

مجلة كلية التراث الجامعة

مجلة علمية محكمة
متعددة التخصصات نصف سنوية
العدد الحادي والأربعون

30 نيسان 2025
ISSN 2074-5621



رئيس هيئة التحرير

أ.د. جعفر جابر جواد

1988

مدير التحرير

أ.م. د. حيدر محمود سلمان

رقم الايداع في دار الكتب والوثائق 719 لسنة 2011

مجلة كلية التراث الجامعة معترف بها من قبل وزارة التعليم العالي والبحث العلمي بكتابها المرقم
(ب 3059/4) والمؤرخ في (2014/ 4/7)



تقييم نموذج Probit لتحليل الجرعة-الاستجابة: دراسة مقارنة لطرق تقدير المعلمات ودالة البقاء وتحديد الجرعة المميتة الوسطى (LD50)

بتول سعد فيصل

انتصار عربي فدم

كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد

المستخلص

تناولت الدراسة تحليل بيانات الجرعة-الاستجابة باستخدام نموذج Probit لتقييم تأثير ثلاث جرعات مختلفة من المحفز الجذري وسماد NPK والسماد الثانوي على نمو النباتات. تم تطبيق طرق تقدير متعددة (MLE N-R، Chi-Square، MLE D-H، Bayes) لتقدير المعلمات ودالة البقاء والجرعة المميتة الوسطى (LD50). ومن خلال تقدير المعلمات أظهرت طريقتا MLE N-R و Chi-Square أداءً متماثلًا ودقة عالية. وكانت MLE D-H قريبة من حيث الأداء مع اختلاف بسيط، بينما قدمت Bayes تقديرات أقل دقة. أما تقديرات دالة البقاء أظهرت MLE N-R و Chi-Square احتمالية بقاء مرتفعة مبدئيًا (0.716) مع انخفاض تدريجي، في حين أظهرت MLE D-H احتمالية بقاء مبدئية أقل (0.192)، بينما كانت Bayes الأكثر تحفظًا مع احتمالية مبدئية منخفضة (0.048) وانخفاض أسرع. وأخيرًا أظهرت نتائج الجرعة المميتة (LD50) أن طريقتي MLE N-R و Chi-Square كانت متطابقة، حيث كانت الجرعة X2 الأكثر سمّية. وأظهرت MLE D-H ذلك بتقديرات أقل، بينما أظهرت Bayes أن الجرعة X1 هي الأكثر سمّية، مما يعكس تباينًا بين الطرق.

الكلمات المفتاحية: دالة البقاء، الجرعة الاستجابة، نموذج وحدة الاحتمال، تحويل نموذج Probit، طريقة الامكان الاعظم الجزئي، طريقة تصغير مربع كاي، طريقة بيز، تقدير الجرعة المميتة القاتلة باستخدام نموذج Probit، حساب دالة البقاء باستخدام نموذج Probit، خوارزمية نيوتن-رافسون، خوارزمية داون-هيل.

1. المقدمة:

في دراسة الجرعة-الاستجابة، تهدف تجارب تحليل البقاء إلى تقييم تأثير عوامل أو مواد معينة على بقاء الكائنات الحية أو الخلايا على مدى فترة زمنية محددة. تُستخدم هذه الدراسات بشكل شائع في مجالات علم السموم، والصحة العامة، والزراعة، والطب لتحديد الجرعات الآمنة والضارة للمواد المختلفة.

أحد النماذج الإحصائية الكفوة لتحليل البقاء هو نموذج Probit، الذي يُستخدم بشكل خاص عندما يكون الهدف هو تقدير احتمال البقاء عند جرعات مختلفة من عامل معين. يعتمد هذا النموذج على تحويل البيانات إلى توزيع طبيعي تراكمي، مما يسمح بتقدير العلاقة بين الجرعة واحتمال الاستجابة (البقاء أو الوفاة) بشكل دقيق. من خلال هذا النموذج، يمكننا حساب الجرعة المميتة الوسطى (LD50)، وهي الجرعة التي تُسبب الوفاة لنصف العينة المدروسة، مما يجعلها أداة أساسية في تحليل الجرعة-الاستجابة.

تُكمن أهمية استخدام نموذج Probit في كفاءته العالية في تحليل البيانات، خاصة عندما تكون الاستجابات غير خطية أو تتركز ضمن نطاق جرعات معين. كما يُعد مناسبًا لمقارنة التأثيرات المختلفة للعوامل البيئية والكيميائية، مما يجعله أداة قوية في اتخاذ القرارات المبنية على الأدلة في مجالات الصحة والبيئة.

2. مشكلة البحث:

مشكلة البحث في هذا الموضوع تتمثل في كيفية تقدير تأثير الجرعات المختلفة من المواد على معدل بقاء الكائنات الحية باستخدام نموذج Probit، إذ تواجه الدراسات تحديات تتعلق بالدقة في تقدير معلمات النموذج ومدى كفاءته في تقدير الجرعة المميتة الوسطى (LD50) بدقة.

بالإضافة إلى ذلك، يمثل اختيار الأسلوب الأمثل لتقدير معلمات النموذج تحديًا، حيث إن هناك عدة طرق لتقدير هذه المعلمات، ولكن قد تختلف نتائجها في الدقة والكفاءة عند استخدامها في تحليل البيانات الحيوية. علاوةً على ذلك، قد تكون هناك صعوبات



في تحديد مدى ملاءمة نموذج Probit مقارنةً بنماذج أخرى مثل Logistic أو Cox لتحليل البقاء، خاصة عند التعامل مع بيانات تتسم بالتعقيد وعدم الخطية.

بالتالي، تكمن المشكلة البحثية في تحديد أفضل طريقة لاستخدام نموذج Probit لتحليل البقاء بحيث يمكن الاعتماد عليه في تقدير الجرعة المميّنة الوسطى وتقييم أداء النموذج من حيث الدقة والكفاءة مقارنةً بالنماذج الأخرى.

3. هدف البحث:

هدف البحث في هذا الموضوع هو تقييم كفاءة نموذج Probit في تحليل بيانات الجرعة-الاستجابة لتقدير تأثير الجرعات المختلفة من المواد على معدلات بقاء الكائنات الحية. يسعى البحث إلى تحقيق الأهداف التالية:

- تقدير معلمات نموذج Probit بطرق مختلفة وتحليل دقتها وكفاءتها في وصف العلاقة بين الجرعة والاستجابة.
 - تحديد الجرعة المميّنة الوسطى (LD50) باستخدام نموذج Probit، والتي تُعد مقياساً رئيسياً لتأثير الجرعة على البقاء.
 - تقييم أداء النموذج باستخدام معايير الدقة مثل متوسط مربع الخطأ (MSE) واختبار مربع كاي وتحليل دالة البقاء، وذلك لتحديد مدى ملاءمته لتجارب الجرعة-الاستجابة.
- يهدف البحث في النهاية إلى تقديم نموذج Probit كأداة فعالة لتحليل بيانات البقاء وتقديم توصيات بشأن الطرق الأمثل لتقدير معالم النموذج وتحسين دقته وكفاءته في التطبيقات الحيوية المختلفة.

