

الاستقرارية الكلية لنظام رياضي تربوي يدرس تأثير كل من الغياب وترك الدراسة على العملية التربوية والتعليمية

سعد عبد الله عبد السادة

احمد علي محسن

المديرية العامة للتربية في بغداد / الرصافة الاولى

الملخص:

هناك العديد من العوامل التي تؤثر على سير العملية التربوية والتعليمية، وبعض هذه العوامل هو الغياب المتكرر وترك مقاعد الدراسة. الهدف الرئيسي من البحث هو دراسة ومعرفة مدى تأثير هذه العوامل على السلوك الديناميكي للنموذج المقترح. افترضنا ان المجتمع الطلابي يتكون من ثلاثة اقسام هي الاول الطلبة في فترة الدراسة والثاني الطلبة الغائبون مع وجود احتمال عودة الغائبون للدراسة مرة ثانية والقسم الاخير الطلبة الناجحون. تمت مناقشة وجود و وحدانية وقيود الحل للنموذج المقترح. قمنا بدراسة السلوك الشامل له. واخيراً من اجل تأكيد نتائجنا وتحديد تأثير معلمات النموذج التربوي على السلوك الديناميكي له اجرينا محاكاة عددية له.

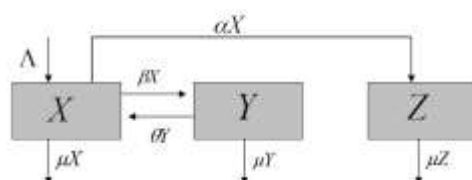
1. المقدمة:

يعتبر النموذج الرياضي واحد من اهم الوسائل التي تساعد في دراسة وتحليل بعض المشاكل في الحياة وتقديم الحلول المناسبة لها. وكما هو معروف ان النموذج الرياضي ينقسم الى قسمين مهمين يسمى القسم الاول بالنماذج البيئية والتي تهتم بدراسة كافة التفاعلات بين الكائنات الحية والغير حية في البيئة على سبيل المثال (التفاعلات التي تحدث بين البشر، بين الحيوانات، بين البشر والحيوان وغيرها) والمعروفة ايضا بنماذج الفريسة والمفترس. حيث يعتبر نموذج لوتكا و فولتيرا [2,1] اول نموذج رياضي لهذا النوع ويعتبر القاعده الاساس للكثير من الدراسات بهذا المجال على سبيل المثال رائد كامل ناجي و أزهار عباس [3] في 2012، قدموا نظام بيئي يتكون من فريسة ومفترس ذات مراحل عمرية مركبة. دينا سلطان [4] في 2010 ، قدمت نظام بيئي لفريسة ومفترس ذات مراحل عمرية مركبة والذي يتضمن امراض معدية طفيلية. واما القسم الثاني يسمى بالنماذج الوبائية وهذا القسم يهتم بدراسة وتحليل انتشار الامراض المعدية، حيث يعتبر نموذج كارميك و مكدريك [5] في 1927 اول نموذج رياضي يهتم بدراسة انتشار الامراض المعدية ومنطلقا للعديد من الدراسات والبحوث في هذا المجال على سبيل المثال كريس زاليتا و فيلاسكو هيرنانديز [6] في 2000 عرضوا نموذج رياضي وبائي من نوع SIS مع وجود تطعيم. ارينو و مكلوسكي و فان دين [7] اقترح نموذج وبائي

من نوع SIR مع التفرعات. رائد كامل ناجي واحمد علي محسن [8] اقترحوا ودرسوا نموذج وبائي من نوع $SVIR$ والذي يتضمن وجود مهاجرين. في هذا البحث اقترحنا نموذج رياضي تربوي درسنا فيه تأثير بعض العوامل التي تؤثر على سير العملية التعليمية. درسنا الاستقرارية الكلية لكل نقاط التوازن المحتملة للنموذج وكذلك قمنا بدراسة عديدة للنموذج المقترح.

