# تخفيض ليابونوف-شمدت في دراسة حلول التفرع للمعادلة التفاضلية غير الخطية من الرتبة السادسة

**مرتضى جاسم محمد**

قسم الرياضيات، كلية التربية للعلوم الصرفة، جامعة البصرة، البصرة، العراق

murtada.mohammed@uobasrah.edu.iq

**ملخص:**

في هذا البحث لتحليل التفرع ومخطط التفرع. تمت دراسة المعادلة التفاضلية من الرتبة السادسة غير الخطية. برهنا ايضاً بطريقة ليابونوف–شمدت المحلية يتم اعطاء معادلة التفرع المطابقة لمعادلة الموجه من الرتبة السادسة للأنابيب المرنة بواسطة نظام غير خطي من معادلتين جبريتين، كذلك تم ايجاد وصف هندسي للمجموعة المميزة مع انتشار الحلول المنتظمة لكل منطقة.

## Lyapunov–Schmidt Reduction in the study of bifurcation solutions of sixth–order nonlinear differential equation

**MURTADA JASSIM MOHAMMED**

Department of Mathematics, College of Education for Pure Sciences, University of Basrah, Basrah, Iraq

**Summary:**

In this article, for bifurcation analysis and bifurcation diagram, the nonlinear sixth–order differential equation was studied. We have also shown that by the local method of Lyapunov–Schmidt the bifurcation equation corresponding to the sixth–order wave equation of elastic beams is given by the nonlinear system of two algebraic equations.

## ١- مقدمة:

العديد من المسائل غير الخطية التي تظهر في الرياضيات والفيزياء والبيولوجيا والكيمياء والهندسة يمكن كتابتها في شكل معادلة مؤثر،

$$f(x,\lambda)=b,\quad x\in O\subset X,\ b\in Y,\ \lambda\in R^n. \qquad (١)\ldots$$

حيث $f$ هو مؤثر فريدهولم الأملس دليل صفر $(\mathrm{index}(f)=\dim(\ker f)-\dim(\mathrm{coker}\, f)$ و $X$، $Y$ هي فضاءات بناخ و $O$ هي مجموعة جزئية مفتوحة من $X$. يمكن إيجاد حلول لهذه المسألة من خلال حل المعادلة المكافئة ذات الأبعاد المنتهية،

$$\Phi(\xi,\lambda)=\beta,\quad \xi\in\hat{M},\quad \beta\in\hat{N},$$

(٢)...

حيث $\hat{M}$و $\hat{N}$ فضاءات جزئي منتهي الأبعاد ملساء من $O$ و$Y$ على التوالي. مع العلم أن المعادلة (٢) تحتفظ بجميع الخصائص التحليلية والطوبولوجية للمعادلة (١).[1]،[9]،[8]، [6]

يمكن وصف تذبذبات وحركة موجات الانابيب المرنة بالاعتماد على أساس المرونة عن طريق المعادلة التفاضلية الاعتيادية التالي،

$$\mathrm{z}^{(6)}(x)+\alpha\mathrm{z}^{(4)}(x)+\mathrm{z}''(x)+\beta\mathrm{z}+\aleph(\lambda,\tilde{\mathrm{z}})=\Psi,$$

(٣)....

$$\tilde{\mathrm{z}}=\left(\mathrm{z},\mathrm{z}',\mathrm{z}'',\mathrm{z}''',\mathrm{z}^{iv},\mathrm{z}^{v},\mathrm{z}^{vi}\right)$$

حيث $\alpha,\beta$ معلمات حقيقية و$\aleph(\lambda,\tilde{\mathrm{z}})$ هو الجزء غير الخطية من لمعادلة التفاضلية الاعتيادية.

تمت دراسة المعادلة (٣) بواسطة طومسون وستيوارت [3] عندما $\aleph(\lambda,\tilde{\mathrm{z}})=-k\mathbb{Z}^3$ و$\Psi=0$ .

في [4] عبد الحسين وشنان درسا المعادلة (٣) عندما $\aleph(\lambda,\tilde{\mathrm{z}})=\mathbb{Z}^2+\mathbb{Z}^3$ و$\Psi=0$ ، وتوصلا الى حلول التفرع للمعادلة (٣) باستخدام طريقة ليابونوف – شمدت المحلية.