4. دالة البقاء:

دالة البقاء $S(t)$ تمثل احتمال بقاء كائن حي بعد مرور زمن معين t ، وتُعبّر عنها رياضياً:

$$S(t) = \Pr(T > t) = \int_t^{\infty} p(t) dt \quad (1)$$

حيث T هو زمن البقاء.

هذه الدالة تُستخدم لتوفير فهم عميق لتوزيع أوقات حدوث الأحداث ولحساب مقاييس أخرى مثل معدل الخطر ومتوسط زمن البقاء. تُستخدم بشكل واسع في الإحصاء الحيوي وعلم الوراثة لتحليل معدلات البقاء والنمو (7).

5. الجرعة-الاستجابة:

في علم السموم والعلوم الطبية، يصف مفهوم الجرعة-الاستجابة العلاقة بين جرعة الدواء وتأثيره على الكائن الحي، ويستخدم لتحديد الجرعة المثالية لتحقيق الفعالية العلاجية مع تقليل الآثار الجانبية. تُظهر منحنيات الجرعة-الاستجابة، التي تأخذ شكل "S"، استجابة محدودة عند جرعات منخفضة تتزايد سريعاً مع زيادة الجرعة حتى تصل إلى حد الاستجابة الأقصى (E_{max}). وتعتبر الجرعة الوسيطة (ED_{50}) هي الجرعة التي تحقق نصف الاستجابة القصوى، بينما تعني الجرعة المميّنة لنصف المجموعة (LD_{50}) الجرعة التي تسبب موت 50% من الأفراد خلال فترة زمنية محددة (4).

6. نموذج وحدة الاحتمال

في عام 1935، طور Bills طريقة تعرف باسم Probit لتحويل نسب الاستجابة إلى متغير احتمالي. هذا النموذج الإحصائي يشبه نموذج اللوجيت ويستخدم للتنبؤ بالاحتمالات وتقدير البقاء أو الاستجابة لحدث معين. يتعامل مع البيانات ثنائية الاستجابة، حيث "1" يمثل وقوع الحدث و"0" يعبر عن عدم وقوعه، مع متغيرات مستقلة تؤثر على احتمال الحدث (2).

7. تحويل النموذج probit

في 1935، قدم Bills نموذج Probit كطريقة لتحويل الاستجابات الاحتمالية إلى مقياس معياري، المعروف باسم الانحراف المعدل الطبيعي (normal equivalent deviate) (n.e.d). النموذج يعتمد على دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي القياسي لتحويل احتمال P إلى قيمة Y على مقياس معياري. يستخدم النموذج في تحليل البيانات حيث يُعبّر Y عن قيمة



الانحراف المعدل الطبيعي المقابل للاحتمال P. في التطبيقات العملية، يضاف 5 إلى Y لتحويل القيم السالبة إلى موجبة، وهذا ما يُعرف بـ "probit". يُعبر النموذج خطياً عن العلاقة بين البروبيت والجرعة من خلال المعادلة (1)

$$Y_i = 5 + \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (2)$$

ويمكن كتابة المعادلة السابقة بالصورة الخطية التالية:

$$Y_i = \alpha + \beta x_i \quad (3)$$

حيث α و β هي معاملات جديدة تُستخدم للتعبير عن المتوسط والانحراف المعياري، مما يسهل تحليل ومقارنة النتائج.

8. طرق تقدير معلمات النموذج

أولاً: طريقة الامكان الاعظم الجزئي

طريقة الإمكان الأعظم الجزئي تُعد إحدى الأدوات الإحصائية المتقدمة التي تُستخدم في تقدير معلمات النماذج الإحصائية والاقتصادية عندما تكون مجموعة البيانات المتاحة غير كاملة أو عندما تواجه مشكلات مثل القيم المفقودة أو البيانات المحجوبة (3).
ليكن لدينا النموذج الخطي التالي:

1. في حالة وجود متغير واحد:

$$P = (Y_i/x_i, \alpha, \beta, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{y_i - \alpha - \beta x_i}{2\sigma^2}\right) \quad (4)$$

2. في حالة وجود متغيرين أو أكثر:

$$P(y_i/x_i, \beta_j, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik}))^2}{2\sigma^2}\right)$$
$$L(\beta_j, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik}))^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5)$$

$$\ln L = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{(y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik}))^2}{2\sigma^2} \right]$$

نقوم باخذ المشتقة الجزئية بالنسبة لكل معلمة β_j و σ ومساواة المشتقة بالصفر

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_j} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik})) x_{ij}}{\sigma^2} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{\sigma} + \frac{(y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik}))^2}{\sigma^3} \right] = 0 \quad (7)$$

ثانياً: طريقة تصغير مربع كاي



هذه الطريقة تم تطويرها من قبل العالم Berkson في عام 1955 لتقدير معاملات النماذج التي تتضمن استجابة ثنائية، وذلك باستخدام طريقة الامكان الاعظم. الهدف الأساسي لهذه الطريقة هو تصغير قيمة مجموع مربعات كاي (χ^2) قدر الإمكان. الصيغة الرياضية المستخدمة لمربع كاي في هذا السياق هي كما يلي (1):

$$= S(\beta) = \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \chi^2 \quad (8)$$

ويمكن التعبير عن $S(\beta)$ لنموذج Probit بالصيغة التالية :

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik}))^2$$

ولايجاد المقدر β الذي يعطي اقل $S(\beta)$ نقوم بايجاد المشتقة المشتقة الاولى ومن ثم نساوي المشتقة بالصفر وكما يأتي :

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta_j} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik})) x_{ij} \quad (9)$$

وبعد مساواة المشتقات الجزئية بالصفر وحل المعادلات يتم الحصول على تقديرات للمعاملات وبعد الحصول على تقديرات المعلمات β يمكن تقدير (σ^2) وفق الصيغة التالية:

$$= \sigma^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik}))^2 \quad (10)$$

ثالثا : طريقة بيز (Bayes Method)

نظرية بيز تعامل المعلمات في النماذج الإحصائية على أنها متغيرات عشوائية تمتلك توزيعات احتمالية. تعتمد طريقة التقدير في هذه النظرية بدايةً على التوزيع السابق، الذي يُدمج مع دالة الاحتمال الأعظم بناءً على بيانات العينة للتوصل إلى التوزيع اللاحق. بعد ذلك، يُستخدم التوزيع اللاحق لاستنتاج مقدرات بيز باستخدام دالة الخسارة المناسبة (9).