2. النموذج الرياضي:

في هذا النموذج قسمنا مجتمع الطلاب الى ثلاثة اقسام القسم الاول الطلاب في فترة الدراسة والذي يرمز لهم بالرمز $X(t)$ عند الزمن (t) , القسم الثاني الطلاب الغائبون ويرمز لهم بالرمز $Y(t)$ عند الزمن (t) والقسم الثالث الطلاب الناجحون ويرمزهم $Z(t)$ عند الزمن (t) . كما مبين في الشكل ادناه:



الشكل (1)

يمثل مخطط للنموذج المقترح والذي يمكن كتابته بنظام معادلات تفاضلية خطيه كالآتي:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \Lambda - (\beta + \alpha + \mu)X + \theta Y \\ \frac{dY}{dt} &= \beta X - (\theta + \mu)Y \\ \frac{dZ}{dt} &= \alpha X - \mu Z \end{aligned} \quad (1)$$

هنا $\Lambda > 0$ تمثل نسبة الطلبة الوافدين الجدد، $\beta > 0$ نسبة الطلبة الغائبون، ونسبة الطلبة الناجحون هي $\alpha > 0$ ، اما $(0 \leq \theta \leq 1)$ هي نسبة الطلبة العائدين من حالة الغياب، حيث انه اذا كانت $\theta = 0$ ذلك يعني انه لا يوجد عائدون من الغياب الى مقاعد الدراسة مرة اخرى، اما اذا كانت $\theta = 1$ فهذا يدل على ان العوده الى الدراسة عند الطلبة الغائبون يكون اعظم ما يمكن واخيرا $\mu > 0$ هي نسبة الطلبة التاركين للدراسة من كل الاقسام (الطلبة في فترة الدراسة، الطلبة الغائبون والطلبة الناجحون). وبناء على ذلك نفرض ان العدد الكلي لمجتمع الطلاب هو $N = X(t) + Y(t) + Z(t)$. ومن الواضح ان المتغيرات في النظام (1) تكون في

$$\mathcal{R}_+^3 = \{(X, Y, Z) \in \mathcal{R}_+^3, X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0\}$$

أي ان النظام (1) له ثبات ايجابي. اضافة الى ذلك ان المعادلات في النظام (1) هي مستمرة ومشتقاتها مستمرة وتحقق دالة ليبشيزين من هذا ينتج ان الحل موجود و وحيد في $\mathcal{R}_+^3$ ، كما ان

جميع حلول النظام (1) لامتلك شروط ابتدائية سالبة وتكون مقيدة بانتظام كما مبين في النظرية ادناه:

نظرية 1: كل الحلول للنظام (1) تكون في $\mathbb{R}_+^3$ هي مقيدة بانتظام.

البرهان:

ليكن $(X(t), Y(t), Z(t))$ هي أية حلول للنظام (1) مع شروط ابتدائية غير سالبة $(X(0), Y(0), Z(0))$ حيث ان $N(t) = X(t) + Y(t) + Z(t)$ وهذا ينتج:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= \frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt} + \frac{dZ}{dt} \\ &= \Lambda - (\beta + \alpha + \mu)X + \theta Y + \beta X - (\theta + \mu)Y + \alpha X - \mu Z\end{aligned}$$

وبتبسيط المعادلة اعلاه نحصل على:

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu(X + Y + Z)$$

أي ان:

$$\frac{dN}{dt} + \mu N = \Lambda$$

والان باستخدام نتيجة كرونوال [9] نحل المعادلة التفاضلية اعلاه نحصل على:

$$N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t}) + N(0)e^{-\mu t}$$

وينتج ان $N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ عندما $t \rightarrow \infty$ أي ان كل حلول النظام (1) تبدأ في $\mathbb{R}_+^3$ وتكون في

المنطقة $\Omega = \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}_+^3 : N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$, وهنا نهاية البرهان

3. إيجاد نقاط التوازن للنظام (1):

في هذا الجزء نناقش وجود كل نقاط التوازن المحتملة للنظام (1). هنا نلاحظ ان النظام (1) يمتلك على الاكثر اربعة نقاط توازن محتملة $E_i = (X_i, Y_i, Z_i), i = 0, 1, 2, 3$ تم وضع شروط الوجود لكل نقاط التوازن كما مبين ادناه:

1. اذا كان $Y = Z = 0$ ينتج ان النظام (1) يمتلك نقطة توازن تسمى نقطة التوازن

الخالية من كل الغائبون و الناجحون ويرمز لها بالرمز $E_0 = (X_0, 0, 0)$ حيث ان:

$$X_0 = \frac{\Lambda}{\mu} \quad (2)$$

2. اذا كان $Y = 0$ فان النظام (1) يمتلك نقطة توازن تسمى نقطة التوازن الخالية من

الغائبون ويرمز لها بالرمز $E_1 = (X_1, 0, Z_1)$ حيث ان:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{\Lambda}{\alpha + \mu} \\ Z_1 &= \frac{\alpha \Lambda}{\mu(\alpha + \mu)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

3. اذا كان $Z = 0$ فان النظام (1) يمتلك نقطة توازن تسمى نقطة التوازن الخالية من الناجحون ويرمز لها بالرمز $E_2 = (X_2, Y_2, 0)$ حيث ان:

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= \frac{\mu \Lambda (\mu + \beta + \theta) + \Lambda \beta \theta}{\mu(\beta + \mu)(\mu + \beta + \theta)} \\ Y_2 &= \frac{\beta \Lambda}{\mu(\mu + \beta + \theta)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

4. اذا كان $Z \neq 0, Y \neq 0$ فان النظام (1) يمتلك نقطة توازن تسمى نقطة التوازن في

حالة وجود كل من الغائبون والناجحون ويرمز لها بالرمز $E_3 = (X_3, Y_3, Z_3)$

حيث ان X_3, Y_3, Z_3 تمثل الحل الموجب للمعادلات ادناه:

$$\begin{aligned} \Lambda - (\beta + \alpha + \mu)X + \theta Y &= 0 \\ \beta X - (\theta + \mu)Y &= 0 \\ \alpha X - \mu Z &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

من معادلة (2) في النظام (5) نحصل على:

$$Y = \frac{\beta X}{\theta + \mu}$$

وبتعويض قيمة Y اعلاه في المعادلة الاولى للنظام (5) ينتج لنا ان:

$$\left. \begin{aligned} X_3 &= \frac{\Lambda(\mu + \theta)}{\theta(\alpha + \mu) + \mu(\beta + \alpha + \mu)} \\ Y_3 &= \frac{\Lambda\beta(\mu + \theta)}{(\mu + \theta)[\theta(\alpha + \mu) + \mu(\beta + \alpha + \mu)]} \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

وبتعويض قيمة X_3 ايضاً في المعادلة الثالثة للنظام (5) نحصل على:

$$Z_3 = \frac{\Lambda\alpha(\mu + \theta)}{\mu[\theta(\alpha + \mu) + \mu(\beta + \alpha + \mu)]} \quad (6b)$$

4. تحليل الاستقرارية المحلية للنظام (1):

في هذا الجزء سندرس الاستقرارية المحلية للنظام (1) ولكل نقاط التوازن الخاصة بالنظام وذلك بالاعتماد على مصفوفة جاكوبياً وكما مبين في النظرية ادناه.

نظرية 2: كل نقاط التوازن الخاصة بالنظام (1) وهي $E_i, i = 0, 1, 2, 3$ تكون مستقرة استقراراً محلياً اذا تحقق الشرط التالي وكما مبين ادناه.

$$\beta\theta < (\mu + \theta)(\beta + \alpha + \mu) \quad (7)$$

البرهان:

بما ان النظام المقترح مكون من معادلات خطية فان مصفوفة الجاكوبياً لة وعند كل نقاط التوازن الخاصة به هي نفس المصفوفة والتي يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$J_{E_i} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}, i = 0,1,2,3$$

حيث ان:

$$b_{11} = -(\beta + \alpha + \mu); b_{12} = \theta; b_{13} = 0$$

$$b_{21} = \beta; b_{22} = -(\theta + \mu); b_{23} = 0$$

$$b_{31} = \alpha; b_{32} = 0; b_{33} = -\mu$$

بسهولة نرى ان المعادلة المميزة لمصفوفة الجاكوبيا عند جميع نقاط التوازن
 $E_i, i = 0,1,2,3$ الخاصة بالنظام (1) تكتب بالشكل:

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0 \quad (8)$$

هنا:

$$A_1 = -[a_{11} + a_{22} + a_{33}]$$

$$= 3\mu + \beta + \alpha + \theta$$

$$A_2 = [a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33}]$$

$$= (\theta + \mu)(\beta + \alpha + \mu) - \beta\theta + \mu(\beta + \alpha + \theta) + \mu(\theta + \mu)$$

$$A_3 = -[a_{11}a_{22}a_{33} + a_{33}a_{12}a_{21}]$$

$$= \mu^3 + \mu^2(\beta + \alpha + \theta) + \alpha\mu\theta$$

ومن هنا نجد ان:

$$\Delta = A_1A_2 - A_3$$

$$= (a_{11} + a_{22} + 2a_{33})(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) - a_{11}a_{33}(a_{11} + a_{33})$$

$$- a_{22}a_{33}(a_{22} + a_{33})$$

$$= -[(\beta + \alpha + \mu) + (\mu + \theta) + 2\mu][\beta\theta - (\mu + \theta)(\beta + \alpha + \mu)] +$$

$$\mu(\beta + \alpha + \mu)[(\beta + \alpha + \mu) + \mu] + \mu(\mu + \theta)[(\mu + \theta) + \mu]$$

والان بتطبيق قاعدة روث-هوارتز تكون جميع نقاط التوازن $E_i, i = 0,1,2,3$ الخاصة بالنظام

(1) مستقرة استقراراً محلياً اذا كانت الشروط $A_1 > 0; A_3 > 0$ و $\Delta = A_1A_2 - A_3 > 0$ متحققة.

