مقارنة تقديرات دالة المعولية لتوزيع باريتو من النوع الاول باستخدام اربع طرق للتقدير

الاستاذ المساعد الدكتور حازم منصور كوركيس
جامعة بغداد/ كلية التربية- ابن الهيثم

المدرس المساعد بشرى سويدان ناصر
الجامعة التقنية الوسطى/ المعهد الطبي التقني

المستخلص:

في هذا البحث تم تقدير دالة المعولية لتوزيع باريتو من النوع الاول باستخدام اربع طرق تقدير باستخدام المحاكاه بطريقة مونت كارلو للمقارنة بين طرائق التقدير الاربعة، وهي طريقة الامكان الاعظم، طريقة العزوم، طريقة المتوسط وطريقة بيز القياسية للحصول على افضل طريقة لتقدير دالة المعولية.

وقد توصل الباحثان الى افضلية طريقة بيز القياسية في تقدير دالة المعولية لتوزيع باريتو مقارنة مع باقي طرائق التقدير.

Abstract:

This research paper studied the estimation of reliability function of the first type of Pareto distribution . This was done through using Monte Carlo simulation method to compare the four methods of estimation. These methods are : Maximum Likelihood Estimation , Moments Method, Average Method and standard Bayes Method in order to get the best way for the estimation of Reliability function.

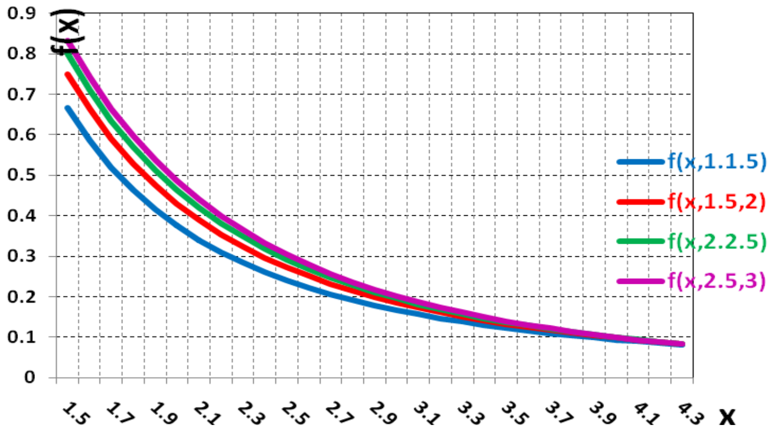
The researchers found that Standard Bayes Method is the most favorable way in estimating the Reliability Function of Pareto Distribution than the three other methods.

الجانب النظري:

لتكن X1,X2, …,Xn عينة عشوائية لمجتمع احصائي يتبع توزيع باريتو له دالة كثافة احتمالية pdf: [1],[8]

$$f(x;\alpha,c)=\begin{cases}\dfrac{\alpha c^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & ,x\ge c \quad ,c>0,\ \alpha>0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث يمثل α معلمة الشكل فيما يمثل c معلمة القياس لتوزيع باريتو، والمخطط (1) يمثل pdf لتوزيع باريتو:



شكل رقم (1):pdf's لتوزيع باريتو

غالبا ما يستخدم توزيع باريتو كنموذج لدراسة توزيع الدخل، وله دالة كثافة تجميعية التالية[8]:

$$F(x;\alpha,c)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{c}{x}\right)^{\alpha} & ,x\ge c \quad ,c>0,\ \alpha>0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

دالة المعولية:

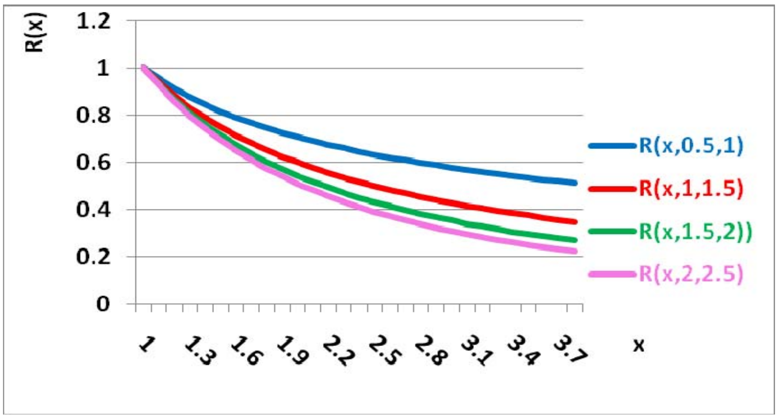
دالة المعولية لتوزيع احصائي من الممكن ايجادها من خلال العلاقة[6][5]:

$$R(x) = \int_x^\infty f(u)du = 1 - F(x)$$

وبالنسبة لتوزيع باريتو فمن خلال معادلة (2) نجد دالة المعولية:

$$R(x) = 1 - \left[1 - \left(\frac{c}{x}\right)^\alpha\right]$$

$$R(x) = \left(\frac{c}{x}\right)^\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$