9. طريقة بيز لتقدير معاملات نموذج Probit

من اجل تقدير معاملات نموذج Probit (β, σ^2) حسب الاسلوب البيزي يجب معرفة التوزيع السابق للمعاملات اولا وذلك حسب الخطوات التالية :

ان المعلمة σ^2 هي متغير عشوائي تتبع توزيع كاما العكسي (Inverse gamma distribution) بمعلمة شكل α و معلمة قياس β

$$\sigma^2 \sim \text{Inv-Gamma}(\alpha, \beta)$$

وكذلك المعلمة β متغير عشوائي تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 0 و تباين σ^2

$$\beta / \sigma^2 \sim N(0, \sigma^2)$$

ويتم الحصول على دالة التوزيع السابق (Prior distribution) من خلال ضرب المعادلتين اعلاه كالآتي :

$$\pi(A) \propto \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (\sigma^2)^{-(\alpha+1)} \exp\left(\frac{-\beta}{\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-\beta^2}{2\sigma^2}\right) \quad (11)$$

اما التوزيع اللاحق (Posterior distribution) نحصل عليه من خلال المعادلة التالية :

$$\pi(A/y) \propto \pi(A) \cdot L(y/A) \quad (12)$$

وبالتعويض عن $\pi(A)$ و $L(y/A)$ في المعادلة نحصل على :

$$\pi(A/y) \propto \frac{\beta^\alpha}{\Gamma_\alpha} \cdot \frac{(\sigma^2)^{-(\alpha+1+\frac{n+1}{2})}}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \exp\left(-\frac{\beta^2+2\beta+\sum(y_i-(\beta_0+\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\dots+\beta_kx_{ik}))^2}{2\sigma^2}\right)$$

نفترض ان :

$$a = \frac{n}{2} + \alpha$$

$$b = \beta^2 + 2\beta$$

$$c = (\beta_0 + \beta_1x_{i1} + \beta_2x_{i2} + \dots + \beta_kx_{ik})$$

لذا تصبح المعادلة بالشكل التالي :

$$\pi(A/y) \propto \frac{\beta^\alpha}{\Gamma_\alpha} \cdot \frac{(\sigma^2)^{-(a+1+\frac{1}{2})}}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \exp\left(-\frac{b}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{\sum(y_i-c)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (13)$$

وبالاعتماد على دالة الخسارة التربيعية نحصل على مقدرات بيز النقطية من خلال المعادلة :

$$\hat{A} = E(A/y)$$

وبذلك نحصل على المقدرات $\hat{\beta}$ و $\hat{\sigma}^2$ كالتالي :

$$\hat{\beta} = \int_0^\infty \beta \int_0^\infty \pi(A/y) d\sigma^2 d\mu \quad (14)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \int_0^\infty \sigma^2 \int_0^\infty \pi(A/y) d\mu d\sigma^2 \quad (15)$$

10. تقدير الجرعة المميتة (القاتلة) باستخدام نموذج Probit

تعد من اهم طرق التقدير واكثرها شيوعا وهي تمثل احد انواع الانحدار الذي يستعمل لتحليل متغيرات الاستجابة الثنائية وفيه يتم تحويل بيانات الاستجابة للجرعة الى الوحدات الاحتمالية للحصول علاقة خطية وبعد ان يتم تقدير المعلمات يمكننا تقدير LD50 باستخدام معادلة التنبؤ التالية⁽¹³⁾ :

$$\hat{Y} = a + b x$$

وباستخدام قيم x والتي تمثل الجرعة لدواء معين من خلال المعادلة التالية

$$X = \frac{-a}{b} \quad \dots (16)$$

وبالتالي فان :

$$LD50 = \text{Anti } \log_{10}(x) \quad (17)$$

11. حساب دالة البقاء باستخدام نموذج Probit

لتقدير دالة البقاء باستخدام نموذج Probit حيث يتم حسابه باستخدام الدالة التراكمية للتوزيع الطبيعي القياسي (C.D.F) والتي تعطى بالصيغة التالية⁽¹²⁾ :

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{1}{2} u^2\right) du \quad (18)$$

حيث ان $\Phi(y)$ تمثل دالة التوزيع التراكمية للتوزيع الطبيعي القياسي

$$S(t) = 1 - \Phi(y) \\ S(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{1}{2} u^2\right) du \quad (19)$$



حيث نقوم باشتقاق دالة البقاء بالنسبة الى y للحصول على دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) حيث نحتاج اشتقاق $\phi(y)$ الى y اولاً:

$$\frac{\partial S(t)}{\partial y} = - \frac{\partial \phi(y)}{\partial y} = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right)$$

هذا المقدار يعطي المعدل الذي تتغير به دالة البقاء $S(t)$ بالنسبة للتغيرات في y ولفهم العلاقة بين y و t في سياق تحليل البقاء حيث Y يمثل تحويلًا للزمن t بافتراض ان $Y = f(t)$ فاذا كانت هناك علاقة محددة بين Y و t يمكننا استخدام قاعدة السلسلة للاشتقاق بالنسبة لـ t

$$\frac{\partial S(t)}{\partial t} = \frac{\partial S(f(t))}{\partial t} = \frac{\partial S(t)}{\partial y} * \frac{\partial f(t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial S(t)}{\partial t} = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} (f(t))^2\right) * \frac{\partial f(t)}{\partial t}$$

حيث ان هذه الدالة تمثل معدل تغير دالة البقاء بالنسبة للزمن

وباقتراض ان Y هو تحويل خطي للزمن t سنفرض ان هذا التحويل هو $Y = b + at$ حيث ان a و b هما ثوابت

$$\frac{\partial S(t)}{\partial y} = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right)$$

نقوم بتحويل Y الى t يمكن تحويل الاشتقاق باستخدام قاعدة السلسلة وان الصيغة النهائية لدالة البقاء تعطى بالشكل التالي

$$S(t) = 1 - \phi(at + b) \quad (20)$$

هذه الدالة تمثل احتمال البقاء حتى الزمن t .