وبسهولة نلاحظ ان $A_1 > 0; A_3 > 0$ متحققة وبدون أي شرط بينما $\Delta = A_1A_2 - A_3 > 0$ تكون متحققة اذا تحقق الشرط (7).

5. تحليل الاستقرارية الكلية للنظام (1):

في هذا الجزء سندرس الاستقرارية الكلية للنظام (1) ولكل نقاط التوازن الخاصة بالنظام وذلك بالاعتماد على دالة ليابانوف وكما مبين في النظريات ادناه.

نظرية 3: لتكن نقطة التوازن الخالية من الغائبون والناجحون (E_0) مستقرة استقراراً كلياً اذا تحقق الشرط الاتي:

$$\beta + \alpha < \theta Y \quad (9)$$

البرهان:

لتكن V_1 دالة موجبة حيث ان:

$$V_1 = \left(X - X_0 - X_0 \ln \frac{X}{X_0} \right) + Y + Z$$

من الواضح ان $V_1: R_+^3 \rightarrow R$ هي دالة مستمرة ومشتقتها مستمرة ايضاً بحيث ان:

$$V_1 = (X_0, 0, 0) = 0, \quad V_1(X, Y, Z) > 0 \quad \forall (X, Y, Z) \neq (X_0, 0, 0)$$

نحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \left(\frac{X - X_0}{X} \right) \frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt} + \frac{dZ}{dt} \\ &= \left(\frac{X - X_0}{X} \right) [\Lambda - (\beta + \alpha + \mu)X + \theta Y] + \beta X - (\theta + \mu)Y + \alpha X - \mu Z \end{aligned}$$

وبتبسيط هذه المعادلة ينتج:

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{-\mu}{X} (X - X_0)^2 - \mu(Y + Z) + X_0[\beta + \alpha - \theta Y]$$

واذا كان الشرط (9) متحقق فان:

$$\frac{dV_1}{dt} \leq \frac{-\mu}{X} (X - X_0)^2 - \mu(Y + Z) + X_0[\beta + \alpha - \theta Y]$$

حيث ان $\frac{dV_1}{dt} < 0$ و V_1 تحقق دالة ليابانوف اذا تحقق الشرط (9) وهذا ينتج بان نقطة التوازن

الخالية من الغائبون والناجحون (E_0) تكون مستقرة استقرارا كلياً.

نظرية 4: لتكن نقطة التوازن الخالية من الغائبون (E_1) مستقرة استقرارا كلياً اذا تحققت

الشروط الاتية:

$$\left(\frac{\alpha}{Z} \right)^2 \leq 4 \left(\frac{\alpha + \mu}{X} \right) \left(\frac{\mu}{Z} \right) \quad (10a)$$

$$\beta X X_1 < (\mu X + \theta X_1) Y \quad (10b)$$

البرهان:

لتكن V_2 دالة موجبة ومعرفة بالشكل الاتي:

$$V_2 = \left(X - X_1 - X_1 \ln \frac{X}{X_1} \right) + Y + \left(Z - Z_1 - Z_1 \ln \frac{Z}{Z_1} \right)$$

من الواضح ان $V_2: R_+^3 \rightarrow R$ هي دالة مستمرة ومشتقتها مستمرة ايضاً بحيث ان:

$$V_2 = (X_1, 0, Z_1) = 0, \quad V_2(X, Y, Z) > 0 \quad \forall (X, Y, Z) \neq (X_1, 0, Z_1)$$

نحصل على:

$$\begin{aligned}\frac{dV_2}{dt} &= \left(\frac{X - X_1}{X} \right) \frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt} + \left(\frac{Z - Z_1}{Z} \right) \frac{dZ}{dt} \\ &= \left(\frac{X - X_1}{X} \right) [\Lambda - (\beta + \alpha + \mu)X + \theta Y] + \beta X - (\mu + \theta)Y + \\ &\quad \left(\frac{Z - Z_1}{Z} \right) [\alpha X - \mu Z]\end{aligned}$$

وبتبسيط هذه المعادلة ينتج:

$$\begin{aligned}\frac{dV_2}{dt} &= \frac{-(\alpha + \mu)}{X} (X - X_1)^2 + \frac{\alpha}{Z} (X - X_1)(Z - Z_1) - \frac{\mu}{Z} (Z - Z_1)^2 + \\ &\quad \beta X_1 - \frac{(\mu X + \theta X_1)Y}{X}\end{aligned}$$

