دراسة مقارنة بين طريقة بيز وطريقة المربعات الصغرى في تقدير معلمات نماذج النمو الأسية التي تعاني من مشكلة وجود الارتباط الذاتي

الدكتور عبد الله سليمان محمود
جامعة الطائف / المملكة العربية السعودية

الدكتور سيف الدين هاشم قمر
كلية بغداد للعلوم الاقتصادية الجامعة / العراق

Abstract

Bayesian method is an important method to estimate the parameters of a model; therefore we have studied this method in this paper by using the Exponential growth models. We focus on three of prior functions (Informative, Natural Conjugate, and the function that depends on previous experiments) to used in the Bayesian method. Where almost of observations for the growth phenomena are depended on one another, which in turn leads to a correlation between those observations, which calls to treat such this problem, called Autocorrelation, and to verified this has been used Bayesian method.

The goal of this study is to estimate the parameters of the Exponential growth models by using Bayesian method, and compare it with the Generalized Least squares method. For verifying the goal has been used the simulation technique where has been generated random samples with known parameters. It has been shown from the computational results that the Bayesian method depend on the Informative prior function or depend on the function that depends on previous experiments, better than the Generalized Least squares method to estimate the Exponential growth models, but appear the inverse when using the Natural Conjugate prior function.

مقدمة:

استخدمت كلمة نمو لوصف التغيرات غير العكسية مع الزمن (بصرف النظر عن وحدة القياس)، أي التغيرات في الحجم، أو الشكل، أو العدد؛ إذ أن معدل النمو للمشاهدات المتعاقبة يفترض أن يكون غير ثابت، وحيث أن النمو يعتمد على الزمن، وأن العلاقة بين الحجم (الذي يمثل متغير النمو) والزمن هي علاقة غير خطية، لذلك فإنه من المناسب استخدام نماذج الانحدار غير الخطية لوصف ذلك النمو، ولقد ظهرت عدة صيغ لمنحنيات النمو من بينها صيغ منحنيات النمو الأسية، التي تتميز بزيادة النمو في المراحل الأولى بشكل متسارع وكبير جداً، ولعل تمثيل مثل هذه المنحنيات يظهر جلياً في الكائنات الحية الصغيرة حيث تبتدئ نموها بانشطار ثنائي لخلاياها، وتكون هذه الانشطارات كثيرة، وسريعة وخاصةً في المراحل الأولى للنمو، وقد أُستخدمت هذهِ المنحنيات بشكل واسع في البحوث الحياتية، وفي دراسة نمو الإنتاج الاقتصادي للمنشأة، وسلوك إنتاجية المصانع، وغيرها[1]، وحيث أن أغلب مشاهدات ظواهر النمو تكون معتمدةً بعضها على البعض الآخر الذي بدوره يؤدي إلى وجود ارتباط بين تلك المشاهدات، ومن المؤكد أن هذا الارتباط سيؤثر بشكلٍ سلبي على تحليل تلك الظواهر مما يدعو إلى العمل على معالجة مثل هذه المشكلة التي تسمى مشكلة الارتباط الذاتي الذي تناولته هذه الدراسة باستخدام أسلوب بيز لتقدير معلمات نماذج النمو المستخدمة.

تعتمد ظاهرة النمو على البيانات الطولية (Longitudinal data) المتمثلة بمشاهدات متكررة على طول الزمن الفعال التي يمكن أن تصاغ كعملية تصادفية، ويختلف هذا النوع من البيانات عن أغلب أنواع البيانات الأخرى من حيث أنها يجب أن تأخذ بالحسبان الاعتمادية للاستجابة الحالية على الزمن الماضي، وتأتي منحنيات

(1) ظافر عاصم الدباغ، **مقارنة تقديرات الإمكان الأعظم غير الأكيدة مع بعض طرق التقدير الأخرى مع بعض التطبيقات**، رسالة ماجستير في الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد، 1992، ص11.

النمو من ضمن الدوال الرياضية المهمة التي تتعامل مع هذا النوع من البيانات[1]. وكما هو معروف فإن هناك أنواعاً مختلفة، ومتعددة الأغراض من منحنيات النمو لا يمكن حصرها ضمن هذه الدراسة؛ لذلك تم الاعتماد على نموذجين فقط من تلك النماذج لإجراء التحليلات الإحصائية المستهدفة في هذه الدراسة ألا وهما: نموذج الجزيئي الواحد Monomolecular Growth Model، ونموذج النمو الأسي المعدل Modified Exponential Growth Model.

منحنى نمو الجزيئي الواحد:

إن العديد من الظواهر تخضع لاستجابة نمو محددة، وأحد الافتراضات البسيطة التي تقود إلى تحديد النمو هو الافتراض بأن معدل النمو يتناسب مع الحجم المتبقي والذي يمكن صياغته كالآتي:

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = k(\alpha - f(t)) \qquad (1)$$

ولبعض قيم ($k>0$) فإن الحل العام للمعادلة (1) يمكن أن يصاغ كالآتي:

$$f(t) = \alpha - (\alpha - \beta)e^{-kt} \qquad (2)$$

حيث أن ($t>0$) و ($k>0$)، وبما أن المنحنى يصف النمو فإن ذلك يتطلب أن يكون ($\alpha>\beta>0$)، حيث أن الرموز في الصيغة (1) والصيغة (2) هي:

α: تمثل الحد الأعلى لحجم المجتمع (أو المفردة) بعد فترة من الزمن أي ($t\to\infty$).

β: تمثل حجم المجتمع (أو المفردة) الأولي (أي عند الزمن صفر).

k: تمثل معدل النمو النسبي (Relative Growth Rate) خلال الزمن (t).

ويمكن إعادة صياغة المعادلة (2) كالآتي:

$$f(t) = \alpha - \beta e^{-kt} \qquad (3)$$

باستبدال ($\alpha-\beta$) بـ β[2].

وتحت افتراض أن ($\alpha=\beta$) فإن الحجم الأولي الظاهر في الصيغة (3) يكون صفراً والذي ينتج عنه ما يسمى بمنحنى فان بيرتلانفي (Von Bertalanffy) الذي كثيراً ما استُخدم في علم البيئة لوصف النمو الحيواني[3].

منحنى النمو الأسي المعدل

يمكن تعريف منحنى النمو بأنه؛ أي تعبير عن حجم مجتمع بوصفه دالة لمتغير الزمن (t) بحيث يصف مسار نموه[4]. تعتبر منحنيات النمو من ضمن الدوال الرياضية المهمة التي تتعامل مع البيانات الطولية

---

[1] Lindsey, J. K., **Applying Generalized Linear Models**, New York: Springer, Inc., 1997, p. 69.

[2] Seber, G. A. F. and Wild, C. J., **Non Linear Regression**, New York: John Wiley & Sons, 1989, pp. 327-328.

[3] Lindsey, J. K., **Nonlinear Models in Medical Statistics**, First published, Oxford; New York: published in United States by Oxford university press Inc., 2001, p. 39.

[4] Kendall, M. G. and Buckland, W. R., **A dictionary of Statistical terms**, Third Edition Revised and Enlarged, New York: Published for the International Statistical Institute, Hafner Pub. Co., 1971, p.64.