شكل رقم (2): دالة المعولية لتوزيع باريتو

التباين ومتوسط المجتمع:

$$E(x) = \frac{\alpha c}{\alpha - 1}$$

البرهان:

$$E(x) = \int_c^\infty x \frac{\alpha c^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx$$

$$= \alpha c^\alpha \int_c^\infty x^{-\alpha} dx$$

$$= \alpha c^\alpha \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_c^\infty$$

$$= \alpha c^\alpha \left[0 - \frac{c^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]$$

$$E(x) = \frac{\alpha c}{\alpha - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$Var(x)=\frac{c^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

البرهان::

$$E(x^2)=\int_c^\infty x^2\frac{\alpha c^\alpha}{x^{\alpha+1}}dx$$

$$=\alpha c^\alpha\int_c^\infty x^{-\alpha+1}dx$$

$$=\alpha c^\alpha\left[\frac{x^{-\alpha+2}}{-\alpha+2}\right]_c^\infty$$

$$=\alpha c^\alpha\left[0-\frac{c^{-\alpha+2}}{-\alpha+2}\right]$$

$$E(x^2)=\frac{\alpha c^2}{\alpha-2}\quad\ldots\ldots(5)$$

$$\operatorname{var}(x)=E(x^2)-(E(x))^2$$

$$=\frac{\alpha c^2}{\alpha-2}-\frac{\alpha^2c^2}{(\alpha-1)^2}$$

$$=\frac{\alpha c^2(\alpha-1)^2-\alpha^2c^2(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$$

$$=\frac{\alpha^3c^2-2\alpha^2c^2+\alpha c^2-\alpha^3c^2+2\alpha^2c^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

$$Var(x)=\frac{c^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}\quad\ldots\ldots(6)$$

الوسيط: Median (Md)

الوسيط للتوزيع الاحصائي يمكن تعريفه بانه القيمة التي تكون عدد القيم يمينها تساوي عدد القيم يسارها ويمكن تعريفها ايضا من خلال العلاقة $F(x)=\mathrm{pr}(X\le x)=\frac{1}{2}$ حيث x قيمة لمتغير عشوائي X ولتوزيع باريتو فإن المتوسط هو $x_{md}=c\sqrt[\alpha]{2}$.

$$F(X)=\frac{1}{2}$$

$$1-\left(\frac{c}{x}\right)^\alpha=\frac{1}{2}$$

$$-\left(\frac{c}{x}\right)^\alpha=\frac{1}{2}-1\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{c}{x}\right)^\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\frac{c}{x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \Rightarrow \quad x_{md}=c\sqrt[\alpha]{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

طرق التقدير:

قبل ان نقوم بتقدير دالة المعولية يجب تقدير معلمات توزيع باريتو حيث تم تقدير معلمة الشكل باستخدام اربع طرق تقدير وعلى فرض ان معلمة القياس $\hat{c}$ ثابتة لطرق التقير الاربعة:

$$\hat{c}=\min\{x_1,x_2,\ldots,x_n\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

ثم بعد ذلك ايجاد دالة المعولية حيث استخدمت طرق التقدير التالية:

1. طريقة الامكان الاعظم (MLE):[2]

فاذا كان لدينا عينة عشوائية $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تتوزع توزيع باريتو من النوع الاول بمعلمة قياس c ، ومعلمة شكل α اذ ان $c>0,\ \alpha>0$ ،فأن مقدر الامكان الاعظم MLE هو الذي يجعل دالة الامكان في نهايتها العظمى ويمكن الحصول عليها باشتقاق اللوغارتم الطبيعي لدالة الامكان الاعظم ومساواتها بالصفر :

$$L(X_1,X_2,\cdots,X_n,C,\alpha)=\frac{\alpha C^{\alpha}}{x_1^{\alpha+1}}\cdot\frac{\alpha C^{\alpha}}{x_2^{\alpha+1}}\cdots\frac{\alpha C^{\alpha}}{x_n^{\alpha+1}}$$

$$L(X_i;C,\alpha)=\frac{\alpha^n C^{n\alpha}}{\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha+1}} \qquad (X=X_1,X_2,\ldots,X_n)$$

وباخذ اللوغارتم للطرفين نحصل على:

$$\ln(L)=n\ln\alpha+n\alpha\ln C-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

وبالاشتقاق الجزئي بالنسبة لمعلمة الشكل α حيث قيمة معلمة القياس ثابتة حسب معادلة (8):

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}+n\ln C-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)=0\ at\ \alpha=\hat{\alpha},c=\hat{c}$$

وبمساواة ناتج الاشتقاق بالصفر نحصل على:

$$\frac{n}{\alpha}+n\ln C-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)=0$$

$$\frac{n}{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)-n\ln C$$

$$\hat{\alpha}_{MLE}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)-n\ln C}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

من معادلة رقم (3) و (9) نجد مقدر المعولية:

$$\hat{R}(x)=\left(\frac{x_{(1)}}{x}\right)^{\hat{\alpha}_{MLE}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

2. طريقة العزوم (MOM): [7]