كاظم [2] درس المعادلة (٣) عندما $\aleph(\lambda,\tilde{\mathrm{z}})=\mathbb{Z}^2$ و$\Psi\neq 0$، طبق طريقة ليابونوف – شمدت المحلية ووجد وصف هندسي جديد لمخطط التفرع مع توزيع كامل للنقاط الحرجة في المناطق المتممة للمجموعة المميزة.

في دراسة اخرى محمد [5] درس المعادلة (٣) عندما $\aleph(\lambda,\tilde{\mathrm{z}})=\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ و$\Psi=0$، برهن أن معادلة التفرع المطابقة لمعادلة الأنابيب المرنة من الدرجة السادسة كنظام غير الخطي مكون من أربع معادلات تربيعية باستخدام طريقة ليابونوف – شمدت المحلية.

في هذه الورقة استخدمنا طريقة ليابونوف – شمدت المحلية لدراسة الحلول التفرع ومخطط التفرع لمسالة القيم الحدودية التالية،

$$\mathrm{z}^{(6)}(x)+\alpha\mathrm{z}^{(4)}(x)+\mathrm{z}''(x)+\beta\mathrm{z}+(\mathrm{z}'\mathbb{Z})^2=0,$$

(٤)....

$$\mathbb{Z}(0) = \mathbb{Z}\pi = \mathbb{Z}''(0) = \mathbb{Z}''(\pi) = \mathbb{Z}''''(0) = \mathbb{Z}''''(\pi).$$

سوف نقدم بعض التمهيديات اللازمة لإظهار نتائجنا الرئيسية.

**تعريف ١,١**[2]: مجموعة كل قيم λ التي في المعادلة (١) تمتلك حلول منحلة تسمى بالمجموعة المميزة (مجموعة التفرع) ويرمز لها بالرمز ∑.

**تعريف ١,٢**[10]: المجموعة المميزة مع انتشار الحلول المنتظمة في فضاء المعلمات تسمى مخطط التفرع.

**مبرهنة ١,١**[21]: ليكن $X$ و $Y$ فضائي بناخ حقيقي و $f(x,\lambda)$ تطبيق $C^1$ معرف في جوار $U$ للنقطة $(x_0,y_0)$ بمدى $Y$ حيث $f(x,\lambda)=0$ و $f_x(x_0,\lambda_0)$ هو مؤثر فريدهولم خطي. فان جميع الحلول $(x,\lambda)$ من $f(x,\lambda)=0$ قرب $(x_0,y_0)$ هي دالة تقابل مع حلول نظام منتهي البعد $N_1$ من المعادلات ذات القيم الحقيقة في عدد منتهي $N_0$ من المتغيرات الحقيقة. ايضاً، $N_0 = dim(Ker\ L)\ and\ N_1 = dim(Coker\ L), L = f_x(x_0,\lambda_0)$.

**٢- التخفيض الى معادلة التفرع:**

طريقة ليابونوف – شمدت طريقة فعالة لدراسة المعادلة (٤) من خلال اختزال المعادلة (٤) إلى نظام محدود الابعاد من معادلتين جبريتين غير خطيتين، للقيام بذلك، نضع أولاً المعادلة (٤) في شكل معادلة المؤثر [10]،

$$f(\mathbb{z},\lambda) = \mathbb{z}^{(6)}(x) + \alpha\mathbb{z}^{(4)}(x) + \mathbb{z}''(x) + \beta\mathbb{z} + (\mathbb{z}'\mathbb{Z})^2,$$

(٥)...

حيث: $f: X \to Y$ هو تطبيق فريدهولم غير الخطي دليل صفر من فضاء بناخ X *الى فضاء بناخ Y*، $X = C^6([0,\pi],R)$ $Y = C^0([0,\pi],R)$ ، $x \in [0,\pi]$، $\lambda = (\alpha,\beta)$. في هذه الحالة، تكون حلول التفرع للمعادلة (٥) مكافئة لحلول التفرع لمعادلة المؤثر،

$$f(\mathbb{z},\lambda) = 0.(٦)....$$

الآن نثبت مبرهنة التخفيض للمسألة (٤)،

**مبرهنة ٢,١**: معادلة التفرع المقابلة للمسألة (٤) تعطى من خلال نظام غير خطي من معادلتين تكعيبتين،

$$\Theta(\xi,\tilde{\lambda}) = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{2}\xi_1^3 + 4\pi^2\xi_1\xi_2^2 + \lambda_1\xi_1 \\ 2\pi^2\xi_2^3 + \pi^2\xi_1^2\xi_2 + \lambda_2\xi_2 \end{pmatrix} + o(|\xi|^3) + O(|\xi|^3)O(\delta) = 0 .(٧).....$$

حيث: $\xi = (\xi_1,\xi_2),\quad \tilde{\lambda} = (\lambda_1,\lambda_2) \in R^2,\quad \delta = (\delta_1,\delta_2)$

بالإضافة إلى أن حلول المسألة (٤) تتطابق مع حلول النظام غير الخطي.