وإذا كان الشرط (10a) متحقق فان:

$$\frac{dV_2}{dt} \leq - \left[\sqrt{\frac{\alpha + \mu}{X}} (X - X_1) - \sqrt{\frac{\mu}{Z}} (Z - Z_1) \right]^2 + \beta X_1 - \frac{(\mu X + \theta X_1)Y}{X}$$

اي ان $\frac{dV_2}{dt} < 0$ متحقق لكل شرط ابتدائي اذا تحقق الشرط (10a) و V_2 هي دالة ليابانوف اذا تحقق الشرطين (10a-10b) ومن هذا ينتج بان نقطة التوازن الخالية من الغائبون (E_1) تكون مستقرة استقرارا كليا.

نظرية 5: لتكن نقطة التوازن الخالية من الناجحون (E_2) مستقرة استقرارا كليا اذا تحققت الشروط الاتية:

$$\left(\frac{\theta}{X} + \frac{\beta}{Y} \right)^2 \leq 4 \left(\frac{\beta + \mu}{X} \right) \left(\frac{\theta + \mu}{Y} \right) \quad (11a)$$

$$\alpha X_2 < \mu Z \quad (11b)$$

البرهان:

لتكن V_3 دالة موجبة ومعرفة بالشكل الاتي:

$$V_3 = \left(X - X_2 - X_2 \ln \frac{X}{X_2} \right) + \left(Y - Y_2 - Y_2 \ln \frac{Y}{Y_2} \right) + Z$$

نلاحظ ان $V_3: R_+^3 \rightarrow R$ هي دالة مستمرة ومشتقتها مستمرة ايضاً بحيث ان:

$$V_3 = (X_2, Y_2, 0) = 0, \quad V_3(X, Y, Z) > 0 \quad \forall (X, Y, Z) \neq (X_2, Y_2, 0)$$

والآن نحسب المشتقة للدالة V_3 نحصل على:

$$\begin{aligned}\frac{dV_3}{dt} &= \left(\frac{X - X_2}{X} \right) \frac{dX}{dt} + \left(\frac{Y - Y_2}{Y} \right) \frac{dY}{dt} + \frac{dZ}{dt} \\ &= \left(\frac{X - X_2}{X} \right) [\Lambda - (\beta + \alpha + \mu)X + \theta Y] + \left(\frac{Y - Y_2}{Y} \right) [\beta X - (\mu + \theta)Y] + \\ &\quad \alpha X - \mu Z\end{aligned}$$

وبتبسيط هذه المعادلة ينتج:

$$\frac{dV_3}{dt} = \frac{-(\beta + \mu)}{X}(X - X_2)^2 + \left(\frac{\theta}{X} + \frac{\beta}{Y}\right)(X - X_2)(Y - Y_2) - \left(\frac{\theta + \mu}{Y}\right)(Y - Y_2)^2 + \alpha X_2 - \mu Z$$

وإذا كان الشرط (11a) متحقق فان:

$$\frac{dV_3}{dt} \leq - \left[\sqrt{\frac{\beta + \mu}{X}}(X - X_2) - \sqrt{\frac{\theta + \mu}{Y}}(Y - Y_2) \right]^2 + \alpha X_2 - \mu Z$$

اي ان $\frac{dV_3}{dt} < 0$ متحقق لكل شرط ابتدائي اذا تحقق الشرط (11a) و V_3 هي دالة ليابانوف اذا تحقق الشرطين (11a-11b) ومن هذا ينتج بان نقطة التوازن الخالية من الناجحون (E_2) تكون مستقره استقرارا كلياً.

نظرية 6: لتكن نقطة توازن وجود كل من الغائبون و الناجحون (E_3) مستقرة استقرارا كلياً اذا تحققت الشروط الاتية:

$$(\theta + \beta)^2 \leq 2(\beta + \alpha + \mu)(\theta + \mu) \quad (12a)$$

$$\alpha^2 < 2\mu(\beta + \alpha + \mu) \quad (12b)$$

البرهان:

لتكن V_4 دالة موجبة ومعرفة بالشكل الاتي:

$$V_4 = \frac{(X - X_3)^2}{2} + \frac{(Y - Y_3)^2}{2} + \frac{(Z - Z_3)^2}{2}$$

من الواضح ان $V_4: R_+^3 \rightarrow R$ هي دالة مستمرة ومشتقتها مستمرة ايضاً بحيث ان:
 $V_4(X, Y, Z) > 0 \quad \forall (X, Y, Z) \neq (X_3, Y_3, Z_3)$ والآن نحسب المشتقة للدالة V_4 نحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{dV_4}{dt} &= (X - X_3) \frac{dX}{dt} + (Y - Y_3) \frac{dY}{dt} + (Z - Z_3) \frac{dZ}{dt} \\ &= (X - X_3)[\Lambda - (\beta + \alpha + \mu)X + \theta Y] + (Y - Y_3)[\beta X - (\mu + \theta)Y] + \\ &\quad (Z - Z_3)[\alpha X - \mu Z] \end{aligned}$$

وبتبسيط المعادلة اعلاه ينتج:

$$\begin{aligned} \frac{dV_4}{dt} &= \frac{-1}{2} q_{11}(X - X_3)^2 + q_{12}(X - X_3)(Y - Y_3) - q_{22}(Y - Y_3)^2 - \\ &\quad \frac{1}{2} q_{11}(X - X_3)^2 + q_{13}(X - X_3)(Z - Z_3) - q_{33}(Z - Z_3)^2 \end{aligned}$$

حيث ان:

$$q_{11} = (\beta + \alpha + \mu), \quad q_{12} = (\theta + \beta), \quad q_{22} = (\theta + \mu), \quad q_{13} = \alpha, \quad q_{33} = \mu$$

وإذا كانت الشروط (12a-12b) متحققة نحصل على:

$$\frac{dV_4}{dt} \leq - \left[\sqrt{\frac{q_{11}}{2}}(X - X_3) - \sqrt{q_{22}}(Y - Y_3) \right]^2 - \left[\sqrt{\frac{q_{11}}{2}}(X - X_3) - \sqrt{q_{33}}(Z - Z_3) \right]^2$$

وببساطة، $\frac{dV_4}{dt} < 0$ و V_4 هي دالة ليابانوف إذا تحقق الشرطين (12a-12b) ومن هذا ينتج بان نقطة توازن وجود كل من الغائبون و الناجحون (E_3) تكون مستقره استقراراً كلياً.

6. تفرع هوبف للنظام (1):

في هذا الجزء، سندرس تفرع هوبف عند نقاط التوازن $E_i = (X_i, Y_i, Z_i), i = 0, 1, 2, 3$ الخاصة بالنظام (1). من الواضح ان جميع نقاط التوازن الخاصة بالنظام (1) تكون مستقرة استقراراً محلياً إذا كان كل من $A_i > 0, i = 1, 2, 3$ و $\Delta = A_1 A_2 - A_3 > 0$ ايضاً وهذه تكون متحققة إذا تحقق الشرط (7) وفي هذه الحالة لا يوجد احتمال حدوث تفرع هوبف.

الآن، نفرض انه لو كان بالامكان ان $\Delta = A_1 A_2 - A_3 = 0$ هذا ينتج وجود احتمال حدوث تفرع هوبف إذا فقط إذا كانت مصفوفة الجاكوبي للنظام (1) عند واحدة من نقاط التوازن $E_i = (X_i, Y_i, Z_i), i = 0, 1, 2, 3$ تمتلك زوج مركب من معامل التحول الخطي $\lambda_i = (\rho_1 \pm i\rho_2)$ مع معامل تحول خطي ثالث حقيقي او سالب. بالإضافة الى الشرط اعلاه هناك شرطين مهمين واجب تحققهما عند بارامتر خاص مثل $l = l^*$:

$$\rho_1(l^*) = 0 \quad (13a)$$

$$\left. \frac{d\rho_1}{dl} \right|_{l=l^*} \neq 0 \quad (13b)$$

والآن، من $\Delta = A_1 A_2 - A_3 = 0$ نحصل على:

$$Ma_{11}^2 + Ba_{11} + C = 0 \quad (14a)$$

حيث ان:

$$M = -(a_{22} + a_{33}) > 0$$

$$B = a_{12}a_{21} - (a_{22} + a_{33})^2$$

$$C = a_{22}[a_{12}a_{21} - a_{33}(a_{22} + a_{33})]$$

بسهولة إذا كان $C < 0$ وبتطبيق قاعدة كرونوال فان معادلة (14a) تمتلك زوج من الجذور الحقيقية:

$$a_{11} = \frac{-B}{2M} \pm \frac{1}{2M} \sqrt{B^2 - 4MC}$$

وبما ان $a_{11} = -(\beta + \alpha + \mu) < 0$ وعلية نحصل ان:

$$a_{11} = \frac{-B}{2M} - \frac{1}{2M} \sqrt{B^2 - 4MC}$$

وبتعويض قيمة a_{11} نحصل على:

$$(\beta + \alpha + \mu) - \frac{B}{2M} - \frac{1}{2M} \sqrt{B^2 - 4MC} = 0 \quad (14b)$$

