في هذا البحث تم تقديم توزيع بواسون المعمم ذي المعلمتين (α، λ) اذ ان من خصائص هذا التوزيع ان يكون المجتمع غير متجانس. تم تقدير معلمات توزيع (GPD) بطرائق مختلفة وهي طريقة العزوم

وطريقة الامكان الاعظم والطريقة المختلطة (طريقة التقلص). والمقارنة بين تلك الطرائق بالاعتماد على دراسة المحاكاة واحجام عينات مختلفة وقيم اولية مختلفة واستخدام معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE). اظهر نتائج الدراسة ان طريقة التقلص كانت هي الافضل.

الكلمات المفتاحية: توزيع بواسون المعمم، مقدرات العزوم، مقدرات الامكان الاعظم، مقدرات التقلص.

١. المقدمة

ان مسألة التعامل مع الاحداث او الظواهر الطبيعية وتمثيلها بدالة احتمالية لها توزيع احتمالي معين يتلاءم مع تلك الظواهر واحدة من أبرز المواضيع المهمة في الاحصاء لذا لابد لنا من معرفة تلك الظواهر وتعبير عنها بمتغير عشوائي. اذ ان كل متغير عشوائي يعبر عنه بدالة توزيع احتمالي والتي تكون أما توزيعات متقطعة أو توزيعات مستمرة أو توزيعات مختلطة.

يمتلك توزيع بواسون الاعتيادي (Regular Poisson Distribution (RPD)) ذو المعلمة الواحدة (λ) والذي يسمى احياناً بتوزيع الحوادث النادرة خاصية التشتت المتساوي بسبب تساوي التباين والمتوسط وهذا ما يميز هذا التوزيع عن التوزيعات المتقطعة الاخرى، الا ان كثير من الاحيان وفي العديد من الدراسات تكون المجتمعات تحت الدراسة غير متجانسة، كذلك في المجتمعات التي لها توزيع بواسون الاعتيادي بأن احتمال حدوث الحدث لا يبقى ثابت انما يتغير بتغير الزمن مما يؤدي الى عدم التساوي بين التباين والمتوسط [3].

قدم Consul and Jain عام 1973 توزيعاً معمماً لتوزيع بواسون الاعتيادي (RPD) سمي بتوزيع بواسون المعمم (Generalized Poisson Distribution (GPD)) ذي المعلمتين (α، λ) والذي يسمى احياناً توزيع لاكرانج بواسون (Lagrangion Poisson Distribution) وهو توزيع احتمالي متقطع ويأخذ عدة اشكال، حيث تم فيه اضافه معلمة اخرى (α) وهي معلمة التشتت إضافة الى معلمة التوزيع (λ) ليكون اكثر ملائمة في التعامل مع نمذجة البيانات ذات التشتت العالي (over-dispersion) او التشتت المنخفض (under-dispersion)[5]. ان معلمة التشتت هي لوصف العلاقة بين التباين والمتوسط التي غالباً ما يكون التباين أكبر من المتوسط، وهذه الحالة تدعى بخاصية التشتت العالي (Over-dispersion) وهي صفة شائعة في الواقع التطبيقي والتي تحدث بسبب الارتباط الموجب بين عناصر متغير الاستجابة او بسبب التباين العالي لبيانات العد او بسبب وجود قيم متطرفة او في بعض نماذج الانحدار التي لا تتضمن عدد من المتغيرات التوضيحية المهمة. اما خاصية التشتت المنخفض (Under-dispersion) والتي تعني ان التباين اقل من المتوسط تحدث بسبب توليد البيانات او بسبب عملية النمذجة او بسبب البيانات ذات حجوم العينات الصغيرة. ان لتوزيع (GPD) تطبيقات واسعة في تحليل بعض الاحداث مثل علم الاحياء وعلم البيئة وعلم الوراثة وفي التسويق ونظرية الانتظار وعمليات التفرع وموضوعات أخرى [6]، [7].