**البرهان:**

ليكن

$$f(\mathbb{z},\lambda)=0$$

∴ مشتقة فرشت $f(\mathbb{z},\lambda)$ عند النقطة $(0,\lambda)$ هو

$$df(0,\lambda)h=\frac{d^6}{dx^6}h+\alpha\frac{d^4}{dx^4}h+\frac{d^2}{dx^2}h+\beta h,$$

حيث: $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$، $h\in X$ و $x\in[0,\pi]$

∴ يتم إعطاء المعادلة الخطية المقابلة لـ (٦) بواسطة:

$$Ah=0\ ,\qquad h\in X,$$

$$A=df(0,\lambda)=\frac{d^6}{dx^6}+\alpha\frac{d^4}{dx^4}+\frac{d^2}{dx^2}+\beta,$$

$$h(0)=h(\pi)=h''(0)=h''(\pi)=h^{iv}(0)=h^{iv}(\pi)=0.$$

حلول المعادلة الخطية تعطى بواسطة،

$$e_p(x)=c_p\,sin(px),\qquad p=1,2,3,\ldots$$

....(٨)

بتعويض (٨) في المعادلة الخطية، نحصل على معادلة المميز المقابلة بالصيغة التالي،

$$-p^6+\alpha p^4-p^2+\beta=0$$

هذه المعادلة تعطي المستقيمات المميزة $\ell_p$ لفضاء المعلمات $(\alpha، \beta)$. تتكون المستقيمات المميزة $\ell_p$ من النقاط التي تحتوي المعادلة الخطية على حلول غير صفرية. نقطة تقاطع المستقيمات المميزة في فضاء المعلمات $(\alpha، \beta)$. هي نقطة تفرع [10]، لذلك بالنسبة للمعادلة (٦)، النقطة $(\alpha,\beta)=(\frac{132}{63},\frac{-132}{63})$ هي نقطة التفرع. المعلمات المحلية $\alpha,\beta$ على النحو التالي:

$$\alpha=\frac{132}{63}+\delta_1,\beta=\frac{-132}{63}+\delta_2,$$

حيث: $\delta_1,\delta_2$ معلمات صغيرة لها تأثيرفي شكل التفرع،

$e_1=c_1\sin(x),e_2=c_2\sin(2x)$ حيث $c_1=c_2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ و

$$\langle e_k,e_m\rangle=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}sin(kx)sin(mx)dx=\begin{cases}1 & if \quad k=m\\ 0 & if \quad k\neq m\end{cases}$$

بالنسبة للتكامل أعلاه، نحصل $e_1$ و $e_2$ قاعدة متعامدة احادية للفضاء التافه $Ker\ (A)$.

ليكن $\mathcal{N}=Ker(A)=span\{e_1,e_2\}$، يمكن فصل الفضاء $X$ الى فضاءين جزئيين كجمع مباشر من $\mathcal{N}$ و $\mathcal{N}^{\perp}$ المكمل المتعامد لـ $\mathcal{N}$،

$$X=\mathcal{N}\oplus\mathcal{N}^{\perp},\ \mathcal{N}^{\perp}=\{v\in X: v\perp\mathcal{N}\}.$$

وبالمثل، يمكن تمثيل الفضاء $Y$ كمجموع مباشر من فضاءين جزئيين $\widetilde{\mathcal{N}}$ و $\widetilde{\mathcal{N}}^{\perp}$ المكمل المتعامد لـ$\widetilde{\mathcal{N}}$،

$$Y = \widetilde{\mathcal{N}} \oplus \widetilde{\mathcal{N}}^{\perp}, \quad \widetilde{\mathcal{N}}^{\perp} = \{v \in Y : v \perp \widetilde{\mathcal{N}}\}.$$