تعتمد طريقة العزوم على الوسط الحسابي للعينة (sample mean) حيث يتم مساواة عزم العينة بالوسط الحسابي $\overline{X}$ من خلال معادلة (4) نحصل على:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum x_i$$

$$E(x) = \overline{X}$$

$$\frac{\alpha\hat{c}}{\alpha - 1} = \overline{X}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\overline{X}}{\overline{X} - \hat{c}} \qquad \cdots\cdots\cdots (11.a)$$

وبتقدير معلمة القياس بالقيمة المرتبة الاولى من البيانات $\hat{c} = x_{(1)}$ تصبح المعادلة (11. a) تصبح المعادلة على النحو التالي:

$$\hat{\alpha}_{MOM} = \frac{\overline{X}}{\overline{X} - x_{(1)}} \qquad \cdots\cdots\cdots (11.b)$$

من معادلة (3) و (11.b) نحصل على دالة المعولية المقدرة:

$$\hat{R}(x) = \left(\frac{x_{(1)}}{x}\right)^{\hat{\alpha}_{MOM}} \qquad \cdots\cdots\cdots (12)$$

3. طريقة الوسيط (MED):[3]

تعتمد هذه الطريقة على مساواة وسيط العينة مع وسيط دالة توزيع باريتو، حسب معادلة (7):

$$x_{md} = \hat{c}\sqrt[\alpha]{2}$$

نعوض معادلة (8) في معادلة (7) نحصل على:

$$x_{md} = x_{(1)}\sqrt[\alpha]{2}$$

باخذ اللوغاريتم الطبيعي لجهتي المعادلة نحصل على:

$$\ln x_{md} = \ln x_{(1)} + \frac{1}{\alpha}\ln 2$$

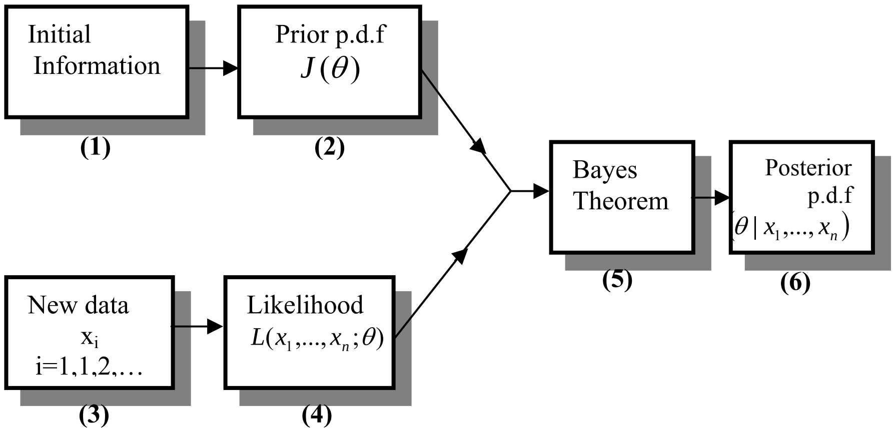
$$\ln\frac{x_{md}}{x_{(1)}} = \frac{1}{\alpha}\ln 2$$

$$\hat{\alpha}_{MED} = \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{x_{md}}{x_{(1)}}\right)} \cdots\cdots\cdots (13)$$

$$\hat{R}(x)=\left(\frac{x_{(1)}}{x}\right)^{\hat{\alpha}_{MED}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

4. طريقة بيز القياسية (BM):[4]

يعتمد اسلوب بيز للتقدير على فرضية توفر معلومات مسبقة (Prior Information) عن المعالم غير المعروفة على اعتبار ان هذه المعالم هي متغيرات عشوائية (Random Variables)، حيث يتم صياغتها بشكل توزيع احتمالي يعرف بدالة الكثافة الاحتمالية السابقة (Prior p.d.f) كذلك تعتمد بيز على دالة الامكان الاعظم (Likelihood Function) المتعلقة بالمشاهدات حيث يتم دمج دالة كثافة الاحتماية للمعالم $J(\theta)$ بدالة الامكان الاعظم $L(x_1,\ldots,x_n;\theta)$ والمخطط التالي يوضح مفهوم بيز:



$$h(\theta \mid x_1,\ldots,x_n) \propto L(x_1,\ldots,x_n;\theta)J(\theta)$$
$$h(\theta \mid x_1,\ldots,x_n) = kL(x_1,\ldots,x_n;\theta)J(\theta)$$
$$k^{-1}=\int_{\forall\theta} L(x_1,\ldots,x_n;\theta)J(\theta)d\theta$$
$$\hat{\theta}_B = E(\theta \mid x_1,\ldots,x_n)$$

في حالة توزيع باريتو باستخدام المعلومات المسبقة بالاعتماد على طريقة جفري Jeffrey method

$$J_1(\alpha) \propto \frac{1}{\alpha^s} \quad , \alpha > 0$$
$$J_2(c) \propto \frac{1}{c^r} \quad , c > 0$$
$$J(\alpha,c) \propto J_1(\alpha)\cdot J_2(c)$$