٢. هدف البحث: الهدف من هذا البحث هو تقديم توزيع (GPD) وعرض بعض خصائصه وتقدير معلماته باستخدام طرائق تقليدية مختلفة وهي كل من طريقة العزوم وطريقة الامكان الاعظم والطريقة المختلطة (طريقة التقلص). تم استعمال اسلوب المحاكاة في تقدير معلمات التوزيع حيث تم الاعتماد على طريقة الرفض والقبول في توليد المتغيرات العشوائية وتم كتابة البرنامج بلغة

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.17.56.4.33

(MATLAB) وتم اختيار أحجام عينات وقيم افتراضية مختلفة والمقارنة بين طرائق التقدير باستخدام المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE).

٣.توزيع بواسون المعمم: ليكن x متغير عشوائي متقطع قيمه غير سالبة له توزيع بواسون المعمم (GPD)

$$x \sim \text{GPD}\,(\lambda , \alpha)$$

فأن دالة الكتلة الاحمالية (pmf) تكون بالشكل التالي:

$$P_r(x,\lambda,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\,(\lambda+\alpha x)^{x-1}}{x!}\, e^{-\lambda-\alpha x} & x = 0,1,2,\dots \\ & \lambda > 0 \ \ ,\max\left(-1\,,\dfrac{-\lambda}{m}\right) < \ \alpha \ < 1 \\ 0 & x \geq m \ \ if \ \ \lambda + \alpha m \leq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

حيث ان:

λ: تمثل معلمة التوزيع.

α: تمثل معلمة التشتت.

m: اكبر عدد صحيح موجب بحيث يكون $(\lambda + m\alpha \ > 0)$ عندما تكون (α) سالبة. بين (Consul and Shoukri) بان اقل قيمة لـ m لضمان وجود على الاقل خمس فئات لها احتمال غير صفري عندما تكون $(\alpha < 0)$ هي $(m \geq 4)$.

عندما تكون $\alpha = 0$ فأن توزيع (GPD) يؤول الى توزيع (RPD). [4]

عندما تكون قيمة معلمة التشتت $(-1 < \alpha < 0)$ فان المقدار $(\lambda + \alpha x)$ بالإمكان ان يكون سالب، بالتالي فأن ناتج دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع (GPD) ممكن ان يكون سالب حسب قيمة الاس (x-1) إذا كان زوجي ام فردي وعندما تكون حجم العينة كبير. لذلك في هذه الحالة لا يمكن استخدام توزيع بواسون المعمم.

لتجنب هذه المشكلة يتم بتر توزيع (GPD) عند النقطة m، ويتم البتر من اليمين وذلك للحصول على الفترة [0,m). [2]

وتعرف دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع بواسون المعمم المبتور (Truncated Generalized Poisson Distribution) بالشكل التالي:

$$g_x(\lambda,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{p_x(\lambda,\alpha)}{F_m} & x = 0,1,2,\dots,m \\ & \lambda > 0 \quad , \quad -\infty < \alpha < \infty \\ 0 & Other\ wise \end{cases} \qquad (2)$$

حيث ان:

$p_x(\lambda,\alpha)$: دالة الكتلة الاحتمالية الاصلية لتوزيع (GPD).

F_m: دالة التوزيع التجميعية لتوزيع (GPD).

اما المتوسط والتباين لتوزيع (GPD) المبتور فيكون كما يلي:

Tikrit Journal of Administration and Economics Sciences, (31/12/2021);Vol. 17, No. 56, Part (4): 547-557
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.17.56.4.33

$$\mu_x = \frac{\sum_{x=1}^{k} x\, p_x(\lambda,\alpha)}{F_m} \qquad (3)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{x=1}^{k} x^2\, p_x(\lambda,\alpha)}{F_m} - \mu_x^2 \qquad (4)$$

٤. بعض خصائص توزيع بوسون المعمم: المتوسط لتوزيع بواسون المعمم هو:

$$E(x) = \frac{\lambda}{1-\alpha} \qquad (5)$$

التباين لتوزيع بواسون المعمم هو:

$$\mathrm{Var(x)} = \frac{\lambda}{(1-\alpha)^3} \qquad (6)$$

دالة التوزيع التراكمية لتوزيع بواسون المعمم تكون بالشكل التالي:

$$F_X(x) = p_r(X \le x) \qquad (7)$$

$$= \sum_{k\le x} p_r(k) \qquad (8)$$

$$= \lambda\, e^{-\lambda} \sum_{k\le x} \frac{(\lambda+\alpha k)^{k-1}\, e^{-\alpha k}}{k!} \qquad (9)$$

وبما انه توزيع بواسون المعمم (GPD) هو من التوزيعات المتقطة لذا فان هذا التوزيع لا توجد له صيغة محددة لدالة التوزيع التجميعية وانما تعتمد على مجموعة محددة منتهية قابلة للعد.