∴ يوجد مسقطان هما $P: X \to \mathcal{N}$ و $(I-P): X \to \mathcal{N}^{\perp}$ بحيث

$$Pz = u, \quad (I-P)z = v,$$

وبالتالي يمكن كتابة كل عنصر $z \in X$ في شكل وحيد،

$$z = u + v, \quad u = \sum_{i=1}^{2} \xi_i e_i \in \mathcal{N}, \qquad v \in \mathcal{N}^{\perp}, \xi_i = \langle z, e_i \rangle$$

وبالمثل، يوجد مسقطان هما $Q: Y \to \widetilde{\mathcal{N}}$ و $(I-Q): Y \to \widetilde{\mathcal{N}}^{\perp}$ بحيث

$$Qf(u,\lambda) = f_1(u,\lambda),$$

$$(I-Q)f(z,\lambda) = f_2(z,\lambda),$$

كل عنصر $f(z,\lambda) \in Y$ في شكل وحيد،

$$f(z,\lambda) = f_1(z,\lambda) + f_2(z,\lambda)$$
$$= Qf(z,\lambda) + (I-Q)f(z,\lambda),$$

$$f_1(z,\lambda) = \sum_{i=1}^{2} v_i(z,\lambda) e_i \in \mathcal{N}, \quad f_2(z,\lambda) \in \widetilde{\mathcal{N}}^{\perp},$$

$$v_i(z,\lambda) = \langle f(z,\lambda), e_i \rangle.$$

∴ معادلة (٦) يمكن كتابتها على شكل،

$$Qf(z,\lambda) = 0,$$

$$(I-Q)f(z,\lambda) = 0.$$

او

$$Qf(u+v,\lambda) = 0,$$

.

باستخدام مبرهنة الدالة الضمنية، يوجد تطبيق أملس $\varphi: \mathcal{N} \to \mathcal{N}^{\perp}$ بحيث $\varphi(u,\lambda) = v$ بالإضافة الى

$$(I-Q)f(u+\varphi(u,\lambda),\lambda) = 0.$$

لإيجاد حلول المعادلة (٦) في جوار النقطة $z = 0$ يكفي إيجاد حلول المعادلة،

$$Qf(u+\varphi(u,\lambda),\lambda) = 0$$

...(٩)

تسمى المعادلة (٩) معادلة التفرع للمعادلة (٦). يمكن كتابة معادلة التفرع في شكل،

$$\Theta(\xi, \lambda) = 0, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \lambda = (\alpha, \beta),$$

حيث ان: $\Theta(\xi,\lambda) = f_1(u+\varphi(u,\lambda),\lambda)$

المعادلة (٥) يمكن كتابة بالشكل التالي،

$$f(u+v,\lambda) = A(u+v) + \aleph(u+v)$$
$$= Au + (uu')^2 + \cdots$$

حيث ان: $\aleph(u+v) = ((u+v)(u+v)')^2$ والنقاط تدل على الحدود التي تحتوي العنصر $v$ وبالتالي،

$$\Theta(\xi,\lambda) = f_1(u+v,\lambda)$$
$$= \sum_{i=1}^{2}\langle Au + (uu')^2, e_i\rangle e_i + \cdots = 0.$$

....(١٠)

باستخدام خصائص الضرب الداخلي وبعض العمليات الحسابية على المعادلة (١٠) مع الخاصية $Ae_i = \mu_i(\lambda)e_i, \quad (i = 1,2)$ نحصل على

$$\langle Au + \mathcal{N}(u), e_1\rangle = \frac{\pi^2}{2}\xi_1^3 + 4\pi^2\xi_1\xi_2^2 + \lambda_1\xi_1$$

و

$$\langle Au + \mathcal{N}(u), e_2\rangle = 2\pi^2\xi_2^3 + \pi^2\xi_1^2\xi_2 + \lambda_2\xi_2,$$

حيث: $\lambda_1 = Ae_1 = \mu_1(\lambda)e_1, \ \lambda_2 = Ae_2 = \mu_2(\lambda)e_2.$

استبدال هذه النتائج في (١٠) نحصل على النظام المطلوب،

$$\square\Theta(\xi,\tilde{\lambda}) = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{2}\xi_1^3 + 4\pi^2\xi_1\xi_2^2 + \lambda_1\xi_1 \\ 2\pi^2\xi_2^3 + \pi^2\xi_1^2\xi_2 + \lambda_2\xi_2 \end{pmatrix} + o(|\xi|^3) + O(|\xi|^3)O(\delta) = 0 .$$