(Longitudinal data) المتمثلة بمشاهدات متكررة على طول الزمن الفعال التي يمكن أن تصاغ كعملية تصادفية [1]، ويختلف هذا النوع من البيانات عن أغلب أنواع البيانات الأخرى من حيث أنها يجب أن تأخذ بالحسبان الاعتمادية للاستجابة الحالية على الزمن الماضي.

يعد منحنى النمو الأسي المعدل واحداً من منحنيات النمو الأسية المشهورة، لكثرة استخدامه في تطبيقات واسعة، ويصف هذا المنحنى الاتجاه الذي يقول إن مقدار النمو ينخفض بنسبة ثابتة، وأن للمنحنى حداً أعلى لا يتجاوزه[2]، وصيغته العامة هي:

$$f(t) = \alpha + \lambda \theta^{t} \qquad (4)$$

حيث أن:

α : تمثل الحد الأعلى لحجم المجتمع (أو المفردة) بعد فترة من الزمن أي ($t \to \infty$).

λ : تمثل الحجم عند الزمن (0).

θ : تمثل معدل النمو النسبي (Relative Growth Rate) خلال الزمن (t).

يمتاز هذا المنحنى بأنه يناسب ظواهر النمو للمجتمعات التي لحجمها حد أعلى لا يتجاوزه ولكنه غير ملائم لتلك التي لها معدل نمو نسبي غير متناقص $(\theta > 1)$ ومقدار نمو غير ثابت. وقد استخدم هذا المنحنى في البحوث الحياتية وخاصة عن المجهريات ومعدلات الوفاة بسبب مرض معين وفيه من العيوب ما في سابقه[3].

تقدير معلمات نماذج الانحدار غير الخطية في حالة وجود الارتباط الذاتي باستخدام أسلوب بيز:

Using Bayesian Method to Estimate the Parameters of Nonlinear Regression Models with treatment Autocorrelation

إن النماذج غير الخطية هي نماذج معقدة ومتداخلة الأمر الذي جعل تحليلها وطرق تقدير معلماتها هي الأخرى معقدة وتتطلب جهد كبير للوقوف على الصعوبات والمعوقات التي تعمل على تعقيد العمل ضمن هذه النماذج ومحاولة تجاوزها أو معالجتها باستخدام الطرق الإحصائية الملائمة، وبشكلٍ عام يمكن أن تأخذ نماذج الانحدار غير الخطية الصيغة الآتية:

$$\underline{Y} = f(\underline{X}; \underline{\theta}) + \underline{\varepsilon} \qquad (5)$$

حيث أن: $\underline{X} = \left(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_k\right)'$ و $\underline{\theta} = \left(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p\right)$ و $\underline{\varepsilon}$: يمثل متجه الأخطاء العشوائية من مرتبة $(n \times 1)$.

وأن: $E(\underline{Y}) = f(\underline{X}; \underline{\theta})$

(1) Lindsey, J. K., **Applying Generalized Linear Models**, New York: Springer, Inc., 1997, p. 69.

(2) Croxton, F. E. and Cowden, D. J., **Applied General Statistical**, Third Edition, Englewood Cliffs; New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1967, p. 298.

(3) عماد عدنان العتر، **استخدام المحاكاة في دراسة طرق توفيق منحنيات النمو لبيانات مكررة مع تطبيق عملي**، رسالة ماجستير في الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد، 1988، ص15.

إذ افترضنا أن $[E(\underline{\varepsilon}) = \underline{0}]$. وتحت افتراض أن الأخطاء العشوائية غير مرتبطة وأن $[\mathrm{Var}(\underline{\varepsilon}) = \sigma^2 I_n]$ فيكون $[\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I_n)]$، من هنا فإن المشاهدة (i) للمتغير المعتمد يمكن أن تكتب كالآتي:

$$Y_i = f(\underline{X}_i ; \underline{\theta}) + \varepsilon_i \qquad (6)$$

ويمكن تسمية الدالة $f(\underline{X}_i ; \underline{\theta})$ بدالة الاستجابة غير الخطية (Nonlinear response function) إذ تكون غير خطية في المعلمات، ويعمد الكثير من الباحثين في أغلب الأحيان إلى عملية تحويل دوال الاستجابة غير الخطية إلى دوال خطية باستخدام بعض التحويلات الخاصة، ويمكن أن تتحول في أحيان كثيرة إلى دوال استجابة خطية بشكل جوهري[1].

بافتراض أن توزيع الأخطاء لنموذج الانحدار غير الخطي المتعدد (5) يتبع الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى (First Order Auto Correlation) أي أن:

$$\underline{\varepsilon} = \rho \underline{\varepsilon}_{-1} + \underline{e}$$

إذ أن عناصر $(\underline{e})$ تمثل متجه الأخطاء العشوائية التي تتوزع توزيعاً طبيعياً، وبشكل مستقل بوسط $(\underline{0})$ ومصفوفة تباين–تباين مشترك $(\sigma_e^2 I_n)$ وأن $\underline{\varepsilon}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ و $\underline{\varepsilon}'_{-1} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1})$ يمثلان متجهي الأخطاء المرتبطة، ومن مرتبة (n×1) وأن:

$$E\left(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}'\right) = \sigma_e^2 \Psi$$

إذ أن (Ψ) مصفوفة معرفة موجبة من مرتبة (n×n)

$$\Psi = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \rho \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \cdots & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

وأن (ρ) تمثل معلمة الارتباط الذاتي، ومن ثم فإن النموذج (5) يمكن إعادة كتابته بشكل عام باستخدام مفكوك سلسلة تايلور للدالة $f(\underline{X};\underline{\theta})$ واختصار هذا المفكوك عند المشتقة الأولى كما في الصيغة الآتية:

$$\underline{Y}^* = D\,\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \qquad (7)$$

ومن ثم يمكن إعادة صياغة النموذج (7) بوجود معلمة الارتباط الذاتي كالآتي:

$$\underline{Y}^* = \rho \underline{Y}^*_{-1} + (D - \rho D_{-1})\underline{\beta} + \underline{e} \qquad (8)$$

إذ أن $\underline{Y}^{*\prime} = (Y_1^*, Y_2^*, ..., Y_n^*)$ و $\underline{Y}^{*\prime}_{-1} = (Y_0^*, Y_1^*, ..., Y_{n-1}^*)$ يمثلان متجهي المشاهدات للمتغير المعتمد، ومن مرتبة (n x 1) ، و $\underline{\beta}' = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_p)$ يمثل متجه معلمات النموذج ومن مرتبة (p x 1) وأن:

---

(1) Kutner, M. N., Nachtsheim, C. J. and Neter, J., **Applied Linear Regression Models**, Fourth Edition, New York: McGraw-Hill Companies, 2004, pp. 513-514.