٥. تقدير معلمات توزيع بواسون المعمم: يتضمن البحث تقدير معلمتي توزيع بواسون المعمم (GPD) باستعمال الطرائق التقليدية وهي طريقة العزوم، طريقة الامكان الاعظم، وطريقة التقلص

١-٥. طريقة العزوم Moment Method: تعتمد هذه الطريقة على مساواة عزم المجتمع $M_r = E(x^r)$ مع عزم العينة $m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r$، وبما ان توزيع (GPD) له معلمتين لذا سيتم اخذ الوسط الحسابي والتباين وكما يلي [7]

عندما r =1

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$m_1 = \bar{x} \qquad (10)$$

Tikrit Journal of Administration and Economics Sciences, (31/12/2021);Vol. 17, No. 56, Part (4): 547-557
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.17.56.4.33

$$M_1 = E(x) \tag{11}$$

من مساواة الصيغتين (10) و(11) نحصل على:

$$\bar{x} = \frac{\lambda}{1-\alpha} \tag{12}$$

$$\widehat{\alpha} = 1 - \frac{\hat{\lambda}}{\bar{x}} \tag{13}$$

عندما r =2

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{14}$$

$$M_2 = E(x)^2 \tag{15}$$

$$= var(x) + \left(E(x)\right)^2 \tag{16}$$

$$= \frac{\lambda + \lambda^2 - \alpha\lambda^2}{(1-\alpha)^3} \tag{17}$$

من مساواة الصيغتين (14) و(17) نحصل على:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{\hat{\lambda} + \hat{\lambda}^2 - \hat{\alpha}\hat{\lambda}^2}{(1-\hat{\alpha})^3} \tag{18}$$

$$\hat{\lambda}_{MM} = \bar{x}\sqrt{\frac{\bar{x}}{\sigma^2}} \tag{19}$$

وبتعويض الصيغة (19) في (13) نحصل على:

$$\hat{\alpha}_{MM} = 1 - \sqrt{\frac{\bar{x}}{\sigma^2}} \tag{20}$$

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.17.56.4.33

٥-٢. طريقة الامكان الاعظم: Maximum Likelihood Method: سيتم ايجاد مقدرات الامكان الاعظم لتوزيع (GPD) لكل تكرارات المشاهدة وكالاتي:

على فرض ان لدينا عينة عشوائية بحجم n اخذت من مجتمع تتوزع مفرداته توزيع (GPD)، وان تكرارات المشاهدة لأصناف مختلفة هي [5].

$n_x \ , x = 0,1,2, \dots , k$

إذا ان k تمثل أكبر المشاهدات.

$$n = \sum_{x=0}^{k} n_x \tag{21}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{x=0}^{k} n_x x}{n} \tag{22}$$

ان دالة الامكان الاعظم لجميع المشاهدات تكون كما يلي:

$$L = \prod_{x=0}^{k} \left[p_{x(\lambda,\alpha)}\right]^{n_x} \tag{23}$$

$$= \prod_{x=0}^{k} \left[\frac{\lambda\,(\lambda+\alpha x)^{x-1}\ e^{-(\lambda+\alpha x)}}{x!}\right]^{n_x} \tag{24}$$

$$= \lambda^{\sum_{x=0}^{k} n_x}\ e^{-\lambda \sum_{x=0}^{k} n_x - \alpha \sum_{x=0}^{n} n_x x} \prod_{x=0}^{k} \left[\frac{(\lambda+\alpha x)^{x-1}}{x!}\right]^{n_x} \tag{25}$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان الاعظم نحصل على:

$$\ln L = n ln\, \lambda - n\lambda - n\alpha\bar{x} + \sum_{x=0}^{k} n_x (x-1) \ln(\lambda+\alpha x) - \sum_{x=0}^{k} n_x \ln x! \tag{26}$$

