AL KUT JOURNAL OF ECONOMIC AND ADMINISTRATIVE SCIENCES
Publisher: College of Economics and Management - Wasit University

مقارنة طريقة بيز مع طريقة المكان الأعظم لتقدير معولية الاجهاد والمتانة للتوزيع الهندسي

سارة ابراهيم ناهي[1] أ .م . د علي حميد يوسف[2]

جامعة واسط / كلية الادارة والاقتصاد

المستخلص

في هذا البحث قُدرت دالة معولية نظام الاجهاد والمتانة للتوزيع الهندسي؛ إذ استعملت طريقتان للتقدير هما طريقة، بيز في ظل دالة خسارة تربيعية (SELF)، وباستعمال التوزيع الاولي بيتا،(Beta Distribution) وباستعمال المعلمات الفوقية a=(0.3 ، 0.9) ،b=(3، 3.5) وطريقة الإمكان الأعظم (MLE)، واستعملت محاكاة مونت كارلو للحصول على المقدرات، وكان من اهم الاستنتاجات التي توصلت اليها كفاءة طريقة بيز في ظل دالة خسارة تربيعية وبوجود المعلمات الفوقية a)،b)=(0.3،3)

Abstract

In this research، the reliability function of the stress-strength system for the geometric distribution was estimated. Two methods were used for estimation، namely the Bayesian method under the squared error loss function (SELF)، Using the prior distribution(Beta Distribution) and using upper parameters a=(0.3،0.9)، b=(3،3.5)، and the Maximum Likelihood Estimation (MLE) method. Monte Carlo simulation was used to obtain the estimators، and one of the most important conclusions reached was the efficiency of the Bayesian method under the squared error loss function with the upper parameters (a ، b)=(0.3،3).

1- المقدمة Introduction

حاز موضوع دراسة المعولية على اهتمام متزايد من لدن الباحثين في مجال الانظمة والمعدات ومن خلال دراسة المعولية. يمكننا تقييم اداء عمل تلك الانظمة لمعرفة نوع الانتاج وحجمه لغرض تحسينه في المستقبل من خلال تطويره؛ لأنه يعدُّ مؤشراً لبيان كفاءة النظام وامكانية اتمام العمل من دون عطل ،حيث ان هذه الانظمة تتعرض بمرور الوقت إلى الاعطال الذي يؤدي إلى زيادة النفقات المادية وانخفاض الانتاج ،وعلى هذا الاساس فأن دراسة المعولية يقودنا إلى

التخطيط السليم لتحسين نوعية الانظمة ومعرفة نوع وحجم الانتاج المطلوب .تعرف المعولية من الناحية الاحصائية بانها قدرة المركبة على الاداء بشكل جيد في نطاق محدد وخلال فترة زمنية معينة، اي قدرة الجهاز على انجاز العمل المخصص له دون فشل. ان اول من درس المعولية هو عالم الرياضيات السويسري دانييل برنولي Bernoulli Daniel عام 1920 بعد الحرب العالمية الثانية من خلال استعمل عمليات السيطرة الاحصائية،[1] في نظرية المعولية تعدُّ نماذج الاجهاد والمتانة افضل الموضوعات وأكثرها جاذبية حيث يتعرض النظام لضغوط خارجية كثيرة ويتم تحديد معوليته من خلال متانته.

في عام (2013) ناقش الباحث $_{(\text{Barbiero})}$[2] الاستدلال الاحصائي لمعولية نموذج الاجهاد والمتانة عندما يكون الاجهاد والمتانة متغيران عشوائيان مستقلان يتبعان توزيع بواسون وتم استعمل طريقة الإمكان الاعظم(MLE) ،وطريقة الحد الادنى الموحد للتباين الغير متحيز ،طريقة دلتا وتم اقتراح فترات الثقة، وتم استعمل محاكاة مونت كارلو لتقييم اداء المقدرات من حيث معدل التغطية ومتوسط الطول في ظل احجام عينات مختلفة، وباستعمال المعيار متوسط مربعات الخطأ(MSE) وتشير الدراسة إلى ان المقدرين يمتلكان خصائص متشابهة وان دقة هذين المقدرين تكون مرضية حتى في حجوم العينات الصغيرة .