حيث $J_1(\alpha)$ هو دالة كتافة الاحتمالية المسبقة p.d.f للمعلمة α و $J_2(c)$ هو دالة كثافة الاحتمالية المسبقة c

$$J(\alpha,c) \propto \frac{1}{\alpha^s c^r}$$

لتكن $x_1, x_2 \ldots, x_n$ عينة عشوائية تتبع توزيع باريتو من النوع الاول (ذو المعلمتين)، فان دالة الامكان الاعظم هي:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha, c) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \alpha, c)$$

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha, c) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha c^{\alpha}}{x_i^{\alpha+1}}$$

$$h(\alpha, c \mid x_1, \ldots, x_n) \propto \frac{1}{\alpha^s c^r} \cdot \frac{\alpha^n c^{n\alpha}}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha+1}}$$

$$h(\alpha, c \mid x_1, \ldots, x_n) \propto \alpha^{n-s} c^{n\alpha - r} \exp\left[-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right]$$

نفرض r=1

$$h(\alpha, c \mid x_1, \ldots, x_n) = k\ \alpha^{n-s} c^{n\alpha-1} \exp\left[-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right]$$

$$k^{-1} = \int_0^{\infty}\int_0^{x_{(1)}} \alpha^{n-s} c^{n\alpha-1} \exp\left[-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right] dc\, d\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

$$= \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right) \int_0^{\infty} \frac{c^{n\alpha}}{n\alpha} \alpha^{n-s} \exp\left(-\alpha \sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right) d\alpha$$

بالتعويض عن $\hat{c} = x_{(1)}$ نحصل على التالي:

$$= \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right) \int_0^{\infty} \alpha^{n-s} \frac{x_{(1)}^{n\alpha}}{n\alpha} \exp\left(-\alpha \sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right) d\alpha$$

$$= \frac{\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)}{n} \int_0^{\infty} \alpha^{n-s-1} \exp\left[-\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - n \ln x_{(1)}\right)\right] d\alpha$$

$$= \frac{\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)}{n} \int_0^{\infty} \alpha^{n-s-1} \exp\left[-\alpha \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{x_{(1)}}\right)\right] d\alpha$$

$$k^{-1} = \frac{\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)}{n} \frac{\Gamma(n-s)}{\left[\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{x_{(1)}}\right)\right]^{n-1}}$$

حيث $\Gamma(n-s)$ تمثل دالة كاما.

$$k = \frac{n}{\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)} \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{x_{(1)}}\right)\right]^{n-1}}{\Gamma(n-s)}$$

$$h(\alpha, c \mid X_1, ..., X_n) = \frac{n\alpha^{n-s} c^{n\alpha-1} \exp\left(-\alpha \sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)}{\Gamma(n-s)\left[\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{x_{(1)}}\right)\right]^{-(n-s)}}, \quad 0 < \mathrm{c} < \mathrm{x}_{(1)} < \mathrm{x} < \infty, \alpha > 0$$

$$M\left(\alpha \mid X_1, ..., X_n\right) = \int_c h(\alpha, c \mid X_1, ..., X_n) dc$$

$$M\left(\alpha \mid X_1, ..., X_n\right) = \frac{\alpha^{n-s-1} e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}}{\Gamma(n-s)\left[\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{c}\right)\right]^{n-s}}$$

نفرض دالة الخسارة هي دالة الخسارة التربيعية، لذلك فان مقدر بيز لمعلمة الشكل α هو الوسط الحسابي للتوزيع اللاحق:

$$\hat{\alpha} = E\left(\frac{\alpha}{x}\right) = \frac{n-s}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{c}\right)}$$

في حالة فرض s=0 فان مقدر بيز $\hat{\alpha}$ هو دالة الامكان الاعظم، وفي حالة s=2 فان مقدر بيز $\hat{\alpha}$ هو minimum variance unbiased estimator (MVUE).[9]

$$\hat{\alpha}_{BM} = \frac{n-2}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{c}\right)} \quad \cdots\cdots\cdots (16)$$

$$R(x) = \left(\frac{x_{(1)}}{x}\right)^{\alpha_{B.M}} \quad \cdots\cdots\cdots (17)$$

الجانب التجريبي:

تم الاعتماد على اسلوب المحاكاة في توليد الارقام العشوائية التي تتبع توزيع باريتو وذلك باستخدام اسلوب محاكاة مونت – كارلو، حيث يوفر اسلوب المحاكاة الوقت والجهد والتكاليف المادية عن طريق ايجاد مجتمع نظري افتراضي يحاكي المجتمع الحقيقي، تمتاز هذه الطريقة بالمرونة حيث يكون من السهل على الباحث تكرار العملية مرات عديدة من خلال التجريب لاختبار البيانات العشوائية.

وتتم عملية المحاكاة من خلال تكوين خوارمية تتبع الخطوات التالية:

1- توليد الارقام العشوائية U التي تتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة $(0,1)$.

2- استخدام معكوس الدالة لغرض تحويل الارقام العشوائية المولدة الى متغيرات عشوائية تتبع التوزيع قيد البحث او الدراسة، حيث نجد معكوس الدالة من خلال العلاقة $U = F(X)$ حيث $X = F^{-1}(U)$

3- الحصول على متغيرات تتبع دالة كثافة الاحتمالية للتوزيع قيد الدراسة.