وبالاشتقاق الجزئي الاول للوغارتم دالة الامكان بالنسبة الى المعلمتين $(\lambda\,,\alpha)$ ومساواتهما الى الصفر نحصل على:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - n + \sum_{x=0}^{k} \frac{n_x (x-1)}{\lambda+\alpha x} = 0 \tag{27}$$

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.17.56.4.33

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = -n\bar{x} + \sum_{x=0}^{k} \frac{n_x x(x-1)}{\lambda + \alpha x} = 0 \qquad (28)$$

بضرب الصيغة (27) بـ $(\widehat{\lambda})$ والصيغة (28) بـ $(\widehat{\alpha})$ وجمع الصيغتين نحصل على الاتي:

$$\hat{\lambda}_{ML} = \bar{x}(1-\hat{\alpha}) \qquad (29)$$

$$f(\hat{\alpha}_{ML}) = \sum_{x=0}^{k} \frac{n_x\, x(x-1)}{\bar{x} + \hat{\alpha}(x-\bar{x})} - n\bar{x} \qquad (30)$$

ان المعادلة (30) غير خطية (Non-liner Equation) لذا فمن الصعب الحصول على صيغة نهائية لتقدير $(\hat{\alpha}_{ML})$. لذلك سيتم حلها بإحدى الطرق العددية (Numerical Method) كطريقة نيوتن-رافسون (Newton-Rophson Method) التكرارية.

قد يؤدي حل الصيغة (30) الى جذور متعددة (Multiple roots) لذلك فان الشرط الكافي والضروري لجعل مقدر $(\hat{\alpha}_{ML})$ يمتلك جذر وحيد (Unique) بين الصفر والواحد عندما تكون $k \geq 2$ إذا وفقط اذا تحقق الاتي: [5]

$$\sum_{x=2}^{k} n_x\, x(x-1) - n\bar{x}^2 > 0 \qquad (31)$$

٥-٣. الطريقة المختلطة (طريقة التقلص) Mixed (Shrinkage) Method: هي احدى الطرائق التي تستعمل المعلومات المسبقة في تقدير المعالم، حيث تمكن الباحث (James R. Thompson) عام 1968م من توظيف هذه المعلومات مع معلومات العينة في الحصول على مقدر أفضل من استعمال معلومات العينة فقط. ان مقدرات التقلص بالرغم من انها متحيزة الا انها تمتلك خاصية اقل متوسط مربعات خطأ. فاذا توفر لدينا مقدرين معلومين فأن المقدر الثالث (المختلط) يمكن ان يتكون من تركيبة خطية من المقدرين المعلومين.

إذا فرضنا ان $\hat{\lambda}_1$ هو مقدر MOM، و $\hat{\lambda}_2$ هو مقدر MLE، فأن المقدر الجديد (مقدر التقلص) الذي اقترحه (Thompson) يكون بالصيغة التالية: [1]

$$\hat{\lambda}_{Sh} = r\hat{\lambda}_1 + (1-r)\hat{\lambda}_2 \quad , \quad 0 \leq r \leq 1 \qquad (32)$$

حيث ان:

r: يمثل دالة التقليص الموزونة (Weighted Shrinkage Function).

اما بصدد دالة التقليص الموزونة (r) فيتم الحصول عليه كما يلي: [2]

$$\hat{\lambda}_{Sh} = r\hat{\lambda}_1 + (1-r)\hat{\lambda}_2$$

اضافة وطرح λ نحصل على:

$$\hat{\lambda}_{Sh} - \lambda = r\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 - r\hat{\lambda}_2 - \lambda$$

بإضافة وطرح rλ نحصل على:

$$\hat{\lambda}_{Sh} - \lambda = r[(\hat{\lambda}_1 - \lambda) - (\hat{\lambda}_2 - \lambda)] + (\hat{\lambda}_2 - \lambda)$$

بتربيع الطرفين نحصل على:

$$(\hat{\lambda}_{Sh} - \lambda)^2 = r^2(\hat{\lambda}_1 - \lambda)^2 - 2r^2(\hat{\lambda}_1 - \lambda)(\hat{\lambda}_2 - \lambda) + r^2(\hat{\lambda}_2 - \lambda)^2 + (\hat{\lambda}_2 - \lambda)^2 + 2r(\hat{\lambda}_1 - \lambda)(\hat{\lambda}_2 - \lambda) - 2r(\hat{\lambda}_2 - \lambda)^2$$