في عام 2015 قام الباحث $_{(\text{Mohamed})}$[7] بتقدير النموذجR=P[X <Y] عندما يتبع كل من متغير المتانة المستقل Y ومتغير الاجهاد المستقل X التوزيع الهندسي بمعلمات مختلفة واستعملت طريقة بيز ،وطريقة الإمكان الاعظم ،(MLE) في ظل دالة خسارة تربيعيةSquared Error Loss Function(SELF) ،ودالة الخسارة الاسية Linex Loss Function(LLF) وباستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ(MSE) ،من خلال النتائج تبين افضلية طريقة بيز ان (MSE) تتناقص بزيادة حجم العينة (n،m).

في عام 2023 قام الباحثون $_{(Hassan\ \text{واخرون،})}$[3] بتقدير دالة معولية الاجهاد والمتانة من النوع $R=P[Y<X<Z]$ عندما يتبع متغير المتانة المستقل X ومتغيري اجهاد الحد الادنى Yوالحد الاعلى Z المستقلين على التوالي التوزيع الاسي المعكوس مع معلمات شكل مختلفة في حالة العينات المصنفة (Ranked Set Sampling)(RSS) والعينات العشوائية البسيطة(Simple Random Sampling)(SRS) تم استعمل طريقة الامكان الاعظم MLE لتقدير دالة المعولية ومن خلال جداول المحاكاة بالاعتماد على عدة معايير منها متوسط مربعات الخطأ (MSE) ،والتحيز المطلق (AB) ،والخطأ المعياري (SE) ،والكفاءة النسبية (RE) تبين بشكل عام ان مقدر معولية الاجهاد والمتانة كان اكثر كفاءة عندما كان متغير المتانة X يعتمد على العينات المصنفة (RSS) بغض النظر على نوع الاجهاد.

في هذا البحث تم تقدير دالة معولية الاجهاد والمتانة لتوزيع الهندسي للنموذج R=P(Y<X<Z) إذ تتعرض المتانة العشوائية المستقلة (X) إلى اجهاد الحد الادنى (Y) واجهاد الحد الاعلى (Z) العشوائيان المستقلان، وتم استعمل طريقتين للتقدير طريقة الامكان الاعظم (MLE)، وطريقة بيز في ظل دالة خسارة تربيعية (SELF) *Squared Error Loss Function* ،باستعمال التوزيع الاولي بيتا (Beta Distribution).

لغرض تحقيق هدف البحث فقد تم تقسيمه على النحو التالي في القسم (2) مشكلة البحث، وفي القسم (3) هدف البحث ،في القسم (4) تقدير معولية الاجهاد والمتانة ،اما القسم (5) تطرق إلى التوزيع الهندسي وابرز خصائصه ،وفي القسم (6)

تضمن طريقة الامكان الاعظم، اما القسم (7) تضمن طريقة بيز في ظل التوزيع الاولي بيتا وبوجود دالة خسارة تربيعية ،والقسم (8) المحاكاة ،اما القسم (9) الاستنتاجات ،و(10) تضمن ابرز التوصيات ،واخيرا القسم (11) المصادر.

2 – مشكلة البحث Problem of Search

نظرا للتطور الحاصل في التكنولوجيا يواجه المستخدمون تحديات كبيرة فيما يتعلق بمتانة الانظمة فالعوامل البيئية وظروف التشغيل تؤثر سلبا على متانة هذه الانظمة ،ويتسبب الاجهاد المسلط عليها إلى زيادة توقف الانظمة وتقليل عمرها الافتراضي، وللتغلب على هذه المشكلة يجب تحديد مصدر الاجهاد المؤثر على متانة النظام لغرض اجراء التحسينات اللازمة .

3 – هدف البحث purpose of Search

يهدف البحث في الحصول على افضل تقدير لدالة معولية الاجهاد والمتانة للتوزيع الهندسي وبمعلمات مختلفة عندما تتعرض المتانة العشوائية المستقلة X إلى اجهاد الحد الادنى Yواجهاد الحد الاعلى Z العشوائيان المستقلان ،من خلال استعمل طريقة الامكان الاعظم (MLE)،وطريقة بيز في ظل التوزيع الاولي بيتا(Beta Prior Distribution) ، وباستعمال دالة خسارة تربيعية (*Squared Error Loss Function*(SELF)،وتم اجراء محاكاة مونت كارلو للمقارنة بين الطريقتين باستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ(MSE).اما الجانب التطبيقي تم استعمل بيانات حقيقية تتمثل بالعمر المرصود لعينات الفولاذ.