4- التوقف.

ففي حالة توزيع باريتو من النوع الاول حيث الة كثافته ودالة توزيعه الاحتمالي هما:

$$f(x;\alpha,c) = \begin{cases} \dfrac{\alpha c^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & , x \geq c \quad , c>0, \alpha>0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F(x;\alpha,c) = P(X \leq x)$$

$$= \int_{c}^{x} f(u)du$$

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

$$F(x) = 1-(\frac{c}{x})^{\alpha}$$

ليكن $F(X) = U$ فان:

$$(\frac{c}{x}) = (1-U)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$x = \frac{c}{(1-U)^{1/\alpha}} \qquad 0<U<1$$

نتائج التقدير:

تم في هذا البحث تقدير قيم معلمتي توزيع باريتو حيث تم اعتماد قيمة $\alpha=3$ و $c=1$ ثم تقدير المعولية بالاعتماد على قيم المعالم المقدرة (α، c) باستخدام طرق التقدير الاربعة المستخدمة في هذا البحث، تم افتراض 10 عينات باحجام صغيرة وكبيرة وهي 5، 10، 20، 30، 50، 75، 100، 250، 500، 1000 وبتكرار لكل تجربة L=1000 مرة. تم المقارنة بين طرائق التقدير باستخدام مقياس متوسط مربع الخطأ (MSE Mean Square Error).

$$MSE(\hat{R}(t))=\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left(\hat{R}_i(t)-R(t)\right)^2;\quad i=1,2,3,\ldots$$

حيث تمثل L عدد تكرارات (Replications) لكل تجربة و $\hat{R}(t)$ تمثل القيمة المقدرة لدالة المعولية R(t) دالة المعولية الحقيقية.

جدول (1): تقديرات المعولية لاربع طرق عندما تكون العينة n=5

n	ti	Real R(t)	MED	MLE	MOM	BM
5	1.1	0.75132	0.8385	0.8787	0.877	0.9254
	1.3	0.45517	0.2754	0.38818	0.38255	0.56679
	1.5	0.296296	0.10612	0.19279	0.18796	0.37245
	1.7	0.2035	0.04608	0.10453	0.10095	0.25797
	1.9	0.1458	0.02196	0.06068	0.05811	0.18613
	2.1	0.108	0.01127	0.03719	0.03535	0.13877
	2.3	0.0822	0.00615	0.02384	0.0225	0.10626
	2.5	0.064	0.00353	0.01585	0.01487	0.08319
	2.7	0.0508	0.00211	0.01088	0.01015	0.06638
	2.9	0.041	0.00131	0.00767	0.00712	0.05382

جدول (2): متوسط مربعات الخطأ لدالة المعولة عندما n=5

n	MED	MLE	MOM	BM	Best
5	0.0076	0.0162	0.0158	0.03	M.E.D
	0.0323	0.0045	0.0053	0.012	M.L.E
	0.0362	0.0107	0.0117	0.006	B.M
	0.0248	0.0098	0.0105	0.003	B.M
	0.0153	0.0072	0.0077	0.002	B.M
	0.0094	0.005	0.0053	9E-04	B.M
	0.0058	0.0034	0.0036	6E-04	B.M
	0.0037	0.0023	0.0024	4E-04	B.M
	0.0024	0.0016	0.0017	2E-04	B.M
	0.0016	0.0011	0.0011	2E-04	B.M

جدول (3): تقديرات المعولية لاربع طرق عندما تكون العينة n=10

n	ti	Real R(t)	MED	MLE	MOM	BM
10	1.1	0.7513	0.7865	0.7993	0.7963	0.8359
	1.3	0.45517	0.40877	0.43404	0.4281	0.51289
	1.5	0.2963	0.23335	0.25726	0.25156	0.33752
	1.7	0.20354	0.1429	0.16282	0.15801	0.23408
	1.9	0.14579	0.09243	0.10843	0.10452	0.16909
	2.1	0.10798	0.06245	0.07521	0.07206	0.12619
	2.3	0.08219	0.04373	0.05394	0.0514	0.09672
	2.5	0.064	0.03154	0.03977	0.0377	0.07579
	2.7	0.0508	0.0233	0.03	0.0283	0.0605
	2.9	0.041	0.0176	0.0231	0.0217	0.0491

جدول (4): متوسط مربعات الخطأ لدالة المعولة عندما n=10

n	MED	MLE	MOM	BM	Best
10	0.0012	0.0023	0.002	0.007	M.E.D
	0.0022	0.0004	0.0007	0.003	M.L.E
	0.004	0.0015	0.002	0.002	M.L.E
	0.0037	0.0017	0.0021	9E-04	B.M
	0.0028	0.0014	0.0017	5E-04	B.M
	0.0021	0.0011	0.0013	3E-04	B.M
	0.0015	0.0008	0.0009	2E-04	B.M
	0.0011	0.0006	0.0007	1E-04	B.M
	0.0008	0.0004	0.0005	9E-05	B.M
	0.0005	0.0003	0.0004	7E-05	B.M