### ٣- مخطط وتحليل التفرع لنظام (١١)

من مبرهنة (١) يوجد دالة تقابل بين حلول المعادلة (٦) وحلول المعادلة $\Theta(\xi,\tilde{\lambda}) = 0$. المعادلة $\Theta(\xi,\tilde{\lambda}) = 0$ تكافئ في جوار النقطة صفر المعادلة

$$\Theta_0(\xi,\tilde{\lambda}) = 0$$

....(١١)

حيث:

$$\Theta_0(\xi,\tilde{\lambda}) = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{2}\xi_1^3 + 4\pi^2\xi_1\xi_2^2 + \lambda_1\xi_1 \\ 2\pi^2\xi_2^3 + \pi^2\xi_1^2\xi_2 + \lambda_2\xi_2 \end{pmatrix} \ldots(١٢)$$

هذا يعني أن دراسة المجموعة المميزة (مجموعة التفرع) للمعادلة $\Theta(\xi,\tilde{\lambda})$ يكافئ دراسة مجموعة المميزة من المعادلة (١١). يمكن حساب المجموعة المميزة من خلال إيجاد علاقة بين المعلمات والمتغيرات الواردة في

المسألة، ولكن في بعض المسائل توجد صعوبة في العثور على هذه المعلمات. الطريقة الثانية للعثور على المجموعة المميزة هي من خلال إيجاد معادلة المعلمة، أي ان

$$h(\tilde{\lambda}) = 0, \tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in R^2.$$

بحيث أن مجموعة كل قيم $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ التي في المعادلة (١١) لها حلول منحلة تفي بالمعادلة $h(\tilde{\lambda}) = 0$، حيث $h: R^2 \to R$. بالنسبة للمعادلة (١١) ، ليس من السهل إيجاد علاقة بين المعلمات والمتغيرات الواردة في المعادلة ، لذلك تم استخدام الطريقة الثانية لتحديد مجموعة المميزة للمعادلة (١١). وبالتالي، لدينا النتيجة التالية،

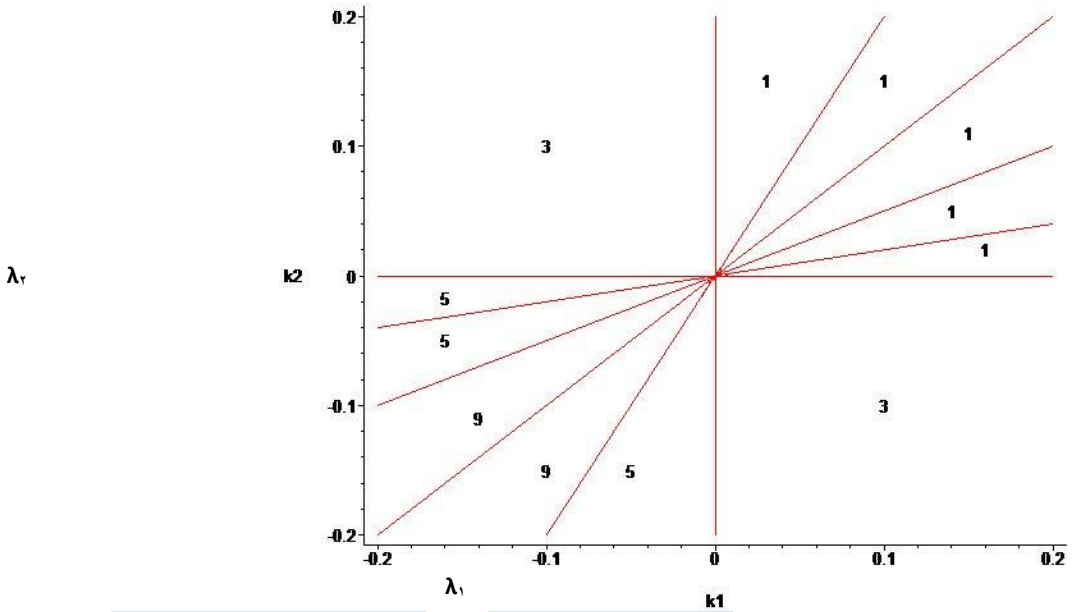
**مبرهنة ٣,١:** المجموعة المميزة (مجموعة التفرع) للمعادلة (١١) في فضاء المعلمات $(\lambda_1, \lambda_2)$ هي السطح التالي

$$\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - 5\lambda_2)(-\lambda_2 + 2\lambda_1)(\lambda_1 - 2\lambda_2).$$