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \dots D_{1p} \\ D_{21} & D_{22} \dots D_{2p} \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} \dots D_{np} \end{bmatrix} \quad D_{-1} = \begin{bmatrix} D_{01} & D_{02} & \dots & D_{0p} \\ D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{(n-1)\times 1} & D_{(n-1)\times 2} & \dots & D_{(n-1)\times p} \end{bmatrix}$$

ولتقدير معلمات نموذج الانحدار المتعدد (8) وعن طريق تطبيق قاعدة (Jeffery) للمعلمات $(\underline{\beta})$ و (σ_e)[1][2]، وبافتراض أن كلاً من المعلمات $(\rho, \sigma_e, \underline{\beta})$ تتوزع بشكل مستقل الواحدة عن الأخرى، فإن دوال الكثافة الاحتمالية القبلية غير المعلوماتية لكل من المعلمات $(\text{Log}\,\sigma_e, \rho, \underline{\beta})$ التي ستُعتمد هنا ستأخذ الشكل الآتي[3]:

$$f(\underline{\beta}, \sigma_e) \propto \sigma_e^{-1} \tag{9}$$

$$f(\rho) \propto (1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{10}$$

إذ أن كل من $(\underline{\beta})$ و $(\text{Log}\sigma_e)$ تتوزع توزيعاً منتظماً ضمن المجال $(-\infty < \underline{\beta} < \infty)$ و $(0 < \sigma_e < \infty)$ و (ρ) لها دالة كثافة احتمالية بتوزيع بيتا (Beta) بالمعلمات (½, ½) ضمن المجال $(|\rho| > 1)$ أي أن هذا التوزيع القبلي غير المعلوماتي يُعتمد فقط عندما تكون دالة الارتباط الذاتي للأخطاء مستقرة.

ومن الصيغتين (8) و (10) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لكل من المعلمات $(\text{Log}\,\sigma_e, \rho, \underline{\beta})$ وهي:

$$f(\underline{\beta}, \sigma_e, \rho) \propto (1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}\ \sigma_e^{-1} \tag{11}$$

ودالة الإمكان ستأخذ الشكل الآتي[4]:

$$L(\underline{Y}^* / \underline{\beta}, \sigma_e, \rho) \propto \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_e^n}\ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[(\underline{W} - D^*\underline{\beta})'(\underline{W} - D^*\underline{\beta})\right]\right\} \tag{12}$$

إذ أن:

$$W = R\,\underline{Y}^*$$

$$D^* = R\,D$$

(1) Box, G. E. P. and Tiao, G. C. , **Bayesian Inference in Statistical Analysis**, Addison–Wesley Publishing Company, Inc., 1973, p.54.

(2) Zellner, A., **An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics**, John Wiley and Sons, Inc., 1971, p.44.

(3) Fomby, T. B. and Gurlkey, D. K., On Choosing the Optimal Level if Significance for the Durbin–Watson Test and the Bayesian Alternative, **Journal of Econometrics**, 1978, Vol.8, No.2, pp.203–213.

(4) Judje, G. G., Griffiths, W. E., Hill, R. C. and Lee, T. C., **Theory and Practice of Econometrics**, New York: John Wiley & Sons, 1980, p.181-186.

وأن (R) تمثل مصفوفة تحويل من مرتبة (n×n) معرفة كما يأتي:

$$R = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

وبضرب دالة الكثافة الاحتمالية القبلية (11) بدالة الإمكان (12) يتم الحصول على دالة الكثافة الاحتمالية البعدية المشتركة الآتية:

$$f\left(\underline{\beta}, \rho, \sigma_e / Y^*\right) \propto \frac{1}{\sigma_e^{n+1}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left(\underline{W} - D^*\underline{\beta}\right)'\left(\underline{W} - D^*\underline{\beta}\right)\right] \qquad (13)$$

وبإجراء عملية التكامل للدالة (13) بالنسبة إلى حدود (σ_e) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية البعدية المشتركة لـ (ρ, σ^2) وهي[1]:

$$f\left(\underline{\beta}, \rho / \underline{Y}^*\right) \propto (RSS)^{-\frac{n}{2}} \left[1 + \frac{\left(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}\right)' D^{*\prime} D^* \left(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}\right)}{RSS}\right]^{-\frac{n}{2}} \qquad (14)$$

إذ أن:

$$RSS = v\,\hat{\sigma}_e^2 = \left(\underline{W} - D^*\hat{\underline{\beta}}\right)'\left(\underline{W} - D^*\hat{\underline{\beta}}\right) \quad , \quad v = n - p$$

$$\hat{\underline{\beta}} = \left(D^{*\prime} D^*\right)^{-1} D^{*\prime}\,\underline{W}$$

والدالة $f\left(\underline{\beta} / \rho, \underline{Y}^*\right)$ في حالة افتراض (ρ) معلومة وبالاعتماد على الصيغة (14) يكون لها توزيع (t) متعدد المتغيرات (Multivariate Student t) بوسط $(\hat{\underline{\beta}})$ الذي يمثل تقدير بيز للمعلمات $(\underline{\beta})$ في حالة اعتماد دالة خسارة تربيعية.

يُستخرج تقدير معلمات نموذج الانحدار غير الخطي (5) عند التكرار الأول حسب الصيغة:

$$\hat{\underline{\theta}}^{(1)} = \underline{\theta}^{(0)} + \hat{\underline{\beta}}^{(0)} \qquad (15)$$

وتستمر عمليات التكرار بوضع $\left(\hat{\underline{\theta}}^{(1)}\right)$ بدلاً من $\left(\hat{\underline{\beta}}^{(0)}\right)$ حتى يتم الحصول على تقديرات متقاربة.

أما في حالة افتراض أن تكون المعلومات المتوافرة حول المعلمات المراد تقديرها متواضعة كالحدود الدنيا والعليا للمعلمات، ففي هذه الحالة يمكن أن نستخدم نفس قاعدة (Jeffery) ولكن بمجال مقيد للمعلمات بدلاً من أن يكون المجال من $(-\infty)$ إلى (∞) ومن ثم سيكون لدينا توزيع منتظم بقيود حول المعلمات، فتحت افتراض (p) من المعلمات وأن:

$$a_j < \beta_j < b_j \qquad , \qquad j = 1,2,\ldots,p$$

---

[1] Fomby, T. B. and Gurlkey, D. K., **Op. Cit**., pp.203–213.

إذ أن:

a_j : تمثل الحد الأدنى للمعلمة (β_j)

b_j : تمثل الحد الأعلى للمعلمة (β_j)

وباعتماد القيود أعلاه على دالة الكثافة الاحتمالية القبلية لمتجه المعلمات $(\underline{\beta})$، وبافتراض أن $(\text{Log}\,\sigma_e)$ تتوزع توزيعاً منتظماً ضمن المجال $(0<\sigma_e<\infty)$ و (ρ) لها دالة كثافة احتمالية بتوزيع بيتا (Beta)، وبشكل مستقل لكل معلمة عن الأخرى، يمكن ببساطة استخراج دالة الكثافة الاحتمالية القبلية المشتركة للمعلمات $(\underline{\beta},\sigma_e,\rho)$ وهي:

$$f(\underline{\beta},\sigma_e,\rho)\propto\frac{1}{\sigma}\quad,\quad \underline{a}<\underline{\beta}<\underline{b}\quad,\quad 0<\sigma<\infty \qquad (16)$$

وبضرب الصيغة (16) بدالة الإمكان الموضحة في الصيغة (12) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية البعدية المشتركة لـ $(\underline{\beta},\sigma)$ وهي:

$$f(\underline{\beta},\sigma_e,\rho/\underline{Y}^*)\propto\frac{1}{\sigma_e^{(n+1)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[v\hat{\sigma}_e^2+(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}})'D^{*\prime}D^*(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}})\right]\right\}\ ,\ \underline{a}<\underline{\beta}<\underline{b} \qquad (17)$$

$$0<\sigma_e<\infty$$

وبأخذ التكامل للصيغة (17) ولحدود المعلمة (σ_e) نحصل على التوزيع البعدي المشترك للمعلمات $(\underline{\beta},\rho)$:

$$f(\underline{\beta},\rho/\underline{Y}^*)\propto\left[v+(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}})'\frac{D^{*\prime}D^*}{\hat{\sigma}_e^2}(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}})\right]\quad,\quad \underline{a}<\underline{\beta}<\underline{b} \qquad (18)$$

والصيغة (18) وبافتراض أن (ρ) معلومة تمثل توزيع t متعدد المتغيرات المبتور (Truncated Multivariate t). وللحصول على تقدير بيز للمعلمات $(\underline{\beta})$ يجب الحصول على قيمة التوقع الرياضي لعناصر $(\underline{\beta})$ حسب الدالة الاحتمالية (18) وذلك باستخدام أسلوب التكاملات العددية لهذه الدالة[1].