جدول (5): تقديرات المعولية لاربع طرق عندما تكون العينة n=20

n	ti	Real R(t)	MED	MLE	MOM	BM
20	1.1	0.7513	0.7611	0.7671	0.7644	0.7877
	1.3	0.45517	0.42745	0.43794	0.43317	0.47563
	1.5	0.2963	0.26077	0.27096	0.2663	0.30875
	1.7	0.20354	0.16925	0.17804	0.17401	0.21158
	1.9	0.14579	0.11526	0.12259	0.11922	0.15122
	2.1	0.10798	0.08158	0.08762	0.08484	0.11178
	2.3	0.08219	0.05958	0.06458	0.06227	0.08493
	2.5	0.064	0.04468	0.04882	0.0469	0.06603
	2.7	0.0508	0.0342	0.0377	0.0361	0.0523
	2.9	0.041	0.0268	0.0297	0.0283	0.0422

جدول (6): متوسط مربعات الخطأ لدالة المعولة عندما n=20

n	MED	MLE	MOM	BM	Best
20	1E-04	0.0002	0.0002	0.001	M.E.D
	0.0008	0.0003	0.0005	4E-04	M.L.E
	0.0013	0.0006	0.0009	2E-04	B.M
	0.0012	0.0007	0.0009	6E-05	B.M
	0.0009	0.0005	0.0007	3E-05	B.M
	0.0007	0.0004	0.0005	1E-05	B.M
	0.0005	0.0003	0.0004	8E-06	B.M
	0.0004	0.0002	0.0003	4E-06	B.M
	0.0003	0.0002	0.0002	2E-06	B.M
	0.0002	0.0001	0.0002	1E-06	B.M

جدول (7): تقديرات المعولية لاربع طرق عندما تكون العينة n=30

n	ti	Real R(t)	MED	MLE	MOM	BM
30	1.1	0.7513	0.7566	0.7611	0.7597	0.775
	1.3	0.45517	0.43664	0.44435	0.44192	0.46905
	1.5	0.2963	0.27266	0.28025	0.27785	0.30506
	1.7	0.20354	0.18061	0.18726	0.18515	0.2094
	1.9	0.14579	0.12526	0.13088	0.12909	0.14988
	2.1	0.10798	0.09011	0.09481	0.09331	0.11094
	2.3	0.08219	0.0668	0.07073	0.06947	0.08439
	2.5	0.064	0.05077	0.05407	0.05301	0.06568
	2.7	0.0508	0.0394	0.0422	0.0413	0.0521
	2.9	0.041	0.0312	0.0335	0.0328	0.042

جدول (8): متوسط مربعات الخطأ لدالة المعولة عندما n=30

n	MED	MLE	MOM	BM	Best
30	3E-05	1E-04	7E-05	6E-04	M.E.D
	0.0003	0.0001	0.0002	2E-04	M.L.E
	0.0006	0.0003	0.0003	8E-05	B.M
	0.0005	0.0003	0.0003	3E-05	B.M
	0.0004	0.0002	0.0003	2E-05	B.M
	0.0003	0.0002	0.0002	9E-06	B.M
	0.0002	0.0001	0.0002	5E-06	B.M
	0.0002	1E-04	0.0001	3E-06	B.M
	0.0001	7E-05	9E-05	2E-06	B.M
	1E-04	6E-05	7E-05	1E-06	B.M

جدول (9): تقديرات المعولية لاربع طرق عندما تكون العينة n=50

n	ti	Real R(t)	MED	MLE	MOM	BM
50	1.1	0.7513	0.7551	0.7582	0.7566	0.7667
	1.3	0.45517	0.44384	0.44925	0.4464	0.46385
	1.5	0.2963	0.28155	0.28692	0.28409	0.30161
	1.7	0.20354	0.18909	0.19384	0.19133	0.20699
	1.9	0.14579	0.13275	0.1368	0.13466	0.14813
	2.1	0.10798	0.09656	0.09998	0.09817	0.10962
	2.3	0.08219	0.0723	0.07518	0.07365	0.08338
	2.5	0.064	0.05546	0.0579	0.0566	0.06489
	2.7	0.0508	0.0434	0.0455	0.0444	0.0515
	2.9	0.041	0.0346	0.0364	0.0354	0.0415

جدول (10): متوسط مربعات الخطأ لدالة المعولة عندما n=50

n	MED	MLE	MOM	BM	Best
50	1E-05	5E-05	3E-05	2E-04	M.E.D
	0.0001	4E-05	8E-05	8E-05	B.M & M.O.M
	0.0002	9E-05	0.0001	3E-05	B.M
	0.0002	9E-05	0.0001	1E-05	B.M
	0.0002	8E-05	0.0001	5E-06	B.M
	0.0001	6E-05	1E-04	3E-06	B.M
	1E-04	5E-05	7E-05	1E-06	B.M
	7E-05	4E-05	5E-05	8E-07	B.M
	5E-05	3E-05	4E-05	5E-07	B.M
	4E-05	2E-05	3E-05	3E-07	B.M