4- معولية الاجهاد والمتانة Stress-Strength Reliability

يعد نظام الاجهاد والمتانة ذو اهمية بالغة في كثير من التطبيقات كالهندسية والعسكرية والصحية ،ويعتبر مقياس لمعولية الانظمة ويعبر عنه كالاتي :

R=P

فالمفهوم العام لنظام الاجهاد والمتانة يبين العلاقة بين متغير المتانة العشوائي المستقل (X) ومتغير الاجهاد العشوائي المستقل (Y) واحتمال أن يتغلب أحدهما على الآخر، فان النظام يعمل إذا تجاوزت المتانة على الاجهاد والعكس صحيح .

أما في هذا البحث تم تقدير معولية الاجهاد والمتانة من النوع $R=P[Y<X<Z]$ ولكي يعمل النظام يجب ان تكون المتانة العشوائية المستقلة (X) اكبر من اجهاد الحد الادنى (Y) واقل من اجهاد الحد الاعلى (Z) .

ليكن X متغير عشوائي مستقل يمثل المتانة ، Y متغير عشوائي مستقل يمثل اجهاد الحد الادنى ،Z متغير عشوائي مستقل يمثل اجهاد الحد الاعلى تتبع التوزيع الهندسي للمعالم θ_1 ، θ_2 ، θ_3 على التوالي .

يعبر عن دالة معولية نظام الاجهاد والمتانة بالصيغة الاتية [5]

$$R = P[Y<X<Z] = \sum_{k=1}^{\infty} P[X = K ، Y = K ، Z = K]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P[X = K] * P[Y < K] * P[Z > K]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \theta_1 (1-\theta_1)^{k-1} * (1 - (1-\theta_2)^{k-1}) * (1-\theta_3)^{k}$$

وبتبسيط الصيغة اعلاه نحصل على مقدر دالة معولية الاجهاد والمتانة

$$R=\frac{\theta_1\theta_2(1-\theta_1)(1-\theta_3)^2}{(\theta_1+\theta_3-\theta_1\theta_3)(\theta_1+\theta_3-\theta_1\theta_3+\theta_2(1-\theta_1)(1-\theta_3)} \qquad (1)$$

5- التوزيع الهندسي Geometric Distribution

يعد التوزيع الهندسي احد التوزيعات المتقطعة ويستخدم في مجالات عدة هندسية واحصائية واقتصادية وغيرها، يأتي هذا التوزيع من عائلة التوزيع الاسي والمتغير العشوائي يمثل الجهد اللازم للحصول على النجاح الاول .[9]

يمتلك التوزيع الهندسي دالة الكتلة الاحتمالية *(p.m.f.)*، ودالة التوزيع التراكمي *(c.d.f.)*، ودالة المعولية على التوالي :

$$P(X=x;\theta)=\theta(1-\theta)^{x-1} \qquad x=1،2،3،.... \qquad (2)$$

$$F(X=x;\theta)=1-(1-\theta)^{x} \qquad x=1،2،3،... \qquad (3)$$

$$R(t)=(1-\theta)^{x} \qquad x=1،2،.... \qquad (4)$$

حيث ان $0<\theta<1$ تمثل احتمال النجاح.

من ابرز خصائص التوزيع الهندسي ما يلي:

1- $E(x)=\frac{1}{\theta}$

2- $Var(x)=\frac{1-\theta}{\theta^2}$

3- $M_{x(t)}=\frac{\theta\, e^t}{1-e^t(1-\theta)}$

6- طريقة الامكان الأعظم Maximum Likelihood Method(MLE)

افترض ان العينات العشوائية المستقلة $X_1،X_2،\dots\dots X_{n1}$، $Y_1،Y_2،\dots\dots Y_{n2}$، $Z_1،Z_2،\dots\dots Z_{n3}$ تتبع التوزيع الهندسي