12. خوارزمية نيوتن رافسون Newton Raphson Algorithm

وهي تقنية شهيرة في الرياضيات العددية لإيجاد تقريبات جذور دالة حقيقية تستخدم هذه الخوارزمية في الحساب العددي لحل المعادلات غير الخطية (10)(11)

خطوات التقدير:

1. اختر قيمة اولية لـ β
2. يتم حساب المشتقة الاولى والمشتقة الثانية في كل خطوة تكرارية.
3. تحديث التقديرات لحساب التقديرات الجديدة لـ β وكما يلي:

$$\beta^{(r+1)} = \beta^{(r)} - F(r)(P(r))^{-1} \quad (21)$$

4. يتم تكرار الخطوات من 2 الى 3 حتى تصبح التغييرات في المعلمه بين التكرارات اقل من حد معين كرر العملية حتى الوصول الى شرط التوقف.

$$|\beta^{(r+1)} - \beta^{(r)}| < d \quad (22)$$

علما بان d قيمة صغيرة جدا (مثلا في دالة اللوغاريتم للاحتمال اقل من 10^{-6}).

13. خوارزمية داون هيل (Downhill Algorithm)

خوارزمية داون هيل سيمبلكس، المعروفة أيضا باسم طريقة نلدر-ميد (Nelder-Mead)، هي تقنية تحسين قوية تستخدم في البحث عن الحل الأمثل للمشكلات غير الخطية دون الحاجة إلى حساب المشتقات (8).

تقوم هذه الطريقة بتحريك وتعديل الشكل الهندسي "Simplex"، وهو هيكل يتكون من n من الأبعاد و $(n+1)$ نقاط في فضاء، لتقييم وتحسين دالة الهدف (6).

الخطوات الاساسية في تقدير المعلمات بواسطة خوارزمية داون هيل (5):

1. تحديد دالة الهدف للخوارزمية والمتمثلة بدالة الامكان الجزئي

$$f_z = - \ln L(z) \quad \text{where } z = (\beta) \quad (23)$$

2. ادخال قيم معلمات الخوارزمية الاربعة وفي اغلب البحوث تكون قيم معلمات الخوارزمية مساوية الى $(\sigma = -0.5)$ ($\epsilon = 2$) ($\alpha = 1$).

3. توليد مصفوفة مكونة من $(n+1)$ من النقاط الاختبارية لكل معلمة في الدالة



4. تعوض قيم كل صف من المصفوفة اعلاه في دالة الهدف وحساب قيمتها ومن ثم ترتب دوال الهدف الناتجة والتي عددها (n)

$$f_{z_1} \leq f_{z_2} \leq \dots \leq f_{z_{n+1}}$$

5. ايجاد المتوسط لمصفوفة الحلول

$$\bar{w} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i}{n} \quad \dots (24) \quad \text{where } i = 1, 2, \dots, n$$

6. ايجاد نقطة اختبار جديدة تسمى نقطة الانعكاس (Reflection Point) وفق الصيغة التالية :

$$Z_r = \bar{w} + \alpha (\bar{w} - Z_{n+1}) \quad (25)$$

بعد حساب الانعكاس نحسب دالة الهدف (f_{z_r}) فاذا كان :

$$f_{z_1} < f_{z_r} < \dots < f_{z_n}$$

نجعل $z_r = z_{n+1}$ وننتقل الى الخطوة (10) خلاف ذلك ننتقل للخطوة التالية

7. ايجاد نقطة اختبار جديدة تسمى نقطة التوسع (Expansion point : e) وفق الصيغة التالية :

$$Z_e = \bar{w} + \varepsilon (Z_r - \bar{w}) \quad (26)$$

وبعد حساب التوسع نحسب دالة الهدف (f_{z_e}) فاذا كان $f_{z_e} < f_{z_r}$ نجعل

$Z_e = Z_{n+1}$ وننتقل الى خطوة (10) خلاف ذلك ننتقل للخطوة التالية

8. ايجاد نقطة اختبار جديدة تمثل نقطة الانكماش (Contraction Point : c) وتحسب كما يلي :

$$Z_c = \bar{w} + \gamma (Z_{n+1} - \bar{w}) \quad (27)$$

بعد حساب الانكماش نحسب دالة الهدف (f_{z_c}) اذا كان $f_{z_c} < f_{z_n}$ نجعل

$Z_c = Z_{n+1}$ وننتقل الى خطوة (10) عدا ذلك ننتقل للخطوة التالية

9. ايجاد نقطة اختبار جديدة تمثل نقطة التقلص (Shrink Point : sh) وفق الصيغة التالية :

$$Z_{sh} = Z_1 + \sigma (Z_i - Z_1)$$

10. تطبق هذه الخطوة عند تحقيق شرط التوقف في الخطوات السابقة وفق الصيغة التالية :

$$\left| \frac{\max(f) - \min(f)}{\max(f)} \right| < \varepsilon$$

علما بان ε عدد صغير جدا

في حالة تحقق شرط التوقف يتم طباعة الحل الامثل خلاف ذلك العودة الى الخطوة رقم (6)

14. الجانب التجريبي (Experimental Side)

المحاكاة تُستخدم لتقليد الواقع عبر إنشاء نماذج تُسهّل دراسة العمليات المعقدة، حيث تُولد عينات بأحجام مختلفة لمحاكاة النظام الحقيقي وتحقيق فهم أعمق. تعتمد المحاكاة على القيم العشوائية لإضفاء تنوع وواقعية على النتائج، مع مرونة في تعديل النماذج لتلبية الاحتياجات البحثية. في هذا البحث، تم استخدام طريقة مونت كارلو لتوليد البيانات، مع التركيز على مقارنة طرق تقدير نموذج *Probit*، وهي الإمكان الأعظم (بخوارزميات نيوتن-رافسون وداوون هيل)، طريقة تصغير مربع كاي، ومقدر بيز، بهدف تحديد الطريقة الأكثر فعالية لحساب الجرعة المميّنة LD_{50} . تمت برمجة المحاكاة بـ (*MATLAB 2022a*) عبر توليد الجرعات عشوائياً باستخدام التوزيع المنتظم (0,1)، ثم تمثيل البيانات بالتوزيع الطبيعي بناءً على قيم وسطية وانحرافات معيارية مفترضة.

1. تقدير البيانات في حالة اقل من البيانات الحقيقية:

تتمثل القيم الافتراضية للمعلمات (β) للنموذج الاول كما يلي: (0.0108 ; 0.1300 ; 0.1 ; 0.1100) ، وهي تُستخدم كنقاط انطلاق للتقدير بالنسبة لنموذج *Probit*.