جدول (11): تقديرات المعولية لاربع طرق عندما تكون العينة n=75

n	ti	Real R(t)	MED	MLE	MOM	BM
75	1.1	0.7513	0.7517	0.754	0.7526	0.7597
	1.3	0.45517	0.44567	0.44957	0.44728	0.45927
	1.5	0.2963	0.2848	0.28869	0.2864	0.29842
	1.7	0.20354	0.1925	0.19596	0.19393	0.20467
	1.9	0.14579	0.13592	0.13888	0.13714	0.14639
	2.1	0.10798	0.09937	0.10188	0.10041	0.10829
	2.3	0.08219	0.07476	0.07688	0.07563	0.08233
	2.5	0.064	0.05759	0.05939	0.05833	0.06404
	2.7	0.0508	0.0453	0.0468	0.0459	0.0508
	2.9	0.041	0.0362	0.0375	0.0367	0.0409

جدول (12): متوسط مربعات الخطأ لدالة المعولة عندما n=75

n	MED	MLE	MOM	BM	Best
75	2E-07	7E-06	2E-06	7E-05	M.E.D
	9E-05	3E-05	6E-05	2E-05	B.M
	0.0001	6E-05	1E-04	4E-06	B.M
	0.0001	6E-05	9E-05	1E-06	B.M
	1E-04	5E-05	7E-05	4E-07	B.M
	7E-05	4E-05	6E-05	1E-07	B.M
	6E-05	3E-05	4E-05	2E-08	B.M
	4E-05	2E-05	3E-05	2E-09	B.M
	3E-05	2E-05	2E-05	0	B.M
	2E-05	1E-05	2E-05	1E-08	B.M

جدول (13): تقديرات المعولية لاربع طرق عندما تكون العينة n=100

n	ti	Real R(t)	MED	MLE	MOM	BM
100	1.1	0.7513	0.7548	0.7547	0.7533	0.7589
	1.3	0.45517	0.4531	0.45299	0.45074	0.46022
	1.5	0.2963	0.29266	0.29255	0.29029	0.29982
	1.7	0.20354	0.19968	0.19957	0.19756	0.20611
	1.9	0.14579	0.14216	0.14207	0.14034	0.14773
	2.1	0.10798	0.10472	0.10464	0.10317	0.10947
	2.3	0.08219	0.07931	0.07925	0.07799	0.08337
	2.5	0.064	0.06148	0.06142	0.06036	0.06495
	2.7	0.0508	0.0486	0.0486	0.0476	0.0516
	2.9	0.041	0.0391	0.039	0.0382	0.0416

جدول (14): متوسط مربعات الخطأ لدالة المعولة عندما n=100

n	MED	MLE	MOM	BM	Best
100	1E-05	1E-05	4E-06	6E-05	M.O.M
	4E-06	5E-06	2E-05	3E-05	M.E.D
	1E-05	1E-05	4E-05	1E-05	B.M & M.E.D & M.L.E
	1E-05	2E-05	4E-05	7E-06	B.M
	1E-05	1E-05	3E-05	4E-06	B.M
	1E-05	1E-05	2E-05	2E-06	B.M
	8E-06	9E-06	2E-05	1E-06	B.M
	6E-06	7E-06	1E-05	9E-07	B.M
	5E-06	5E-06	1E-05	6E-07	B.M
	4E-06	4E-06	8E-06	4E-07	B.M

جدول (15): تقديرات المعولية لاربع طرق عندما تكون العينة n=250

n	ti	Real R(t)	MED	MLE	MOM	BM
250	1.1	0.7513	0.7511	0.7521	0.7515	0.7538
	1.3	0.45517	0.45139	0.45309	0.45206	0.45596
	1.5	0.2963	0.29183	0.29353	0.2925	0.29641
	1.7	0.20354	0.19927	0.2008	0.19987	0.20338
	1.9	0.14579	0.14197	0.14329	0.14249	0.14553
	2.1	0.10798	0.10465	0.10577	0.10509	0.10768
	2.3	0.08219	0.07931	0.08026	0.07968	0.08189
	2.5	0.064	0.06151	0.06232	0.06183	0.06372
	2.7	0.0508	0.0486	0.0493	0.0489	0.0505
	2.9	0.041	0.0391	0.0397	0.0394	0.0408

جدول (16): متوسط مربعات الخطأ لدالة المعولة عندما n=250

n	MED	MLE	MOM	BM	Best
250	4E-08	6E-07	4E-08	6E-06	M.O.M &M.E.D
	1E-05	4E-06	1E-05	6E-07	B.M
	2E-05	8E-06	1E-05	1E-08	B.M
	2E-05	8E-06	1E-05	3E-08	B.M
	1E-05	6E-06	1E-05	7E-08	B.M
	1E-05	5E-06	8E-06	9E-08	B.M
	8E-06	4E-06	6E-06	9E-08	B.M
	6E-06	3E-06	5E-06	8E-08	B.M
	5E-06	2E-06	4E-06	9E-08	B.M
	4E-06	2E-06	3E-06	4E-08	B.M