$Geo(\theta_1)$، $Geo(\theta_2)$، $Geo(\theta_3)$ على التوالي . دالة الامكان الاعظم θ_1، $\theta_2،\theta_3$ للعينات المرصودة هي[4] :

$$L(x ،y ،z/\theta_1،\theta_2،\theta_3)=\prod_{i=1}^{n_1}\theta_1(1-\theta_1)^{x_i-1}\prod_{j=1}^{n_2}\theta_2(1-\theta_2)^{y_j-1}\prod_{k=1}^{n_3}\theta_3(1-\theta_3)^{z_k-1} \qquad (5)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة اعلاه نحصل على :

$$\text{Log } L=n_1\log\theta_1+\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-1)\log(1-\theta_1)+n_2\log\theta_2+\sum_{j=1}^{n_2}(y_j-1)\log(1-\theta_2)$$

$+n_3 \log\theta_3 + \sum_{k=1}^{n_3}(z_k - 1)\log(1-\theta_3)$

يمكن الحصول على مقدر $\widehat{\theta_1}$، $\widehat{\theta_3}$، $\widehat{\theta_2}$ للمعالم θ_3 ، θ_2 ، θ_1على التوالي :

$$\frac{\partial\, Log\, L}{\partial\theta_1} = \frac{n_1}{\theta_1} - \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_i - n_1}{1-\theta_1} = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial\, Log\, L}{\partial\theta_2} = \frac{n_2}{\theta_2} - \frac{\sum_{j=1}^{n_2} y_j - n_2}{1-\theta_2} = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial\, Log\, L}{\partial\theta_3} = \frac{n_3}{\theta_3} - \frac{\sum_{k=1}^{n_3} z_k - n_3}{1-\theta_3} = 0 \qquad (8)$$

من المعادلات (8)،(7)،(6) يتم الحصول على مقدرات $\widehat{\theta_1}$ ، $\widehat{\theta_3}$، $\widehat{\theta_2}$ كالاتي :

$$\widehat{\theta_1}_{MLE} = \frac{1}{\bar{x}}$$

$$\widehat{\theta_2}_{MLE} = \frac{1}{\bar{y}}$$

$$\widehat{\theta_3}_{MLE} = \frac{1}{\bar{z}}$$

وبتعويض مقدرات $\widehat{\theta_1}$ ، $\widehat{\theta_3}$، $\widehat{\theta_2}$ واستعمل خاصية الثبات نحصل على مقدر دالة المعولية بطريقة الامكان الاعظم وكالاتي :

$$\hat{R}_{MLE} = \frac{(\bar{x}-1)(\bar{z}-1)^2}{(\bar{x}+\bar{z}-1)((\bar{y}-1)(\bar{x}+\bar{z}-1)+\bar{x}\bar{z})} \qquad (9)$$

7- طريقة بيز باستعمال التوزيع الأولي بيتا (Beta Prior Distribution) في ظل دالة خسارة تربيعية

نفترض ان المعلمات θ_1،θ_2،θ_3 مستقلة لها توزيع اولي بيتا (Beta Prior Distribution) اي ان $Beta_I(a_1،b_1)$،$Beta_{II}(a_2،b_2)$،$Beta_{III}(a_3،b_3)$ حيث تكون دالة الكثافة الاحتمالية على التوالي :[8]

$$f(\theta_1،a_1،b_1) = \frac{1}{B(a_1،b_1)}\theta_1^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1}\, ; a_1،b_1 > 0 \;\; ،\theta_1\epsilon[0،1]$$

$$f(\theta_2،a_2،b_2) = \frac{1}{B(a_2،b_2)}\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1}\, ; a_2،b_2 > 0 \;\; ،\theta_2\epsilon[0،1]$$

$$f(\theta_3،a_3،b_3) = \frac{1}{B(a_3،b_3)} {\theta_3}^{a_3-1}(1-\theta_3)^{b_3-1} \, ; a_3،b_3 > 0 \;\; ،\theta_3 \epsilon [0،1]$$