جدول (1) يبين نتائج المحاكاه عند حجم عينة 34 في حالة اقل من البيانات الحقيقية وبتكرار 1000

Models	Methods	est B0	est B1	est B2	est B3	X1LD50	X2LD50	X3LD50	MSE	Chi2 cal.
--------	---------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	-----	-----------

Probit	'MLE N-R'	0.3856	0.0361	0.0220	0.0297	1.6945	0.9359	1.2917	0.1125	5.6009
	'MLE D-H'	0.4481	0.0853	0.1618	0.1007	18.9827	3.9591	6.4185	0.1736	7.3096
	'Chi2 '	0.3856	0.0361	0.0220	0.0297	1.6945	0.9358	1.2917	0.1125	5.6009
	'Bayes'	0.1100	0.1288	0.1442	0.0953	1.3991	1.0867	2.4698	0.1571	6.8719

علمًا بأن قيمة Chi2 table = 47.3999 وحجم العينة n = 34

التفسير: حققت MLE N-R و Chi2 أفضل أداء بقيم MSE منخفضة (0.1125) ومربع كاي (5.6009)، مما يعكس دقة عالية. أظهرت MLE D-H أداء أقل بدقة أقل مع MSE (0.1736) ومربع كاي (7.3096)، بينما كان أداء Bayes معتدلاً مع MSE ((0.1571) ومربع كاي (6.8719).

جدول (2) يبين نتائج المحاكاة عند حجم عينة 54 في حالة أقل من البيانات الحقيقية وبتكرار 1000

Models	Methods	est B0	est B1	est B2	est B3	X1LD50	X2LD50	X3LD50	MSE	Chi2 cal.
Probit	'MLE N-R'	0.3298	0.0487	0.0799	0.0146	1.4025	1.2642	2.2632	0.1165	9.1732
	'MLE D-H'	0.3692	0.0963	0.1329	0.0548	5.2245	6.5750	33.1257	0.1504	10.6696
	'Chi2 '	0.3298	0.0487	0.0799	0.0146	1.4025	1.2641	2.2632	0.1165	9.1732
	'Bayes'	0.1100	0.1002	0.1296	0.0130	1.3946	1.1356	3.8060	0.1522	75.8406

علمًا بأن قيمة Chi2 table = 70.9935 وحجم العينة n = 54

التفسير: أظهرت النتائج ان طريقتي MLE N-R و Chi2 أفضل أداء بقيم MSE منخفضة (0.1165) ومربع كاي (9.1732)، مما يعكس دقة واستقرارًا عاليين. جاءت MLE D-H بأداء أقل مع MSE (0.1504) ومربع كاي (10.6696)، بينما كان أداء Bayes هو الأدنى بقيم MSE (0.1522) ومربع كاي (75.8406).

جدول (3) يبين نتائج المحاكاة عند حجم عينة 74 في حالة أقل من البيانات الحقيقية وبتكرار 1000

Models	Methods	est B0	est B1	est B2	est B3	X1LD50	X2LD50	X3LD50	MSE	Chi2 cal.
Probit	'MLE N-R'	0.3103	0.0731	0.0958	0.0147	1.5327	1.3482	2.2932	0.1170	12.6154
	'MLE D-H'	0.3291	0.0920	0.1131	0.0558	7.4777	6.1973	69.9963	0.1420	14.1518
	'Chi2 '	0.3103	0.0731	0.0958	0.0147	1.5327	1.3482	2.2932	0.1170	12.6154
	'Bayes'	0.1100	0.1014	0.1288	0.0124	1.3798	1.1391	3.8257	0.1451	83.3886

علمًا بأن قيمة Chi2 table = 93.9453 وحجم العينة n = 74

التفسير: أظهرت النتائج ان طريقتي MLE N-R و Chi2 أفضل أداء بقيم MSE منخفضة (0.1170) ومربع كاي (12.6154)، مما يعكس دقة متقاربة. كانت MLE D-H أقل دقة بقيم MSE = 0.1420 ومربع كاي (14.1518)، بينما جاء Bayes بأقل دقة مع MSE = 0.1451 ومربع كاي (83.3886).

2. تقدير البيانات في حالة البيانات المساوية للبيانات الحقيقية:

باعتبار القيم الافتراضية للمعاملات (β)، والتي تُحدد كما يلي: (0.2100;0.1292;0.2300;0.1108) على التوالي، نقطة انطلاق لعملية التقدير في لنموذج: Probit .

جدول (4) يبين نتائج المحاكاة عند حجم عينة 34 في حالة مساوي للبيانات الحقيقية وبتكرار 1000

Models	Methods	est B0	est B1	est B2	est B3	X1LD50	X2LD50	X3LD50	MSE	Chi2 cal.
Probit	'MLE N-R'	0.0497	0.0696	0.1116	0.0701	2.4808	2.0612	2.3301	0.1102	5.5367
	'MLE D-H'	0.1319	0.0563	0.0877	0.0541	71.0643	30.7366	26.1825	0.1128	5.6514
	'Chi2 '	0.0497	0.0696	0.1116	0.0701	2.4808	2.0612	2.3301	0.1102	5.5367



'Bayes'	0.2100	0.5535	0.5900	0.3887	1.1135	0.6041	1.0843	0.1343	29.9876
---------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	---------

علمًا بأن قيمة Chi2 table = 47.3999 وحجم العينة n = 34

التفسير : أظهرت *MLE N-R* و *Chi2* أفضل أداء بأقل قيم (*MSE* (0.1102) ومربع كاي منخفض (5.5367)، مما يجعلهما الأكثر دقة. جاءت *MLE D-H* بأداء مقبول مع (*MSE* (0.1128) ومربع كاي (5.6514)، بينما كانت *Bayes* الأقل دقة مع (*MSE* (0.1343) ومربع كاي مرتفع (29.9876).

جدول (5) يبين نتائج المحاكاة عند حجم عينة 54 في حالة مساوي للبيانات الحقيقية وبتكرار 1000

Models	Methods	est B0	est B1	est B2	est B3	X1LD50	X2LD50	X3LD50	MSE	Chi2 cal.
Probit	'MLE N-R'	0.0044	0.0800	0.1423	0.0607	2.2454	1.7199	2.4458	0.1106	8.8472
	'MLE D-H'	0.1028	0.0620	0.1072	0.0504	13.2858	8.5185	16.2207	0.1143	9.0623
	'Chi2 '	0.0044	0.0800	0.1423	0.0607	2.2454	1.7199	2.4458	0.1106	8.8472
	'Bayes'	0.2100	0.3139	0.2699	0.2574	1.0480	0.5083	1.2402	0.1136	40.6904

علمًا بأن قيمة Chi2 table = 70.9935 وحجم العينة n = 54

التفسير : حققت *MLE N-R* و *Chi2* أفضل أداء بقيم *MSE* منخفضة (0.1106) ومربع كاي (8.8472)، مما يجعلهما الأكثر دقة. جاءت *MLE D-H* بأداء أقل طفيفاً مع (*MSE* (0.1143) ومربع كاي (9.0623)، بينما كانت *Bayes* الأقل دقة مع (*MSE* (0.1136) ومربع كاي مرتفع (40.6904).