ويمكن الحصول على تقدير بيز لمتجه المعلمات $(\underline{\theta})$ بالنسبة للنموذج غير الخطي المتعدد (5) حسب الصيغة (15)، ومن ثم القيام بعملية التكرار المشروحة سابقاً للوصول للتقديرات النهائية.

فضلاً عن كل ما تقدم افترض الباحثان (Cholton) و (Troskie)[2]، أن $(\underline{\beta})$ تمتلك توزيعاً طبيعياً مسبقاً متعدد المتغيرات كما في الصيغة الآتية:

$$f(\underline{\beta}/\sigma)=\frac{1}{\sigma^p}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(\underline{\beta}-\overline{\underline{\beta}})'Q^{-1}(\underline{\beta}-\overline{\underline{\beta}})\right]\right\}\quad,\quad -\infty<\underline{\beta}<\infty \qquad (19)$$

---

[1] Karris, S. T., **Numerical Analysis: Using MATLAB and Excel**, Third Edition, printed in the United States of America, Orchard publications, 2007, pp. 10.6-10.9

[2] Chalton, D. O. and Troskie, C. G., Multiple Regression with Autocorrelated Errors: Bayesian Analysis with Different Priors, **South African Statistical Journal**, Sunnyside, Pretoria, 1993, Vol.27, No.1, pp.51–62.

وأن (σ_e) لها توزيعاً قبلياً هو معكوس جاما كما في الصيغة الآتية:

$$f(\sigma) \propto \frac{1}{\sigma^{(a+1)}} \exp\left(\frac{-a\hat{\sigma}^2}{2\sigma^2}\right) \quad , \quad 0<\sigma<\infty \quad , \quad a>0 \qquad (20)$$

وأن (ρ) لها توزيعاً قبلياً هو بيتا، وكما موضح في الصيغة (10)، وبضرب التوزيعات الثلاثة يمكن الحصول على دالة الكثافة الاحتمالية القبلية المشتركة للمعلمات $(\rho, \sigma_e, \underline{\beta})$ ومن ثم ضربها بدالة الإمكان الموضحة في الصيغة (9) لنحصل على دالة الكثافة الاحتمالية البعدية المشتركة للمعلمات وهي:

$$f\left(\underline{\beta}, \rho, \sigma_e / \underline{Y}^*\right) \propto \frac{1}{\sigma^{(n+p+a+1)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[a\hat{\sigma}_e^2 + \left(\underline{W} - D^*\underline{\beta}\right)'\left(\underline{W} - D^*\underline{\beta}\right) + \left(\underline{\beta} - \underline{\bar{\beta}}\right)' Q^{-1}\left(\underline{\beta} - \underline{\bar{\beta}}\right)\right]\right\} \qquad (21)$$

إذ أن $\left(Q, a, \hat{\sigma}_e^2, \underline{\beta}\right)$ تعتمد على المعلومات المسبقة.

وبإجراء عملية التكامل للصيغة (21) بالنسبة لحدود (σ_e) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية البعدية المشتركة لكل من $(\rho, \underline{\beta})$ وهي:

$$f\left(\underline{\beta}, \rho / \underline{Y}^*\right) \propto \left[a\hat{\sigma}_e^2 + \left(\underline{W} - D^*\underline{\beta}\right)'\left(\underline{W} - D^*\underline{\beta}\right) + \left(\underline{\beta} - \underline{\bar{\beta}}\right)' Q^{-1}\left(\underline{\beta} - \underline{\bar{\beta}}\right)\right]^{\frac{-(n+p+a)}{2}} \qquad (22)$$

والصيغة الأخيرة (22) هي الأساس لتوزيع (t) المتعدد (Kernel of Multivariate – t)، وتحت افتراض أن (ρ) معلومة فإن تقدير بيز للمعلمات $(\underline{\beta})$ هو:

$$\underline{\hat{\beta}} = \left(D^{*'} D^* + Q^{-1}\right)^{-1}\left(Q^{-1}\underline{\bar{\beta}} + D^{*'}\underline{W}\right) \qquad (23)$$

الصيغة الأخيرة (23) تمثل مقدر بيز للمعلمات $(\underline{\beta})$ في حالة اعتماد دالة خسارة تربيعية، ومن ثم نحصل على التقدير للمعلمات $(\underline{\theta})$ الخاصة بالنموذج غير الخطي كما شُرح سابقاً باستخدام أسلوب التكرار.

وتقوم الحالة الأخيرة التي تمت دراستها في هذا البحث على أساس استخدام المعلومات التي نحصل عليها من التجارب السابقة فضلاً عن المعلومات التي نحصل عليها من العينة المخصوصة بالبحث، وبالأخذ بنظر الاعتبار معالجة مشكلة الارتباط الذاتي بين الأخطاء للتجارب المستخدمة، ويتم تسخير هذه المعلومات السابقة بعد صياغتها كدالة توزيع احتمالي قبلية معلوماتية مع المعلومات التي نحصل عليها من التجربة تحت البحث التي تكون بصيغة دالة الإمكان من أجل الحصول على توزيع ملائم يمكن من خلاله الحصول على مقدرات بيز للمعلمات المراد تقديرها، وإذا رمزنا لمشاهدات العينة من التجربة السابقة بـ $\left(\underline{Y}_1^*, D_1\right)$ ولحجم العينة السابقة بـ (n_1)، ولمشاهدات العينة من التجربة تحت البحث بـ $\left(\underline{Y}_2^*, D_2\right)$ ولحجم العينة تحت البحث (n_2)، تكون دالة الكثافة الاحتمالية البعدية للمعلمات $(\underline{\beta}, \sigma_1)$ كالآتي:

$$f\left(\underline{\beta}, \rho, \sigma_1 / \underline{Y}_1^*\right) \propto \frac{1}{\sigma_1^{(n+1)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left[v_1\hat{\sigma}_1^2 + \left(\underline{\beta} - \underline{\hat{\beta}}_1\right)' D_1' D_1\left(\underline{\beta} - \underline{\hat{\beta}}_1\right)\right]\right\} \qquad (24)$$