وان حاصل ضرب الصيغ اعلاه يعطي التوزيع الاولي المشترك وكالاتي :

$$g \quad (\theta_1،\theta_2،\theta_3)=\frac{1}{B(a_1،b_1)B(a_2،b_2)B(a_3،b_3)} {\theta_1}^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1}.{\theta_2}^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1}.{\theta_3}^{a_3-1}(1-\theta_3)^{b_3-1} \quad (10)$$

وبدمج دالة الإمكان مع دالة التوزيع الأولي المشترك للصيغ (10)، (5) نحصل على التوزيع المشترك اللاحق للمعالم $\theta_3،\theta_2،\theta_1$كالاتي :

$$h(\theta_1،\theta_2،\theta_3 \backslash x،y،z) = \frac{L(x،y،z|\theta_1،\theta_2\theta_3) * g(\theta_1،\theta_2\theta_3)}{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 L(x،y،z|\theta_1،\theta_2\theta_3) * g(\theta_1،\theta_2\theta_3)d\theta_3 d\theta_2 d\theta_1} \quad (11)$$

في ظل دالة خسارة تربيعية تم الحصول على مقدر بيز باستعمال الصيغة الاتية :

$$\hat{R}_B = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 R * h(\theta_1،\theta_2،\theta_3 \backslash x،y،z)d\theta_3 d\theta_2 d\theta_1$$

ونظرا لصعوبة حل التكاملات نستعمل تقريب ليندلي الذي اقترحه الباحث Lindley عام 1980 [6] لحساب مقدر بيز التقريبي للمعولية وكالآتي :

$$R \approx R_{MLE} + \frac{1}{2}[(R_{11}+2R_1\rho_1)\sigma_{11} + (R_{22}+2R_2\rho_2)\sigma_{22} + (R_{33}+2R_3\rho_3)\sigma_{33}] + \frac{1}{2}\left(L_{111}R_1\,\sigma_{11}^2 + L_{222}R_2\,\sigma_{22}^2 + L_{333}R_3\,\sigma_{33}^2\right) \quad (12)$$

حيث ان

$$\sigma11 = \frac{n1}{\theta1^2(1-\theta1)^2} \quad ، \sigma22 = \frac{n2}{\theta2^2(1-\theta2)^2} \quad ، \sigma33 = \frac{n3}{\theta3^2(1-\theta3)^2}$$

$$R_{11}=\frac{\partial R^2}{\partial\theta1^2} = \frac{d(dc11-cd11)-2d1(dc1-cd1)}{d^3} \quad ، R_{22}=\frac{\partial R^2}{\partial\theta2^2} = \frac{d(dc22-cd22)-2d2(dc2-cd2)}{d^3}$$

$$R_{33}=\frac{\partial R^2}{\partial\theta3^2} = \frac{d(dc33-cd33)-2d3(dc3-cd3)}{d^3} \quad ، L_{111}=\frac{2n1}{\theta1^3} - \frac{2n1(\bar{x}-1)}{(1-\vartheta1)^3} \quad ،L_{222}=\frac{2n2}{\theta2^3} - \frac{2n2(\bar{y}-1)}{(1-\theta2)^3}$$

$$،L_{333}=\frac{2n3}{\theta3^3} - \frac{2n3(\bar{z}-1)}{(1-\theta3)^3} \quad ، \rho1 = \frac{(a1-1)}{\theta1} - \frac{(b1-1)}{(1-\theta1)} \quad ، \rho2 = \frac{(a2-1)}{\theta2} - \frac{(b2-1)}{(1-\theta2)} \quad ، \rho3 = \frac{(a3-1)}{\theta3} - \frac{(b3-1)}{(1-\theta3)}$$

$$R_3=\frac{\partial R}{\partial\theta3} = \frac{dc3-cd3}{d^2} \quad ،R_2=\frac{\partial R}{\partial\theta2} = \frac{dc2-cd2}{d^2} \quad ، \quad R_1=\frac{\partial R}{\partial\theta1} = \frac{dc1-cd1}{d^2}$$

8- المحاكاة Simulation

أُستعملَ أسلوب المحاكاة بطريقة مونت كارلو من اجل المقارنة بين المقدرين ،حيث ولدت عينات عشوائية مستقلة وبحجوم عينات مختلفة من التوزيع الهندسي، وباستعمال المعيار متوسط مربعات الخطأ(MSE)، وتم تكرار التجربة (1000) مرة ،مطبقة ببرنامج (R) وفيما يلي عرض تفصيلي للنتائج.