جدول (6) يبين نتائج المحاكاة عند حجم عينة 74 في حالة مساوي للبيانات الحقيقية وبتكرار 1000

Models	Methods	est B0	est B1	est B2	est B3	X1LD50	X2LD50	X3LD50	MSE	Chi2 cal.
Probit	'MLE N-R'	0.1119	0.0636	0.1139	0.0436	2.3770	1.6116	2.8501	0.1135	12.3230
	'MLE D-H'	0.0924	0.0483	0.0915	0.0336	20.3435	6.9990	37.5111	0.1018	11.6525
	'Chi2 '	0.1119	0.0636	0.1139	0.0436	2.3770	1.6116	2.8501	0.1135	12.3230
	'Bayes'	0.2100	0.1276	0.2295	0.1138	0.9589	0.3710	1.0735	0.1188	60.5691

علمًا بأن قيمة Chi2 table = 93.9453 وحجم العينة n = 74

التفسير : حققت *MLE D-H* أفضل أداء بأقل (*MSE* (0.1018) وقيمة مربع كاي منخفضة نسبياً (11.6525)، مما يجعلها الأكثر دقة. جاءت *MLE N-R* و *Chi2* متساويتين بأداء مقبول مع (*MSE* (0.1135) ومربع كاي (12.3230)، بينما كانت *Bayes* الأقل دقة مع (*MSE* (0.1188) ومربع كاي مرتفع (60.5691).

3. تقدير البيانات في حالة أكثر من البيانات الحقيقية :

باعتبار القيم الافتراضية للمعلمات (β) للنموذج الثالث كما يلي: (0.2108 ; 0.3300 ; 0.2292 ; 0.3100) ، وهي تُستخدم كنقاط انطلاق للتقدير بالنسبة لنموذج: Probit .

جدول (7) يبين نتائج المحاكاة عند حجم عينة 34 في حالة أكبر من البيانات الحقيقية وبتكرار 1000

Models	Methods	est B0	est B1	est B2	est B3	X1LD50	X2LD50	X3LD50	MSE	Chi2 cal.
Probit	'MLE N-R'	0.1568	0.1353	0.1372	0.0799	1.8362	1.8230	2.4173	0.0995	5.1165
	'MLE D-H'	0.1229	0.1058	0.1070	0.0628	5.8424	5.7498	11.1224	0.1222	5.8038
	'Chi2 '	0.1568	0.1353	0.1372	0.0799	1.8362	1.8230	2.4173	0.0995	5.1165
	'Bayes'	0.3100	0.9283	0.5482	1.7049	1.2060	0.9652	1.3624	0.1051	20.2589

علمًا بأن قيمة Chi2 table = 47.3999 وحجم العينة n = 34



التفسير: كانت نتائج *MLE N-R* و *Chi2* الأفضل بأقل *MSE* (0.0995) وقيم مربع كاي منخفضة (5.1165)، مما يعكس دقة واستقرارًا عاليين. جاءت *MLE D-H* بأداء أقل مع *MSE* (0.1222) ومربع كاي (5.8038)، بينما كان *Bayes* الأقل استقرارًا مع *MSE* (0.1051) ومربع كاي مرتفع (20.2589).

جدول (8) يبين نتائج المحاكاة عند حجم عينة 54 في حالة اكبر من البيانات الحقيقية وبتكرار 1000

Models	Methods	est B0	est B1	est B2	est B3	X1LD50	X2LD50	X3LD50	MSE	Chi2 cal.
Probit	'MLE N-R'	0.2477	0.1109	0.1574	0.1099	2.1547	1.8665	2.1627	0.1014	8.2953
	'MLE D-H'	0.1798	0.0804	0.1144	0.0798	7.7778	6.6090	7.8210	0.1418	10.2523
	'Chi2 '	0.2477	0.1109	0.1574	0.1099	2.1547	1.8665	2.1627	0.1014	8.2953
	'Bayes'	0.3100	0.6993	0.5395	0.6069	0.7564	0.7517	0.8201	0.0915	25.9844

علمًا بأن قيمة Chi2 table = 70.9935 وحجم العينة n = 54

التفسير: حققت نتائج *MLE N-R* و *Chi2* أفضل استقرار بقيم مربع كاي منخفضة (8.2953) و *MSE*=0.1014، بينما تميز *Bayes* بأقل *MSE* (0.0915) لكنه يعاني من عدم استقرار بسبب ارتفاع مربع كاي (25.9844).

جدول (9) يبين نتائج المحاكاة عند حجم عينة 74 في حالة اكبر من البيانات الحقيقية وبتكرار 1000

Models	Methods	est B0	est B1	est B2	est B3	X1LD50	X2LD50	X3LD50	MSE	Chi2 cal.
Probit	'MLE N-R'	0.2147	0.1114	0.1650	0.1009	2.1333	1.7468	2.2229	0.1054	11.7535
	'MLE D-H'	0.1624	0.0840	0.1247	0.0757	7.9608	5.3643	8.3519	0.1411	14.1294
	'Chi2 '	0.2147	0.1114	0.1650	0.1009	2.1333	1.7468	2.2229	0.1054	11.7535
	'Bayes'	0.3100	0.2066	0.5166	0.3405	0.3419	0.4695	0.4202	0.0820	31.3366

علمًا بأن قيمة Chi2 table = 93.9453 وحجم العينة n = 74

التفسير: حققت نتائج *MLE N-R* و *Chi2* استقرارًا عاليًا بقيم مربع كاي منخفضة (11.7535) و *MSE*=0.1054، بينما تفوق *Bayes* في *MSE* (0.0820) لكنه أظهر عدم استقرار بسبب ارتفاع مربع كاي (31.3366).

15. الجانب التطبيقي (Application Side)

تم تصميم تجربة زراعية لدراسة تأثير ثلاث جرعات مختلفة من المحفز الجذري وسماد NPK والسماد الثانوي على نمو النباتات، باستخدام نموذج وحدة الاحتمال (Probit). يركز التحليل على الوزن الجاف للمجموع الخضري كمتغير استجابة (y)، لتقدير الجرعات المثلى التي تعزز النمو والجرعات المميته (LD50). يعتمد النموذج على تحليل العلاقة بين الجرعات والاستجابة، مع تحديد الجرعات التي تؤثر سلبيًا على 50% من النباتات. تم تقييم دقة النموذج باستخدام متوسط مربعات الخطأ (MSE) واختبار مربع كاي (Chi-Square)، لاختيار الجرعات المثلى التي تحقق أفضل نمو للنباتات.