إذ أن: $v_1 = n_1 - p$

وأن الصيغة (24) تمثل دالة كثافة احتمالية قبلية لمعلمات العينة المدروسة التي لها دالة إمكان بمعلمات $\left(\underline{\beta}, \sigma_2\right)$ ومشاهدات $\left(\underline{Y}_2^*, D_2\right)$ وبالتالي فإن دالة الكثافة الاحتمالية البعدية المشتركة لمتجه المعلمات $(\underline{\beta})$ تعتمد على نوع العلاقة بين المعلمتين (σ_1) و (σ_2)، فتحت افتراض أن $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma)$ إذ اعتمدنا على تجربة سابقة واحدة فقط. وبالاعتماد على دالة التوزيع القبلي الموضح في الصيغة (21) للمعلمات $\left(\underline{\beta}, \rho, \sigma_1\right)$، يمكن الحصول على دالة الكثافة الاحتمالية البعدية المشتركة عن طريق ضرب دالة التوزيع القبلي بدالة الإمكان الأعظم الخاصة بمشاهدات العينة المدروسة كالآتي[1]:

$$f\left(\underline{\beta}, \rho, \sigma_e / \underline{y}_1^*, \underline{y}_2^*\right) \propto \frac{1}{\sigma_e^{(n_1+n_2+1)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[v_1\hat{\sigma}_{e_1}^2 + v_2\hat{\sigma}_{e_2}^2 + \left(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_1\right) D_1^{*\prime} D_1^* \left(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_1\right) \left(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_2\right) D_2^{*\prime} D_2^* \left(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_2\right)\right]\right\} \quad (25)$$

وبإجراء عملية التكامل للصيغة (25) بالنسبة لحدود (σ_e) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية البعدية المشتركة للمعلمات $(\rho, \underline{\beta})$ الآتية:

$$f\left(\underline{\beta}, \rho / \sigma_e, \underline{Y}_1^*, \underline{Y}_2^*\right) \propto \left[1 + \left(\underline{\beta} - \underline{E}\right)' \frac{B^*}{M} \left(\underline{\beta} - \underline{E}\right)\right]^{-\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)} \quad (26)$$

إذ أن:

$$\underline{E} = \left(D_1^{*\prime} D_1^* + D_2^{*\prime} D_2^*\right)^{-1} \left(D_1^{*\prime} \underline{W}_1 + D_2^{*\prime} \underline{W}_2\right) \quad (27)$$

$$\beta^* = D_1^{*\prime} D_1^* + D_2^{*\prime} D_2^* \quad (28)$$

$$M = \left(v_1\hat{\sigma}_{e_1}^2 + v_2\hat{\sigma}_{e_2}^2 + \hat{\underline{\beta}}_1' D_1^{*\prime} D_1^* \hat{\underline{\beta}}_1 + \hat{\underline{\beta}}_2' D_2^{*\prime} D_2^* \hat{\underline{\beta}}_2\right) - \underline{E}' B^* \underline{E} \quad (29)$$

الصيغة (26) تحت افتراض أن (ρ) معلومة يكون لها توزيع (t) متعدد المتغيرات بوسط $(\underline{E})$ الذي يمثل مقدر بيز للمعلمات $(\underline{\beta})$ في حالة اعتماد دالة خسارة تربيعية، ومن ثم نحصل على التقدير للمعلمات $(\underline{\theta})$ الخاصة بالنموذج غير الخطي، وباستخدام أسلوب التكرار المشروح سابقاً نصل إلى التقدير النهائي.

الجانب التجريبي

لإتمام هذا البحث والحصول على النتائج المطلوبة فقد استخُدمت لغة R التي تُعد من اللغات المتخصصة بمعالجة المخططات والمسائل الإحصائية المتقدمة وما يرتبط بها من مسائل أخرى[2]، حيث أُعد برنامج خاص

[1] Tiao, G. C. and Zellner, A., Bayese's Theorem and the use of prior Knowledge in Regression Analysis, **Biometrika**, Oxford University, printed in Great Britain, 1964, Vol.5, No.1 & 2, pp.219–230.
[2] Everitt, B. and Hothorn, T., **A Handbook of Statistical Analyses Using R**, CRC Press, 2006, p. 1.

للقيام بذلك، وقد تم توليد بيانات بحجم تكرار (500) تجربة تمثل الأخطاء العشوائية بالاعتماد على طريقة ميرسن – تويستر (Mersenne–Twister) لإجراء المحاكاة[1]، وتتوزع توزيعاً طبيعياً مع معاناتها من مشكلة وجود الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى وفق المعادلة $\varepsilon_i = \rho \varepsilon_{i-1} + e_i$، إذ وُلدت (e_i) على أساس أنها تتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي صفر وانحراف معياري يأخذ القيم (0.5, 2.5)، كما أن أحجام العينات المولدة هي (20) و (40) مشاهدة وبالاعتماد على منحنى نمو الجزيئي الواحد الموضح في المعادلة (3)[2]، ومنحنى النمو الأسي المعدل الموضح في المعادلة (4)[3]، فوُلّدت ثمان نماذج افتراضية كما موضح في الجدول (1) لتمثل هذا النموذج.

جدول (1)

القيم الافتراضية لمعلمات كل من نموذج نمو الجزيئي الواحد ونموذج النمو الأسي المعدل

Model		1	2	3	4	5	6	7	8
Monomolecular	α	456	456	456	456	457	457	457	457
	β	12	12	13	13	12	12	13	13
	k	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3
	σ^2	0.5	2.5	0.5	2.5	0.5	2.5	0.5	2.5
	ρ	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
Modified Exponential	α	14.1	14.1	14.1	14.1	14.5	14.5	14.5	14.5
	λ	3.2	3.2	3.5	3.5	3.2	3.2	3.5	3.5
	θ	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
	σ^2	0.5	2.5	0.5	2.5	0.5	2.5	0.5	2.5
	ρ	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9

المصدر: من إعداد الباحث.

ومن خلال كل عينة مولدة في أثناء تنفيذ تجربة المحاكاة ولكل نموذج من نماذج النمو الافتراضية المستخدمة قدرت معلمات كل نموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى العامة المعتمدة تقديراتها على معلومات العينة المولدة فقط وفي حالة وجود مشكلة الارتباط الذاتي، كذلك قدرت معلمات تلك النماذج باستخدام طرق بيز المختلفة التي تعتمد تقديراتها على معلومات العينة المولدة والمعلومات القبلية حول معلمات نماذج النمو المدروسة

Venables, W. N., Smith, D. M. and R. development Core Team, **An Introduction to R. Note on R: A program Environment for Date analysis and Graphics**, R. development Core Team, 1999-2006, p. 1, available at: http://cran.r-project.org/doc/manuals/R-intro.pdf. (Last access Jan 9,2009)

Ritz, C. and Streibig, J. C., **Nonlinear Regression With R**, Springer, 2008, pp.112-113.

(1) The R development Core Team, **R: A Language and Environment of Statistical Computing, Reference Index**, R Foundation for statistical computing, 1999-2009, pp. 1235-1236, available at: http://cran.r-project.org/doc/manual/fullrefman.pdf. (Last access Aug. 12,2009)

(2) اعتمدت القيم الأولية لمعلمات هذا النموذج على بيانات نمو نوع من أنواع العفن في النيجر بالاعتماد على المصدر:

Piegorsch, Walter W. and Bailer, A. John, **Analyzing Environmental Data**, Chichester, West Sussex; England: John Wiley & Sons, Ltd., 2005, p. 71.