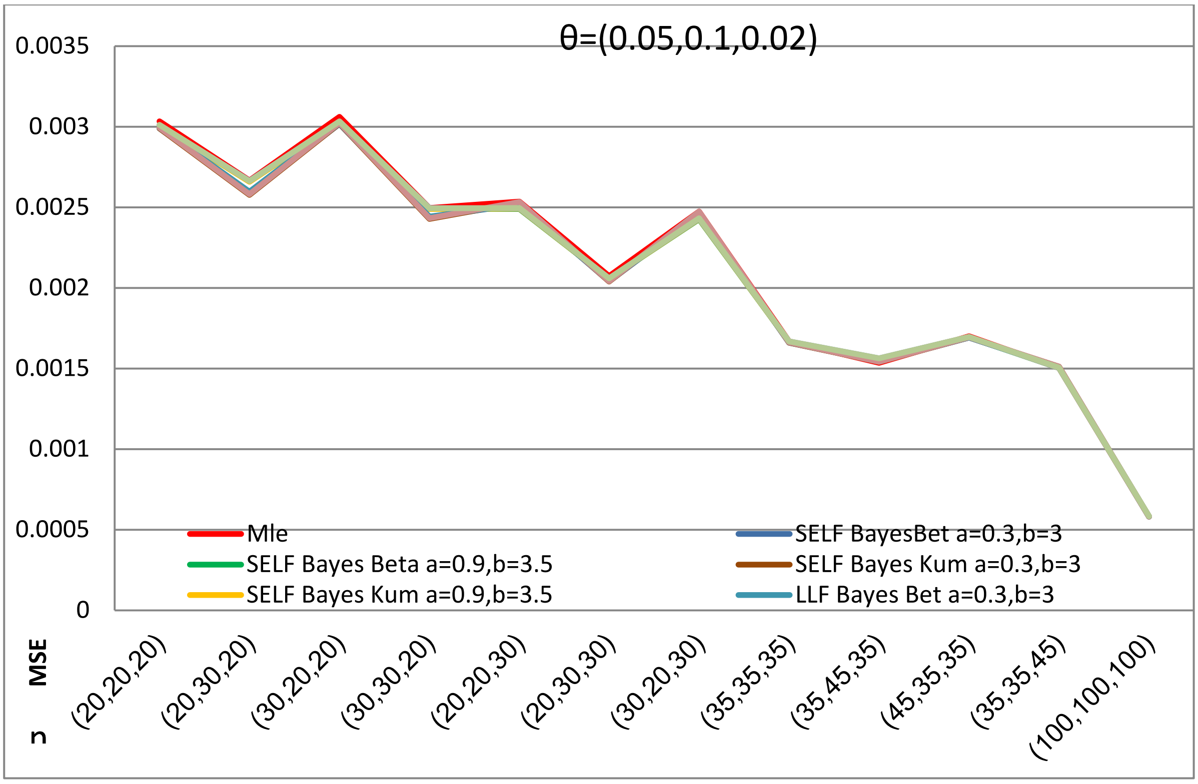
جدول (1) يمثل قيم MSE لـR باستعمال طريقة MLE و Bayes Beta تحت دالة خسارة تربيعية

n1	n2	n3	MLE	Bayes Beta a=0.3،b=3	Bayes Beta a=0.9،b=3.5
				Squared Error Loss Function	
20	20	20	0.003033	0.002990	0.003006
20	30	20	0.002666	0.002593	0.00266
30	20	20	0.003062	0.003018	0.003028
30	30	20	0.002496	0.002439	0.002491
20	20	30	0.002535	0.002517	0.002490
20	30	30	0.002073	0.002042	0.002056
30	20	30	0.002474	0.002456	0.002426
35	35	35	0.001668	0.001661	0.001666
35	45	35	0.001535	0.001543	0.00156
45	35	35	0.00175	0.001691	0.001694
35	35	45	0.001504	0.001508	0.001503
100	100	100	0.000580	0.000581	0.000582