وبأخذ التوقع للطرفين نحصل على:

$$E(\hat{\lambda}_{Sh} - \lambda)^2 = r^2E(\hat{\lambda}_1 - \lambda)^2 - 2r^2E(\hat{\lambda}_1 - \lambda)(\hat{\lambda}_2 - \lambda) + r^2E(\hat{\lambda}_2 - \lambda)^2 + E(\hat{\lambda}_2 - \lambda)^2 + 2rE(\hat{\lambda}_1 - \lambda)(\hat{\lambda}_2 - \lambda) - 2rE(\hat{\lambda}_2 - \lambda)^2$$

$$MSE(\hat{\lambda}_{Sh}) = r^2MSE(\hat{\lambda}_1) - 2r^2COV(\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2) + r^2MSE(\hat{\lambda}_2) + MSE(\hat{\lambda}_2) + 2rCOV(\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2) - 2rMSE(\hat{\lambda}_2)$$

بأخذ المشتقة الاولى للصيغة اعلاه بالنسبة الى r:

$$\frac{\partial MSE(\hat{\lambda}_{Sh})}{\partial r} = 2rMSE(\hat{\lambda}_1) - 4rCOV(\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2) + 2rMSE(\hat{\lambda}_2) + 2COV(\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2) - 2MSE(\hat{\lambda}_2)$$

ومن مساواة المشتقة الى الصفر نحصل على:

$$r = \frac{MSE(\hat{\lambda}_2) - COV(\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2)}{MSE(\hat{\lambda}_1) - 2COV(\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2) + MSE(\hat{\lambda}_2)} \qquad (33)$$

وبعد تعويض المعادلة (33) في (32) نحصل على المقدر الجديد $\hat{\lambda}_{Sh}$:

وبنفس الاسلوب السابق نجد مقدر المعلمة $\hat{\alpha}_{Sh}$

حيث ان:

$$\hat{\alpha}_{Sh} = r\hat{\alpha}_1 + (1 - r)\hat{\alpha}_2 \qquad (34)$$

$$r = \frac{MSE(\hat{\alpha}_2) - COV(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2)}{MSE(\hat{\alpha}_1) - 2COV(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2) + MSE(\hat{\alpha}_2)} \qquad (35)$$

علماً ان $\hat{\alpha}_1$ هو مقدر MOM و $\hat{\alpha}_2$ هو مقدر MLE

وبعد تعويض المعادلة (35) في (35) نحصل على المقدر الجديد $\hat{\alpha}_{Sh}$

٦. **الجانب التجريبي:** نفذت تجربة المحاكاة باستعمال برنامج (MATLAB) وفق المراحل التالية.

أ. اختيار قيم أولية افتراضية لمعلمتي توزيع GPD (λ , α) وبتشكيل اربعة نماذج، اذ تم الافتراض بأن (λ= 1.4 ،7.6) و(α= 0.5 ،0.8).

Tikrit Journal of Administration and Economics Sciences, (31/12/2021);Vol. 17, No. 56, Part (4): 547-557
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.17.56.4.33

الجدول (١): القيم الافتراضية للمعالم

Models	Parameters	
	α	λ
1	0.5	1.4
2	0.5	7.6
3	0.8	1.4
4	0.8	7.6

اختيار أربع احجام عينات عشوائية مختلفة (n = 20, 50, 90, 120)

ب. توليد المشاهدات عشوائياً تتبع توزيع (GPD) باستعمال خوارزمية الرفض والقبول (Reject & Accept Algorithm) وكما يلي:

I. توليد المتغير X عشوائياً يتوزع وفق التوزيع المنتظم (Uniform)

II. حساب الاحتمال الصفري p_0 وتوليد b وكما يلي:

$$p_0 = e^{-\lambda}$$

$$b = e^{2-\alpha-\min(\lambda,\alpha)}\sqrt{2/\pi}$$

III. أذا كان $U \leq \frac{p_0}{p_0+b}$ أنتقل الى الخطوة (٧)

IV. توليد المتغيرين (V, W) من التوزيع المنتظم (Uniform)

V. حساب $X = \frac{1}{W^2}$

VI. أذا كان $V\, b\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) \leq p_x$ أنتقل الى الخطوة (VII)

عدا ذلك أذهب الى الخطوة (IV)

VII. أعتمد قيمة X

ج. تقدير معلمات توزيع (GPD) باستعمال طريقة العزوم وطريقة الامكان الاعظم وطريقة التقلص.