(3) اعتمدت القيم الأولية لمعلمات هذا النموذج على بيانات نمو الدخل لإحدى الدول بالاعتماد على المصدر:

Grewal, P. S., **Methods of Statistical Analysis**, Second Edition Revised and Enlarged, New York: Sterling Publishers, 1990, pp. 602-603.

وفي حالة وجود مشكلة الارتباط الذاتي أيضاً، وفيما يلي عرض لتلك الطرق طبقاً لحالة المعلومات القبلية لمعلمات نماذج النمو.

- **المعلومات السابقة على شكل دالة قبلية معلوماتية:**

بالأخذ بنظر الاعتبار وجود مشكلة الارتباط الذاتي بين الأخطاء المتتالية، وتحت افتراض أن قيمة الارتباط معلومة، فإنه تم تحديد المعلمات بمتباينات تعرف كمعلومات قبلية يستفاد منها لتقدير معلمات نموذج النمو المخصوص في هذا البحث باستخدام طريقة بيز بالاعتماد على دالة قبلية معلوماتية[*]، حيث تُحدد الحدود العليا والدنيا لتلك المتباينات استناداً إلى فترة الثقة الموضحة في المعادلة (30) وبمستوى معنوية (α=0.05) للقيم الافتراضية للمعلمات حسب النموذج المستخدم وبالاعتماد على أحجام العينات المفترضة كافة.

$$C.I. = \beta_j \pm T_{(0.05,n-p)} . (\sigma_e^2 (D^{*'} D^*)^{-1})_{jj}^{\frac{1}{2}} \quad , \quad j = 1,2,...,p \qquad (30)$$

حيث أن (T) تمثل القيمة الجدولية لتوزيع (T) وحسب ما محدد من مستوى معنوية ودرجة حرية، وبقية الرموز تأخذ مسمياتها السابقة نفسها.

- **المعلومات السابقة على شكل دالة قبلية مرافقة طبيعية:**

اعتمدت كل من الدالة القبلية الطبيعية (19) لمتجه المعلمات $(\underline{\beta})$ والدالة القبلية (20) للمعلمة (σ_e)، والدالة القبلية (10) للمعلمة (ρ)، لتقدير معلمات نموذج النمو الأسي المعدل باستخدام طريقة بيز باعتماد دالة قبلية مرافقة طبيعية، علماً أن الدالة القبلية المرافقة الطبيعية الناتجة (22) تحدد فيها قيم المتجه $(\overline{\underline{\beta}})$ بالاعتماد على القيم الافتراضية لمعلمات المتجه $(\underline{\beta})$، أما قيم المصفوفة (Q) فتكون كالآتي:

$$\sigma_e^2 Q = \sigma_e^2 (D^{*'} D^*)^{-1}$$

وذلك للنماذج الافتراضية وأحجام العينات المفترضة كافة.

- **المعلومات السابقة على شكل تجارب سابقة:**

تولد عشر عينات نعدها عينات سابقة أثناء تنفيذ تجربة المحاكاة الخاصة بتوليد عينة التجربة الأصلية، والتي تُولد بوجود مشكلة الارتباط الذاتي بين الأخطاء المتتالية، وتستخدم العينات العشر المولدة لتقدير معلمات نموذج النمو المخصوص في هذا البحث باستخدام طريقة بيز بالاعتماد على دالة قبلية معتمدة على التجارب السابقة حسب المعادلة (26)، علماً أن توليد تلك العينات السابقة يتم بالاعتماد على القيم الافتراضية وذلك للنماذج الافتراضية وحجمي العينتين المفترضتين في البحث، وبالاعتماد على حالة عدم وجود مشكلة ارتباط ذاتي بين الأخطاء المتتالية بالنسبة لتلك العينات.

نتائج المحاكاة الخاصة بنموذج نمو الجزيئي الواحد:

[*] اعتُمدت المعادلة (18) كتوزيع بعدي مشترك لـ $(\underline{\beta}, \rho)$ وتحت افتراض أن قيمة المعلمة (ρ) معلومة.

لحجم تكرار قدره (500) تجربة لكل نموذج من نماذج النمو الافتراضية تمت مقارنة تقدير معلمات نموذج نمو الجزيئي الواحد في حالة وجود مشكلة الارتباط الذاتي باستخدام كل من طريقة المربعات الصغرى العامة والطرق البيزية، وبالاعتماد على الحالات المختلفة للمعلومات القبلية، وفيما يلي عرض لنتائج مجموعة من المقاييس المختلفة التي اعتمدت في هذا البحث للمقارنة بين نتائج التقديرات بحسب كل نوع من المعلومات القبلية والتي هي: معلوماتية (متباينات)، وتوزيع مرافق طبيعي (عندما تكون (σ^2) غير معلومة)، وتجارب سابقة.

ومن تقديرات المعلمات لنموذج نمو الجزيئي الواحد حُسبت الأوساط الحسابية والنتائج مبينة في الجدول (2) مقربة إلى أربع مراتب عشرية، حيث أن الرموز المستخدمة هي:

GLS: طريقة المربعات الصغرى العامة.

BNC: طريقة بيز باعتماد دالة قبلية مرافقة طبيعية مع معالجة مشكلة الارتباط الذاتي.

BS: طريقة بيز باعتماد دالة قبلية معتمدة على التجارب السابقة مع معالجة مشكلة الارتباط الذاتي.

BI: طريقة بيز باعتماد دالة قبلية معلوماتية مع معالجة مشكلة الارتباط الذاتي.

جدول (2)

الأوساط الحسابية لتقديرات المعلمات (α و β و k) لنموذج نمو الجزيئي الواحد في حالة وجود مشكلة الارتباط الذاتي

n		20				40			
Paramet	**Mod**	**GLS**	**BNC**	**BS**	**BI**	**GLS**	**BNC**	**BS**	**BI**
α	1	456.147	455.978	456.114	456.325	456.220	456.031	456.095	456.386
	2	456.744	455.898	456.573	457.626	455.267	453.648	456.362	456.102
	3	456.147	455.978	456.114	456.325	456.220	456.031	456.095	456.386
	4	456.744	455.898	456.573	457.626	456.078	454.499	456.594	456.912
	5	457.147	456.978	457.114	457.325	457.220	457.031	457.095	457.386
	6	457.744	456.898	457.573	458.626	457.078	455.499	457.594	457.912
	7	457.147	456.978	457.114	457.325	457.220	457.031	457.095	457.386
	8	457.744	456.898	457.573	458.626	456.601	455.362	457.395	457.374
β	1	11.9235	11.7854	12.0868	12.2349	12.1475	12.2067	12.0165	12.5469
	2	11.6059	10.9174	12.4345	13.1745	11.2098	10.2912	12.1694	12.8380
	3	12.9235	12.7854	13.0868	13.2349	13.1475	13.2067	13.0165	13.5469
	4	12.6058	11.9174	13.4345	14.1745	12.8492	12.3693	13.1721	14.4837
	5	11.9235	11.7854	12.0868	12.2349	12.1475	12.2067	12.0165	12.5469
	6	11.6059	10.9174	12.4345	13.1745	11.8492	11.3694	12.1721	13.4837
	7	12.9235	12.7854	13.0868	13.2349	13.1475	13.2067	13.0165	13.5469
	8	12.6059	11.9174	13.4345	14.1745	12.7103	12.4141	13.3047	14.5539
k	1	1.2996	1.3000	1.3005	1.3004	1.2979	1.2983	1.2994	1.2994
	2	1.2979	1.3002	1.3024	1.3022	1.2926	1.2929	1.2986	1.2975
	3	1.2996	1.3000	1.3005	1.3004	1.2979	1.2983	1.2994	1.2994
	4	1.2979	1.3002	1.3024	1.3022	1.2947	1.2983	1.2965	1.2994
	5	1.2996	1.3000	1.3005	1.3004	1.2979	1.2983	1.2994	1.2994
	6	1.2979	1.3002	1.3024	1.3022	1.2947	1.2983	1.2965	1.2994
	7	1.2996	1.3000	1.3005	1.3004	1.2979	1.2983	1.2994	1.2994
	8	1.2979	1.3002	1.3024	1.3022	1.2924	1.2927	1.2996	1.2989

المصدر: من إعداد الباحث.