يمكن إثبات المبرهنة الأخيرة من خلال حل النظام التالي،

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi^2}{2}\xi_1^3 + 4\pi^2\xi_1\xi_2^2 + \lambda_1\xi_1 = 0 \\ 2\pi^2\xi_2^3 + \pi^2\xi_1^2\xi_2 + \lambda_2\xi_2 = 0 \\ \lambda_1\lambda_2 + 6\pi^2\lambda_1\xi_2^2 + \pi^2\lambda_1\xi_1^2 + \frac{3\pi^2\lambda_2\xi_1^2}{2} - 3\pi^4\xi_1^2\xi_2^2 + \frac{3\pi^4\xi_1^4}{2} + 4\pi^2\lambda_2\xi_2^2 + 24\pi^4\xi_2^4 = 0. \end{aligned}\right\}$$

تم وصف مجموعة التفرع (المجموعة المميزة) للمعادلة (١١) من خلال التمثيل الهندسي التالي،




شكل (١): يصف المجموعة المميزة في المستوي $\lambda_1\lambda_2$

في الشكل (١). متممة المجموعة المميزة $\Omega = R^2 \backslash \Sigma$ هي اتحاد أربع مجموعات جزئية مفتوحة $\Omega = \Omega_1 U \Omega_3 U \Omega_5 U \Omega_9$ بحيث إذا كانت $\tilde{\lambda} \in \Omega_1$ فإن المعادلة (١١) تمتلك حل منتظم واحد مع الدرجة الطوبولوجية ١+، إذا كانت $\tilde{\lambda} \in \Omega_3$ فإن المعادلة (١١) تمتلك ثلاثة حلول منتظمة مع الدرجة الطوبولوجية ١+،١+،١-، إذا كانت $\tilde{\lambda} \in \Omega_5$ فإن المعادلة (١١) تمتلك خمسة حلول منتظمة مع الدرجة الطوبولوجية ١+،١+،١-،١-،١+، إذا كانت $\tilde{\lambda} \in \Omega_9$ فإن المعادلة (١١) تمتلك تسعة حلول منتظمة مع الدرجة الطوبولوجية ١+،١+،١-،١-،١-،١-،١+،١+،١+.

**المصادر:**


[1] B. V. Loginov, 1985, “Theory of Branching nonlinear equations in the conditions of invariance group”, – Tashkent: Fan.

[2] H K. Kadhim; “Three-mode bifurcation of extremals in the analysis of bifurcation solutions of sixth order differential equation”, Journal of College of Education for Pure Sciences, Vol. 4 (2), 149-162 ,2014.

[3] J. M. T. Thompson and H. B. Stewart, "Nonlinear Dynamics and Chaos", J. Wiley and Sons, Singapore Chichester, 1986.

[4] M. A. Abdul Hussain, A. K. Shanan, "Lyapunov –Schmidt reduction in the analysis of bifurcation solutions of sixth order nonlinear differential equation", Journal of Education for Pure Science, Vol. ٤, No. ١, ٢١٤-٢٠١٥, ٤.

[5] M. J. Mohammed, "Bifurcation analysis and caustic of sixth order nonlinear differential equation ", Journal of AL-Qadisiyah for computer science and mathematics, Vol. 7 (2), 97-110, 201٥ .

[6] M. M. Vainberg, V.A. Trenogin, 1969,” Theory of Branching solutions of nonlinear equations”, M. Science.

[7] M S. Berger, “Nonlinearity and functional analysis”. Lectures on Nonlinear Problems in Mathematical Analysis, Academic Press, Inc.; 1977.

[8] Yu. I. Sapronov, “:Finite dimensional reduction in the smooth extremely problems”, – Uspehi math., Science, V. 51, No. 1, 101- 132,1996.

[9] Yu.I. Sapronov, “Regular perturbation of Fredholm maps and theorem about odd field”, Works Dept. of Math., Voronezh Univ. Vol. 10, 82-88, 1973.

[10] Yu. I. Sapronov, V. R. Zachepa, “ Local analysis of Fredholm equation”, Voronezh Univ., 2002.