وهذا ينتج ان المعادلة (14b) تساوي $f(\alpha^*) = 0$ عندما $\alpha = \alpha^*$ ومن هذا نحصل ان $A_1 A_2 = A_3$ عندما $\alpha = \alpha^*$ عندها يمكن اعادة كتابة المعادلة المميزة لمصفوفة الجاكوبي الخاصة بالنظام (1) عند أي نقطة من نقاط التوازن بالصورة:

$$p_3(\lambda) = (\lambda + A_1)(\lambda^2 + A_2) = 0 \quad (15)$$

الان في هذه الحالة (أي عندما $\alpha = \alpha^*$) ينتج عامل التحول الخطي $\lambda_1 = -A_1 < 0$ و $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{A_2}$ وبهذا فان الشرط الاول اللازم لحدوث تفرع هوبف وهو الشرط (13a) متحقق عند $\alpha = \alpha^*$ وهو $\rho_1(\alpha^*) = 0$ بينما $\rho_2 = \sqrt{A_2}$.

الان سندرس الشرط الثاني وهو (13b) بصورة عامة عامل التحول الخطي المركب لاي قيمة α يمكن كتابته:

$$\lambda_{2,3} = \rho_1(\alpha) \pm i\rho_2(\alpha)$$

وبتعويض $\lambda_2 = \rho_1(\alpha) + i\rho_2(\alpha)$ في المعادلة رقم (15) وباجراء بعض الحسابات البسيطة والمشتقات عند بارامتر التفرع α أي ان $\frac{d}{d\alpha} p_3(\lambda) = p'_3(\lambda) = 0$ ومع اجراء مقارنة بين الجزء الحقيقي والخيالي لطرفي المعادلة نحصل على:

$$\left. \begin{aligned} \eta(\alpha)\rho'_1(\alpha) - \Phi(\alpha)\rho'_2(\alpha) &= -\theta(\alpha) \\ \Phi(\alpha)\rho'_1(\alpha) + \eta(\alpha)\rho'_2(\alpha) &= -\Gamma(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

حيث ان:

$$\eta(\alpha) = 3(\rho_1(\alpha))^2 + 2A_1(\alpha)\rho_1(\alpha) + A_2(\alpha) - 3(\rho_2(\alpha))^2,$$

$$\Phi(\alpha) = 6\rho_1(\alpha)\rho_2(\alpha) + 2A_1(\alpha)\rho_2(\alpha),$$

$$\theta(\alpha) = (\rho_1(\alpha))^2 A'_1(\alpha) + A'_2(\alpha)\rho_1(\alpha) + A'_3(\alpha) - A'_1(\alpha)(\rho_2(\alpha))^2,$$

$$\Gamma(\alpha) = 2\rho_1(\alpha)\rho_2(\alpha)A'_1(\alpha) + A'_2(\alpha)\rho_2(\alpha).$$

وبحل النظام الخطي (16) اعلاه $\rho'_1(\alpha)$ و $\rho'_2(\alpha)$ نحصل على:

$$\rho'_1(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \rho_1(\alpha) = -\frac{\eta\theta + \Gamma\Phi}{\eta^2 + \Phi^2} \quad (17)$$

الان، لتحقيق الشرط الثاني (13b) الخاص بتفرع هوبف يجب ان يتحقق الشرط التالي:

$$\eta(\alpha^*)\theta(\alpha^*) + \Gamma(\alpha^*)\Phi(\alpha^*) \neq 0 \quad (18)$$

ومباشرة لحساب الشرط اعلاه نجد:

دراسات تربوية

الاستقرارية الكلية لنظام رياضي تربوي يدرس تأثير كل من الغياب وترك الدراسة على العملية التربوية والتعليمية.

$$A'_1 = -1; A'_2 = -(b_{22} + b_{33}) ; A'_3 = -A_2 - A_1(b_{22} + b_{33})$$

هذا عند $\alpha = \alpha^*$ نحصل على:

$$\eta = -2A_2 ; \quad \Phi = 2A_1\sqrt{A_2} ; \quad \theta = -A_1(b_{22} + b_{33}) \text{ and}$$

$$\Gamma = -(b_{22} + b_{33})\sqrt{A_2}$$

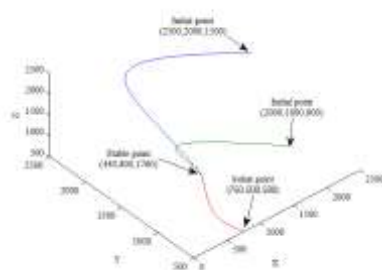
الان بتعويض القيم اعلاه في المعادلة (18) نحصل على ان $\eta\theta + \Gamma\Phi = 0$ وهذا يعني ان النظام (1) لايمتلك تفرع هوبف حول أي نقطة من نقاط التوازن

$$E_i = (X_i, Y_i, Z_i), i = 0, 1, 2, 3$$

6. التحليل العددي للنظام (1):