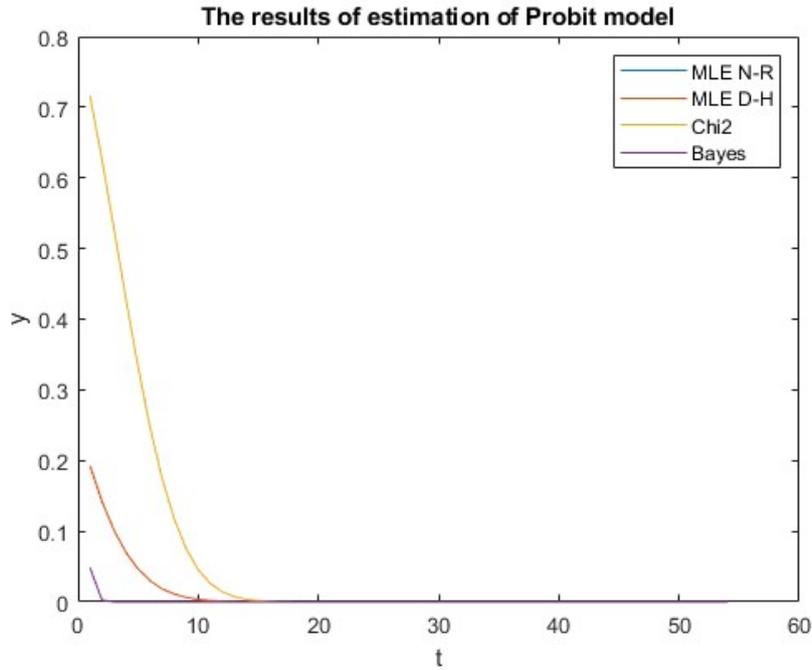
تقدير نموذج Probit

بعد تحديد المتغيرات المستقلة المتمثلة بالجرعات المعطاة، وتحديد الاستجابة للنبات (y)، تم الحصول على تقديرات المعلمات للنموذج، لغرض تحديد الطريقة الأفضل من بين الطرق المستخدمة وتم توضيح نتائج طرق التقدير وفقًا للجدول التالي:

جدول رقم (10) يبين نتائج المعلمات المقدرة لنموذج Probit للبيانات الحقيقية

Methods	est B0	est B1	est B2	est B3
'MLE N-R'	-0.8231	0.2066	0.3835	0.1640
'MLE D-H'	0.6655	0.1670	0.3101	0.1326
'Chi2 '	-0.8231	0.2066	0.3835	0.1640

'Bayes'	0.5000	0.8090	1.8571	0.8238
---------	--------	--------	--------	--------



الشكل رقم (1) يبين مقدرات المعلمات لنموذج Probit من الجدول والشكل، نلاحظ تطابقاً بين طريقتي MLE N-R و Chi-square في تقديرات المعلمات، مما يشير إلى أداء متمائل. جاءت MLE D-H بتقديرات قريبة مع اختلاف بسيط، بينما أظهرت Bayes اختلافاً ملحوظاً، مما يجعلها الأقل دقة. ترتيب الأفضلية: MLE N-R في المرتبة الأولى، تليها Chi-square، ثم MLE D-H، وأخيراً Bayes. وبعد ذلك تم تقدير دالة البقاء $S^*(t)$ للبيانات ولجميع الحالات كما مبين في الجدول التالي:

جدول رقم (11) يبين تقدير دالة البقاء لنموذج Probit

T	St_MLE_NR	St_MLE_DH	St_Chi2	St_BAY	T	St_MLE_NR	St_MLE_DH	St_Chi2	St_BAY
1	0.716240475	0.192488757	0.716240615	0.048125931	28	2.55403E-10	1.03078E-10	2.55399E-10	0
2	0.625637803	0.141855971	0.625637924	0.002352213	29	4.99389E-11	2.69148E-11	4.99382E-11	0
3	0.527479116	0.101106072	0.527479206	3.30495E-05	30	9.17877E-12	6.74905E-12	9.17866E-12	0
4	0.427613683	0.069632888	0.427613735	1.28032E-07	31	1.58573E-12	1.62514E-12	1.58573E-12	0
5	0.33220226	0.046305065	0.332202274	1.33765E-10	32	2.57461E-13	3.7581E-13	2.57461E-13	0
6	0.246600194	0.029711985	0.246600177	3.71925E-14	33	3.93019E-14	8.34888E-14	3.93019E-14	0
7	0.174478369	0.018385399	0.174478331	0	34	5.66214E-15	1.77636E-14	5.66214E-15	0
8	0.117416288	0.010965633	0.11741624	0	35	7.77156E-16	3.66374E-15	7.77156E-16	0
9	0.075020108	0.006301184	0.07502006	0	36	1.11022E-16	6.66134E-16	1.11022E-16	0
10	0.045439724	0.00348715	0.045439683	0	37	0	1.11022E-16	0	0
11	0.02605862	0.00185794	0.026058589	0	38	0	0	0	0
12	0.014133838	0.000952742	0.014133816	0	39	0	0	0	0
13	0.007243838	0.000470096	0.007243824	0	40	0	0	0	0

14	0.00350545	0.000223133	0.003505442	0	41	0	0	0	0
15	0.001600669	0.000101863	0.001600664	0	42	0	0	0	0
16	0.000689285	4.47162E-05	0.000689283	0	43	0	0	0	0
17	0.000279787	1.88728E-05	0.000279786	0	44	0	0	0	0
18	0.000107006	7.6571E-06	0.000107005	0	45	0	0	0	0
19	3.85464E-05	2.98603E-06	3.85462E-05	0	46	0	0	0	0
20	1.30743E-05	1.11911E-06	1.30742E-05	0	47	0	0	0	0
21	4.17443E-06	4.03041E-07	4.1744E-06	0	48	0	0	0	0
22	1.25433E-06	1.39472E-07	1.25432E-06	0	49	0	0	0	0
23	3.54628E-07	4.63704E-08	3.54625E-07	0	50	0	0	0	0
24	9.4319E-08	1.48109E-08	9.43181E-08	0	51	0	0	0	0
25	2.35949E-08	4.54434E-09	2.35947E-08	0	52	0	0	0	0
26	5.55094E-09	1.33931E-09	5.55087E-09	0	53	0	0	0	0
27	1.22796E-09	3.79131E-10	1.22795E-09	0	54	0	0	0	0

من خلال الجدول، تُظهر طريقتا MLE N-R و Chi2 احتمالية بقاء مرتفعة مبدئيًا (0.716) مع انخفاض تدريجي يعكس تأثير الجرعات الطويلة. في المقابل، تبدأ MLE D-H باحتمالية أقل (0.192)، مما يشير إلى تأثير أقوى للبيانات على التوقعات. أما Bayes فتبدأ باحتمالية منخفضة نسبيًا (0.048) وتنخفض بسرعة، مما يعكس تقديرًا أكثر تحفظًا.