وبخصوص معاملات الكفاءة النسبية لمتوسطات مربعات الخطأ لتقديرات المعلمات (α و β و k) بالنسبة لمتوسطات مربعات الخطأ لطريقة المربعات الصغرى العامة فقد بُينت في الجدول (3).

جدول (3)

معاملات الكفاءة النسبية لمتوسطات مربعات الخطأ لتقديرات المعلمات (α و β و k) بالنسبة لمتوسطات مربعات الخطأ لطريقة المربعات الصغرى العامة لنموذج نمو الجزيئي الواحد في حالة وجود مشكلة الارتباط الذاتي

N		20			40		
Parameter	**Model**	**BNC**	**BS**	**BI**	**BNC**	**BS**	**BI**
α	1	1.5589	0.3172	1.8015	0.7823	0.1395	1.3789
	2	1.5579	0.3167	1.8003	2.1590	0.1669	0.9290
	3	1.5589	0.3172	1.8015	0.7823	0.1395	1.3789
	4	1.5579	0.3167	1.8003	1.8344	0.2692	1.3022
	5	1.5589	0.3172	1.8015	0.7823	0.1395	1.3789
	6	1.5579	0.3167	1.8003	1.8344	0.2692	1.3022
	7	1.5589	0.3172	1.8015	0.7823	0.1395	1.3789
	8	1.5579	0.3167	1.8003	1.5506	0.1817	1.0630
β	1	1.0845	0.1583	0.8116	0.7239	0.0964	1.1329
	2	1.0854	0.1582	0.8107	0.8662	0.1005	0.7177
	3	1.0845	0.1583	0.8116	0.7239	0.0964	1.1329
	4	1.0854	0.1582	0.8107	0.7685	0.1028	0.8422
	5	1.0845	0.1583	0.8116	0.7239	0.0964	1.1329
	6	1.0854	0.1582	0.8107	0.7685	0.1028	0.8422
	7	1.0845	0.1583	0.8116	0.7239	0.0964	1.1329
	8	1.0854	0.1582	0.8107	0.6688	0.1069	0.8620
k	1	0.6479	0.1072	0.4326	0.5808	0.0865	0.5018
	2	0.6582	0.1084	0.4358	0.6059	0.0798	0.5260
	3	0.6479	0.1072	0.4326	0.5808	0.0865	0.5018
	4	0.6583	0.1084	0.4358	0.5721	0.0951	0.5192
	5	0.6479	0.1072	0.4326	0.5807	0.0865	0.5018
	6	0.6582	0.1084	0.4358	0.5720	0.0951	0.5191
	7	0.6479	0.1072	0.4326	0.5808	0.0865	0.5018
	8	0.6582	0.1084	0.4358	0.5949	0.0766	0.5105

المصدر: من إعداد الباحث.

نتائج المحاكاة الخاصة بنموذج النمو الأسي المعدل:

بالاعتماد على الأسلوب نفسه المستخدم سابقاً من هذا البحث تم الحصول على النتائج المطلوبة والتي تمثل مخرجات هذا البحث المعتمدة على نموذج النمو الأسي المعدل.

ومن تقديرات المعلمات لنموذج النمو الأسي المعدل حسبت الأوساط الحسابية والنتائج مبينة في الجدول (4) مقربة إلى أربع مراتب عشرية، والرموز المستخدمة تأخذ مسمياتها السابقة نفسها.

جدول (4)

الأوساط الحسابية لتقديرات المعلمات (α و λ و θ) لنموذج النمو الأسي المعدل في حالة وجود مشكلة الارتباط الذاتي

n		20				40			
Parameter	**Model**	**GLS**	**BNC**	**BS**	**BI**	**GLS**	**BNC**	**BS**	**BI**
α	1	13.9595	13.6061	14.2722	14.0899	14.3674	14.2199	14.2066	14.4920
	2	13.6341	12.5613	14.7688	14.2683	13.5210	12.7292	14.3383	13.7876
	3	13.9609	13.6069	14.2720	14.0849	14.3674	14.2199	14.2066	14.4927
	4	14.8789	14.0242	14.4684	15.2867	13.5809	12.8613	14.3406	13.8295
	5	14.3595	14.0061	14.6722	14.4899	14.7674	14.6199	14.6066	14.8920
	6	14.2610	13.0673	15.0382	14.9050	14.4818	13.8976	14.6960	14.7341
	7	14.3609	14.0069	14.672 0	14.4849	14.7674	14.6199	14.6066	14.8927
	8	14.3035	13.2410	14.4874	15.0575	14.8652	14.5636	14.7214	15.1222
λ	1	3.2282	3.2881	3.1328	3.1851	3.1989	3.1986	3.1997	3.1961
	2	3.4217	3.6917	2.9223	3.1617	3.2118	3.2254	3.1936	3.2069
	3	3.5271	3.5875	3.4330	3.4854	3.4989	3.4986	3.4997	3.4961
	4	3.4024	3.6337	3.3620	3.2427	3.5082	3.5210	3.4956	3.5047
	5	3.2282	3.2881	3.1328	3.1851	3.1989	3.1986	3.1997	3.1961
	6	3.3743	3.7736	3.0371	3.1105	3.2038	3.2159	3.1971	3.1996
	7	3.5271	3.5875	3.4330	3.4854	3.4989	3.4986	3.4997	3.4961
	8	3.6476	3.9465	3.5495	3.3010	3.5002	3.5053	3.4979	3.4960
Θ	1	1.1999	1.1989	1.2012	1.2005	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000
	2	1.1984	1.1930	1.2046	1.2001	1.1999	1.1998	1.2001	1.1999
	3	1.1999	1.1990	1.2011	1.2004	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000
	4	1.2064	1.2012	1.2022	1.2043	1.1999	1.1998	1.2000	1.2000
	5	1.1999	1.1989	1.2012	1.2005	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000
	6	1.1993	1.1911	1.2024	1.2008	1.2000	1.1999	1.2000	1.2000
	7	1.1999	1.1990	1.2011	1.2004	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000
	8	1.2017	1.1964	1.1993	1.2038	1.2000	1.1999	1.2000	1.2000

المصدر: من إعداد الباحث.

وبخصوص معاملات الكفاءة النسبية لمتوسطات مربعات الخطأ لتقديرات المعلمات (α و λ و θ) بالنسبة لمتوسطات مربعات الخطأ لطريقة المربعات الصغرى العامة فقد بُينت في الجدول (5).