د. مقارنة بين طرائق التقدير باستخدام معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) وفق الصيغة التالية.

$$MSE\ (\psi_i) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}(\hat{\psi}_i - \psi)^2$$

حيث ان:

$\hat{\psi}$: تمثل المعالم المقدرة.

ψ: تمثل القيم الحقيقية للمعالم.

R: تمثل عدد مرات تكرار التجربة، حيث تم تكرار التجربة (500).

اذ ان المقدر الذي يمتلك اقل (MSE) يكون هو الافضل. والجداول ادناه تمثل نتائج تجربة المحاكاة

الجدول (٢): قيم (MSE) لطرائق التقدير المختلفة عندما (α = (0.5 & λ = 1.4

n	M.M	M.L.E	Shrinkage	Best
20	0.99899	1.08433	0.68856	Shrinkage
50	0.65223	0.91272	0.45546	Shrinkage
90	0.41112	0.83266	0.10021	Shrinkage
120	0.11122	0.47123	0.01142	Shrinkage

Tikrit Journal of Administration and Economics Sciences, (31/12/2021);Vol. 17, No. 56, Part (4): 547-557
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.17.56.4.33

الجدول (٣): قيم (MSE) لطرائق التقدير المختلفة عندما $\alpha = (0.5\ \&\ \lambda = 7.6)$

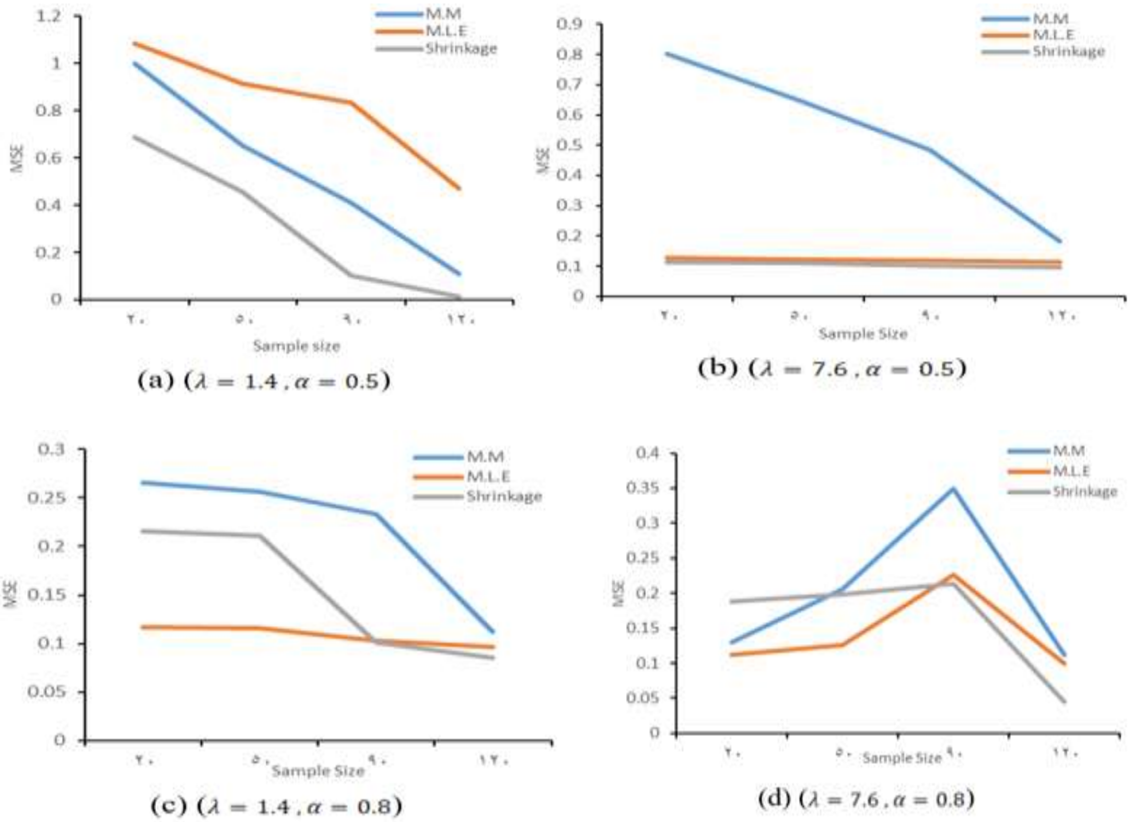
n	M.M	M.L.E	Shrinkage	Best
20	0.80184	0.12714	0.11256	Shrinkage
50	0.65011	0.12244	0.11008	Shrinkage
90	0.48515	0.12008	0.10105	Shrinkage
120	0.18314	0.11317	0.09523	Shrinkage