جدول (2) يمثل القيم التقديرية لـR باستعمال طريقة MLE و Bayes Beta تحت دالة خسارة تربيعية

n1	n2	n3	R	MLE	Bayes Beta a=0.3،b=3	Bayes Beta a=0.9،b=3.5
					Squared Error Loss Function	
20	20	20	0.407862	0.443543	0.44209	0.441754
20	30	20		0.44193	0.437812	0.436847
30	20	20		0.445028	0.440089	0.43963
30	30	20		0.440187	0.436302	0.43574
20	20	30		0.439805	0.437046	0.437429
20	30	30		0.440787	0.441812	0.4409
30	20	30		0.436531	0.43225	0.432825
35	35	35		0.441434	0.4402	0.440383
35	45	35		0.439362	0.435544	0.435672
45	35	35		0.438508	0.437588	0.437532
35	35	45		0.435033	0.432854	0.432794
100	100	100		0.426178	0.425176	0.424944

شكل (1) يمثل قيم MSE ل R باستعمال طريقة MLE و Bayes Beta تحت دالة خسارة تربيعية



9- الاستنتاجات Conclusions

من خلال نتائج المحاكاة (الجدول 1)،(الجدول 2) تم التوصل إلى ما يلي :

1- افضلية طريقة بيز لدالة المعولية مقارنة مع طريقة الامكان الاعظم .
2- افضلية طريقة بيز عندما تكون المعلمات الفوقية الافتراضية مساوية إلى(0.3)،(3 .
3- تقل قيمة (MSE) بزيادة حجم العينة .
4- في حالة حجم العينة الكبير فقط تكون طريقة الامكان الاعظم هي الأفضل .
5- تقارب بين القيمة الحقيقة والقيمة التقديرية لدالة المعولية ولأغلب حجوم العينات .

10-التوصيات Recommendations

1- نوصي باعتماد طريقة بيز في تقدير دالة معولية الاجهاد والمتانة في ظل دالة خسارة تربيعية لأنها حققت افضل النتائج مقارنة مع طريقة الامكان الأعظم .
2- نوصي ان يكون التوزيع الاولي لدالة المعولية هو توزيع بيتا .
3- نوصي باقتراح توزيع اولي مختلف لتقدير دالة المعولية .

References 11-المصادر

1- مزهر ، زينب كاظم (2023) ." تقدير معولية الاجهاد والمتانة لمتعدد المركبات باستعمال بعض توزيعات قوة الفا مع تطبيق عملي" ، اطروحة دكتورا ، كلية الادارة والاقتصاد ،الجامعة كربلاء.

2- Barbiero، A. (2013). Inference on Reliability of Stress-Strength Models for Poisson Data. *Journal of Quality and Reliability Engineering*، *2013*(1)، 530530.

3- Hassan، A. S.، Alsadat، N.، Elgarhy، M.، Chesneau، C.، & Nagy، H. F. (2023). Analysis of ℝ= P [Y< X< Z] Using Ranked Set Sampling for a Generalized Inverse Exponential Model. *Axioms*، *12*(3)، 302.

4- Jacob، N.، & EJ، A. (2023). Estimation of Stress Strength Reliability P [Y< X< Z] of Lomax Distribution under Different Sampling Scheme. *Current Journal of Applied Science and Technology*، *42*(42)، 36-66.

5- Jiheel، A. K.، & Al-Qatifi، A. B. J. (2020). Bayes Pre-Test Shrinkage Estimation of Rayleigh Distribution under Different Loss Functions. Int. J. Adv. Appl. Math. And Mech، 7(4)، 72-90.

6- Lindley، D. V. (1980). Approximate bayesian methods. *Trabajos de estadística y de investigación operativa*، *31*، 223-245.

7- Mohamed، M. O. (2015). Inference for reliability and stress-strength for geometric distribution. *Sylwan*، *159*(2)، 281-289.

8- Nayal، A. S.، Singh، B.، Tyagi، A.، & Chesneau، C. (2023). Classical and Bayesian inferences on the stress-strength reliability R= P [Y< X< Z] in the geometric distribution setting. *AIMS Mathematics*، *8*(9)، 20679-20699.

9- Susilo، T.، Kurniasari، D.، & Aziz، D. (2021). Characteristics of Bayes Estimator in the Geometric Distribution.