جدول (5)

معاملات الكفاءة النسبية لمتوسطات مربعات الخطأ لتقديرات المعلمات (α و λ و θ) بالنسبة لمتوسطات مربعات الخطأ لطريقة المربعات الصغرى العامة لنموذج النمو الأسي المعدل في حالة وجود مشكلة الارتباط الذاتي

n		20			40		
Parameter	**Model**	**BNC**	**BS**	**BI**	**BNC**	**BS**	**BI**
α	1	4.9242	0.7204	0.8408	1.4312	0.1760	1.3392
	2	2.6757	0.8683	0.7813	1.8160	0.1306	0.7028
	3	4.8847	0.6883	0.8268	1.4316	0.1760	1.3412
	4	2.1544	0.6044	1.0698	1.6156	0.1307	0.7132
	5	4.9242	0.7204	0.8408	1.4312	0.1760	1.3392
	6	3.2878	0.9507	0.9418	1.2397	0.1740	0.8884
	7	4.8847	0.6883	0.8268	1.4316	0.1760	1.3412
	8	3.0607	0.7598	0.8778	0.7135	0.1622	1.0836
λ	1	3.2021	0.6267	0.6572	1.1614	0.1059	0.8054
	2	3.1604	0.8552	0.5781	1.1731	0.1309	0.7860
	3	3.1440	0.6004	0.6345	1.1615	0.1059	0.8062
	4	3.4520	0.7683	0.9479	1.0314	0.1164	0.8238
	5	3.2021	0.6267	0.6572	1.1614	0.1059	0.8054
	6	4.1545	0.8553	0.6653	1.0765	0.1330	0.8545
	7	3.1440	0.6004	0.6345	1.1615	0.1059	0.8062
	8	4.4213	0.7393	0.7281	0.7804	0.1308	0.8962
θ	1	2.4920	0.5578	0.6623	1.1117	0.1007	0.8028
	2	1.7466	0.7663	0.6076	1.1097	0.1338	0.7913
	3	2.4753	0.5354	0.6417	1.1120	0.1007	0.8034
	4	1.3701	0.4595	0.6114	1.0051	0.1147	0.8253
	5	2.4920	0.5578	0.6623	1.1117	0.1007	0.8028
	6	2.1858	0.7900	0.7113	1.0157	0.1327	0.8592
	7	2.4753	0.5354	0.6417	1.1120	0.1007	0.8034
	8	1.5371	0.5606	0.7531	0.7749	0.1285	0.8915

المصدر: من إعداد الباحث.

الاستنتاجات:

(1) لأغلب النماذج ولحجمي العينتين المفترضتين قد ظهرت تقديرات المعلمات باستخدام طريقة بيز باعتماد دالة قبلية مرافقة طبيعية معاملات كفاءة نسبية أكبر من الواحد بكثير أي أن طريقة المربعات الصغرى العامة هي الأكفأ.

(2) للنماذج كافة ولحجمي العينتين المفترضتين: أظهرت تقديرات المعلمات باستخدام طريقة بيز باعتماد دالة قبلية معتمدة على التجارب السابقة معاملات كفاءة نسبية أقل من الواحد بكثير.

(3) بشكلٍ عام ولأغلب النماذج لحجمي العينتين المفترضتين قد أظهرت تقديرات المعلمات باستخدام طريقة بيز باعتماد دالة قبلية معلوماتية معاملات كفاءة نسبية أقل من الواحد بكثير.

(4) للنماذج كافة نلاحظ أن معاملات الكفاءة النسبية تقل كلما زاد حجم العينة وذلك لطريقة بيز المعتمدة على الدالة القبلية المرافقة الطبيعية أو الدالة القبلية المعتمدة على التجارب السابقة.

المصادر

ظافر عاصم الدباغ، مقارنة تقديرات الإمكان الأعظم غير الأكيدة مع بعض طرق التقدير الأخرى مع بعض التطبيقات، رسالة ماجستير في الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد، 1992.

عماد عدنان العتر، استخدام المحاكاة في دراسة طرق توفيق منحنيات النمو لبيانات مكررة مع تطبيق عملي، رسالة ماجستير في الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد، 1988.

Box, G. E. P. and Tiao, G. C. , Bayesian Inference in Statistical Analysis, Addison–Wesley Publishing Company, Inc., 1973.

Chalton, D. O. and Troskie, C. G., Multiple Regression with Autocorrelated Errors: Bayesian Analysis with Different Priors, South African Statistical Journal, Sunnyside, Pretoria, 1993, Vol.27, No.1, pp.51–62.

Croxton, F. E. and Cowden, D. J., Applied General Statistical, Third Edition, Englewood Cliffs; New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1967.

Everitt, B. and Hothorn, T., A Handbook of Statistical Analyses Using R, CRC Press, 2006.

Fomby, T. B. and Gurlkey, D. K., On Choosing the Optimal Level if Significance for the Durbin–Watson Test and the Bayesian Alternative, Journal of Econometrics, 1978, Vol.8, No.2, pp.203–213.

Grewal, P. S., Methods of Statistical Analysis, Second Edition Revised and Enlarged, New York: Sterling Publishers, 1990.

Judje, G. G., Griffiths, W. E., Hill, R. C. and Lee, T. C., Theory and Practice of Econometrics, New York: John Wiley & Sons, 1980.

Karris, S. T., Numerical Analysis: Using MATLAB and Excel, Third Edition, printed in the United States of America, Orchard publications, 2007.

Kendall, M. G. and Buckland, W. R., A dictionary of Statistical terms, Third Edition Revised and Enlarged, New York: Published for the International Statistical Institute, Hafner Pub. Co., 1971.

Kutner, M. N., Nachtsheim, C. J. and Neter, J., Applied Linear Regression Models, Fourth Edition, New York: McGraw-Hill Companies, 2004.

Lindsey, J. K., Applying Generalized Linear Models, New York: Springer, Inc., 1997.

-----------------, Nonlinear Models in Medical Statistics, First published, Oxford; New York: published in United States by Oxford university press Inc., 2001.

Piegorsch, Walter W. and Bailer, A. John, Analyzing Environmental Data, Chichester, West Sussex; England: John Wiley & Sons, Ltd., 2005.

Ritz, C. and Streibig, J. C., Nonlinear Regression With R, Springer, 2008.

Seber, G. A. F. and Wild, C. J., Non Linear Regression, New York: John Wiley & Sons, 1989.

The R development Core Team, R: A Language and Environment of Statistical Computing, Reference Index, R Foundation for statistical computing, 1999-2009, available at: http://cran.r-project.org/doc/manual/fullrefman.pdf. (Last access Aug. 12, 2009)

Tiao, G. C. and Zellner, A., Bayese's Theorem and the use of prior Knowledge in Regression Analysis, Biometrika, Oxford University, printed in Great Britain, 1964, Vol.5, No.1 & 2, pp.219–230.

Venables, W. N., Smith, D. M. and R. development Core Team, An Introduction to R. Note on R: A program Environment for Date analysis and Graphics, R. development Core Team, 1999-2006, available at: http://cran.r-project.org/doc/manuals/R-intro.pdf. (Last access Jan 9,2009)

Zellner, A., An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics, John Wiley and Sons, Inc., 1971.