الجدول (٤): قيم (MSE) لطرائق التقدير المختلفة عندما $\alpha = (0.8\ \&\ \lambda = 1.4)$

n	M.M	M.L.E	Shrinkage	Best
20	0.26592	0.11663	0.21563	MLE
50	0.25623	0.11563	0.21112	MLE
90	0.23325	0.10256	0.10058	Shrinkage
120	0.11253	0.09588	0.08544	Shrinkage

الجدول (٥): قيم (MSE) لطرائق التقدير المختلفة عندما $\alpha = (0.8\ \&\ \lambda = 7.6)$

n	M.M	M.L.E	Shrinkage	Best
20	0.12981	0.11238	0.18822	MLE
50	0.20554	0.12544	0.19872	MLE
90	0.34967	0.22676	0.21356	Shrinkage
120	0.11251	0.09881	0.04471	Shrinkage



الشكل (١): قيم (MSE) لكافة طرائق تقدير معلمات توزيع (GPD) ولجميع احجام العينات

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.17.56.4.33

٧. الاستنتاجات:

١. تبين من خلال تجارب المحاكاة أفضلية طريقة التقلص بالنسبة الى الطرائق الأخرى في تقدير معلمات توزيع بواسون المعمم.
٢. تبين من خلال نتائج المحاكاة ان مقدرات الامكان الاعظم في الجدول (٤) و(٥) وعند حجم عينة (n=20 , 50) هي الافضل بينما مقدرات العزوم كانت غير مناسبة في تقدير معلمات توزيع بواسون المعمم كونها أعطت أكبر متوسط مربعات خطأ.
٣. ان طريقة التقلص تعطي مقدرات جيدة عندما تكون حجوم العينات كبيرة.
٤. تبين من خلال نتائج المحاكاة ان قيم (MSE) تتناسب عكسياً مع تزايد حجم العينة.

المصادر

اولاً. المصادر العربية:

١. حسين، ضوية سلمان، إبراهيم، سميرة خليل، عبد الوهاب، بيداء إسماعيل، (٢٠٠٨)، استخدام المقدر المقلص في تقدير معلمة الشكل لتوزيع ويبل، مجلة جامعة النهرين، المجلد (٣)، ١١، ص ٧٣-٧٨.

ثانياً. المصادر الأجنبية:

1. Consul, P. C., & Famoye, F., (1989), the truncated generalized Poisson distribution and its estimation, Communications in Statistics-Theory and Methods, 18(10), 3635-3648.
2. Consul, P. C., & Jain, G. C., (1973), A generalization of the Poisson distribution, Technometrics, 15(4), 791-799.
3. Hubert Jr, P. C., Lauretto, M. S., & Stern, J. M., (2009), Fbst for generalized Poisson distribution, In AIP Conference Proceedings (Vol. 1193, No. 1, pp. 210-217).
4. PC, Consul, & MM, Shoukri, (1984), Maximum likelihood estimation for the generalized Poisson distribution, Communications in Statistics-Theory and Methods, 13(12), 1533-1547.
5. Sellers, K. F., & Morris, D. S., (2017), Underdispersion models: Models that are under the radar, Communications in Statistics-Theory and Methods, 46(24), 12075-12086.
6. Wagh, Y. S., & Kamalja, K. K., (2017), Comparison of methods of estimation for parameters of generalized Poisson distribution through simulation study, Communications in Statistics-Simulation and Computation, 46(5), 4098-4112.