وان تقدير الجرعة المميّنة القاتلة لنموذج Probit التي تسبب في موت نصف المجموعة يمكن توضيحها بالجدول التالي :

جدول رقم (12) يبين تقدير قيم الجرعة الوسيطة LD50

Methods	X1LD50	X2LD50	X3LD50
'MLE N-R'	1.9860	1.3673	2.2167
'MLE D-H'	1.7270	0.9303	2.1752
'Chi2 '	1.9860	1.3673	2.2167
'Bayes'	1.1443	1.9753	1.1625

من الجدول اعلاه، أظهرت MLE N-R و Chi-Square تطابقًا، حيث كانت الجرعة X2 الأكثر سمّية لاحتياجها لأقل تركيز. طريقة MLE D-H أكدت أيضًا سمّية X2 بتقديرات أقل، بينما أظهرت Bayes أن الجرعة X1 هي الأكثر سمّية، مما يبرز تباينًا في تقديرات LD50 بين الطرق المختلفة.

الاستنتاجات:

1. كفاءة النموذج: أظهر نموذج Probit قدرة عالية على تحليل بيانات الجرعة-الاستجابة، مما يجعله أداة فعالة في تقدير الجرعات المثلى والجرعة المميّنة الوسطى (LD50).
2. أفضل طرق التقدير: طريقتا MLE N-R و Chi-Square كانتا الأكثر دقة واستقرارًا، حيث حققتا أداءً متماثلًا في تقدير المعلمات ودالة البقاء. أظهرت MLE D-H أداءً مقبولًا لكنها كانت أقل دقة نسبيًا من الطرق السابقة. قدمت Bayes تقديرات مختلفة بشكل ملحوظ، حيث أظهرت تحفظًا أكبر في تقدير دالة البقاء وكانت أقل دقة في تقدير LD50.
3. دالة البقاء: أظهرت النتائج تباينًا في احتمالية البقاء بناءً على الطريقة المستخدمة، مع تفوق MLE N-R و Chi-Square في تقديم تقديرات متنسقة مقارنة بالطرق الأخرى.
4. تقدير LD50: كانت الجرعة X2 الأكثر سمّية وفقًا لطريقتي MLE N-R و Chi-Square و MLE D-H، بينما كانت الجرعة X1 هي الأكثر سمّية وفقًا لطريقة Bayes.

التوصيات:

1. اختيار الطريقة المناسبة: يوصى باستخدام MLE N-R و Chi-Square عند الحاجة إلى تقديرات دقيقة ومستقرة لمعاملات نموذج Probit، خاصة في الدراسات ذات البيانات الكبيرة أو المعقدة.
2. تحليل البيانات: يمكن استخدام طريقة Bayes عند الحاجة إلى تقديرات أكثر تحفظاً، مع مراعاة أنها قد لا تكون دقيقة بشكل كافٍ لتقدير الجرعات المميتة الوسطى.
3. تحسين دقة التقدير: يفضل إجراء تحسينات على طريقة MLE D-H لتقليل التباين وتحقيق نتائج أقرب إلى الطريقتين المتفوقتين.
4. استخدام نموذج Probit: يُنصح باعتماده في الدراسات الزراعية والبيئية لتقدير الجرعات المثلى والجرعات المميتة عند وجود بيانات استجابة ثنائية، لما يقدمه من دقة وسهولة في التحليل.
5. تحليل دالة البقاء: يوصى باستخدام دالة البقاء كأداة مساعدة لفهم تأثير الجرعات على المدى الطويل، مع اختيار الطريقة الأنسب لتحليل البيانات بناءً على طبيعتها وأهداف الدراسة.

المصادر

1. الزوري، م. ع. 1994. (خواص تقديرات معاملات نموذج وحدة الاحتمال مع تطبيق عملي). رسالة ماجستير غير منشورة، كلية الإدارة والاقتصاد، قسم الإحصاء، جامعة بغداد.
2. زين الثعلبي، س. ح. 2019. (تحليل البيانات الثنائية مع اهتمام خاص بنموذج اللوغيت). مجلة العلوم الاقتصادية والإدارية والقانونية، 3(8)، 131-157. كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة البصرة، العراق.
3. Alexander Spermann, (2009). "The Probit model". University of Freiburg SoSe (P.P15).
4. Crump, K.S., Hoel, D.G., Langley, C.H., & Peto, R. (1976). "Fundamental carcinogenic processes and their implications for low dose risk assessment". *Cancer Research*, 36(9 Part 1), 2973–9. PMID 975067.
5. Dawood, M. (2022). "Estimating the reliability of degradation data that follows the Wiener process with practical application", pp. 1-89.
6. Gal'antai, A. (2021). "A convergence analysis of the Nelder-Mead simplex method". *Acta Polytechnica Hungarica*, Vol. 18, No. 5, pp. 1-13.
7. Hastings, N., Evans, M., & Peacock, B. (2000). *Statistical Distributions*, 3rd ed., New York: Wiley, p. 13.
8. Hosmer, D., Lemeshow, S., & Sturdivant, R. (2013). *Applied Logistic Regression*, 3rd ed., New York: Wiley, WSIPS, <http://ihmsi.org>.
9. Lin, W., Chai, Y., & Liu, Q. (2019). "Remaining Useful Life Prediction of Electronic Products Based on Wiener Degradation Process". *IFAC PapersOnline*, Vol. 52, pp. 24-28.
10. Matilainen, K. (2013). "Employing A Monte Carlo Algorithm in Newton-Type Methods For Maximum Likelihood Estimation of Genetic Parameters". *PLOS ONE*, pp. 1-7.
11. McCullagh, P., & Nelder, J. (1983). *Generalized Linear Models*, London: Chapman and Hall.
12. McKelvey, R. D., & Zavoina, W. (1975). "A statistical model for the analysis of ordinal level dependent variables". *Journal of Mathematical Sociology*, 4(1), 103–120.
13. Al-Samarai, Dr. Firas Rasheed. (2020). "Description of Dose Response Curve". *Academia.edu*, (P.P.4, 21).