جدول (17): تقديرات المعولية لاربع طرق عندما تكون العينة n=500

n	ti	Real R(t)	MED	MLE	MOM	BM
500	1.1	0.7513	0.7515	0.7523	0.7522	0.7531
	1.3	0.45517	0.45372	0.45511	0.45497	0.45654
	1.5	0.2963	0.2945	0.2959	0.29576	0.29734
	1.7	0.20354	0.2018	0.20305	0.20292	0.20435
	1.9	0.14579	0.14422	0.14531	0.14519	0.14643
	2.1	0.10798	0.1066	0.10753	0.10743	0.10849
	2.3	0.08219	0.08099	0.08178	0.0817	0.0826
	2.5	0.064	0.06296	0.06364	0.06357	0.06434
	2.7	0.0508	0.0499	0.0505	0.0504	0.0511
	2.9	0.041	0.0402	0.0407	0.0407	0.0412

جدول (18): متوسط مربعات الخطأ لدالة المعولة عندما n=500

n	MED	MLE	MOM	BM	Best
500	4E-08	1E-06	8E-07	3E-06	M.E.D
	2E-06	4E-09	4E-08	2E-06	M.L.E
	3E-06	2E-07	3E-07	1E-06	M.L.E
	3E-06	2E-07	4E-07	7E-07	M.L.E
	2E-06	2E-07	4E-07	4E-07	M.L.E
	2E-06	2E-07	3E-07	3E-07	M.L.E
	1E-06	2E-07	2E-07	2E-07	B.M & M.O.M & M.L.E
	1E-06	1E-07	2E-07	1E-07	B.M & M.L.E
	8E-07	9E-08	2E-07	9E-08	B.M & M.L.E
	6E-07	9E-08	9E-08	4E-08	B.M

جدول (19): تقديرات المعولية لاربع طرق عندما تكون العينة n=1000

n	ti	Real R(t)	MED	MLE	MOM	BM
1000	1.1	0.7513	0.7513	0.7515	0.7514	0.7519
	1.3	0.45517	0.45443	0.45478	0.45456	0.45549
	1.5	0.2963	0.29541	0.29576	0.29554	0.29648
	1.7	0.20354	0.20269	0.203	0.20281	0.20365
	1.9	0.14579	0.14503	0.1453	0.14513	0.14586
	2.1	0.10798	0.10731	0.10754	0.1074	0.10802
	2.3	0.08219	0.08161	0.08181	0.08168	0.08222
	2.5	0.064	0.0635	0.06367	0.06356	0.06402
	2.7	0.0508	0.0504	0.0505	0.0504	0.0508
	2.9	0.041	0.0406	0.0407	0.0407	0.041

جدول (20): متوسط مربعات الخطأ لدالة المعولة عندما n=1000

n	M.E.D	MED	MLE	MOM	Best
1000	0	4E-08	1E-08	4E-07	M.E.D
	5E-07	2E-07	4E-07	1E-07	B.M
	8E-07	3E-07	6E-07	3E-08	B.M
	7E-07	3E-07	5E-07	1E-08	B.M
	6E-07	2E-07	4E-07	5E-09	B.M
	4E-07	2E-07	3E-07	2E-09	B.M
	3E-07	1E-07	3E-07	9E-10	B.M
	3E-07	1E-07	2E-07	4E-10	B.M
	2E-07	9E-08	2E-07	0	B.M
	2E-07	9E-08	9E-08	0	B.M

الاستنتاجات:

1- اظهرت نتائج المعولية افضلية طريقة بيز بالنسبة للطرائق الاخرى.

2- اظهرت النتائج افضلية طريقة الوسيط عندما تكون ti عند (1.1) ولكافة العينات.

3- استنتجت الدراسة ان طريقة بيز هي اكفأ الطرق المستخدمة لتقدير دالة المعولية ولكافة العينات باستخدام المقياس MSE.

المصادر:

1- HOGG, ROBERT v. and KLUGMAN, STUART A. (1984) Loss Distribution. John Wiley and Sons New York.

2- Hossain, A.M, & Wiliam, J. T, (2000): Comparisons of Methods of Estimation for a Pareto distribution of the First Kind, Commun. Statist- Theory Meth, 29(4), PP. 859-878.

3- Johnson ,N.L & Kotz ,S. (1970) :Theory Of Point Estimation Wads Worth And Brooks Pacific Grove California.

4- L. J. Norman, K. Samuel, and N. Balakrishnan, (1994), Continuous Univariate Distributions, Volume 1, second Edition, Wiley.

5- Lewis, E. E. (1994). "*Introduction of Reliability engineering*" 2nd edition, wiley, New York.

6- Nadarajah, S., and Kotz, S. (2003): Reliability for Pareto Models, Metro– International Journal of Statistic, VOL LXI, n.2. PP 191-204.

7- Petersen J.L, (2009), Estimating the Parameters of a Pareto Distribution Introducing a Quantile Regression Method, p2-3.

8- Sahoo, P.(2013), Probability And Mathematical Statistics, University of Louisville, Louisville, KY 40292 USA.

9- Sarhan, A.M, & El-Gohary, A. I, (2003): Estimations of Parameters In Pareto Reliability Model in the Presence of Masked Data, Reliability Engineering & System Safety, Vol. 82, PP. 75-83.