في هذا القسم درسنا الديناميكية الكلية للنظام (1). الهدف الرئيسي من هذه الدراسة هو فهم وتحليل نتائج تأثير كل من الغائبين عن الدراسة والتاركيين للدراسة على العملية التعليمية في النظام التربوي المقترح. حيث تم الحل العددي للنظام (1) من خلال مجموعة مختلفة من الشروط الابتدائية ومجموعة مختلفة من البارامترات الافتراضية كما هو مبين الشكل (2) ادناه:

$$\Lambda = 300, \beta = 0.2, \alpha = 0.4, \theta = 0.01, \mu = 0.1 \quad (19)$$



الشكل (2)

مسار النظام (1) والذي يبدأ من ثلاث نقاط ابتدائية مختلفة

في الشكل اعلاه والذي يبين الاستقرارية الكلية لنقطة التوازن في حالة وجود كل من الغائبين والناحجين للنظام (1) والذي ينطلق من ثلاث نقاط ابتدائية مختلفة وهي $(2500, 2000, 1500)$, $(2000, 1000, 900)$ و $(750, 500, 500)$ حيث نلاحظ كلها تتجه الى

$$E_3 = (440, 800, 1760) \text{ نقطة التوازن}$$

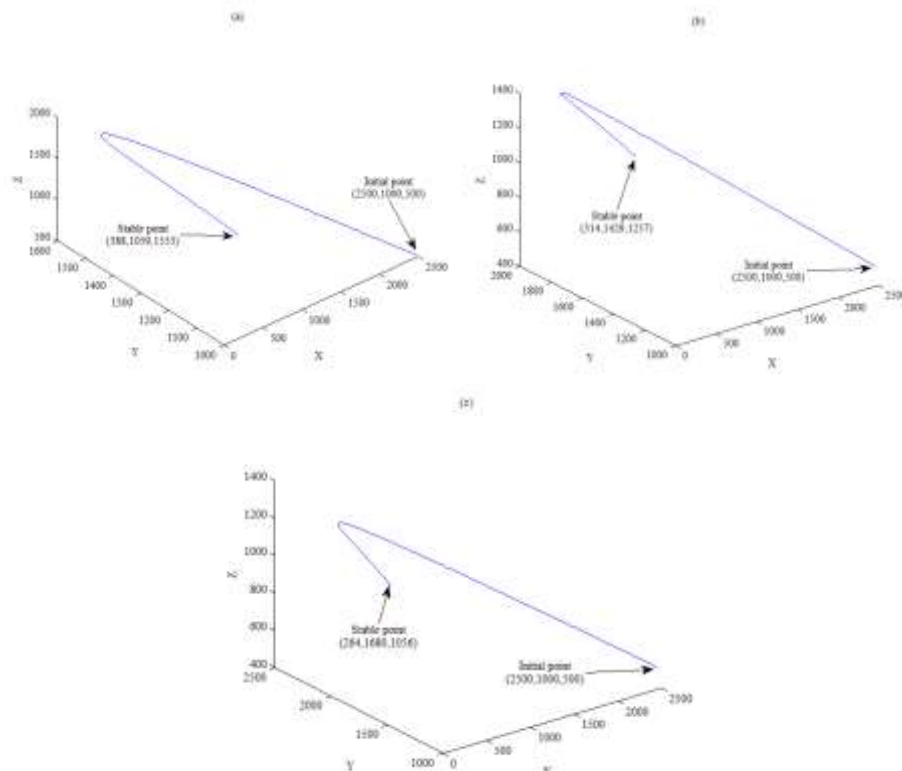
والان ندرس تأثير نسبة الغائبون β على السلوك الديناميكي للنظام (1) من خلال الحل العددي للنظام (1) وذلك بتثبيت قيم البارامترات والميمنة بالمعادلة (19) مع تغيير قيم

$\beta = 0.3, 0.5, 0.7$ حيث ان النتائج تبين في الاشكال (3a-3c) بينما تمثل الاشكال (4a-4b)

المتسلسلة الزمنية للاشكال (3a-3c).

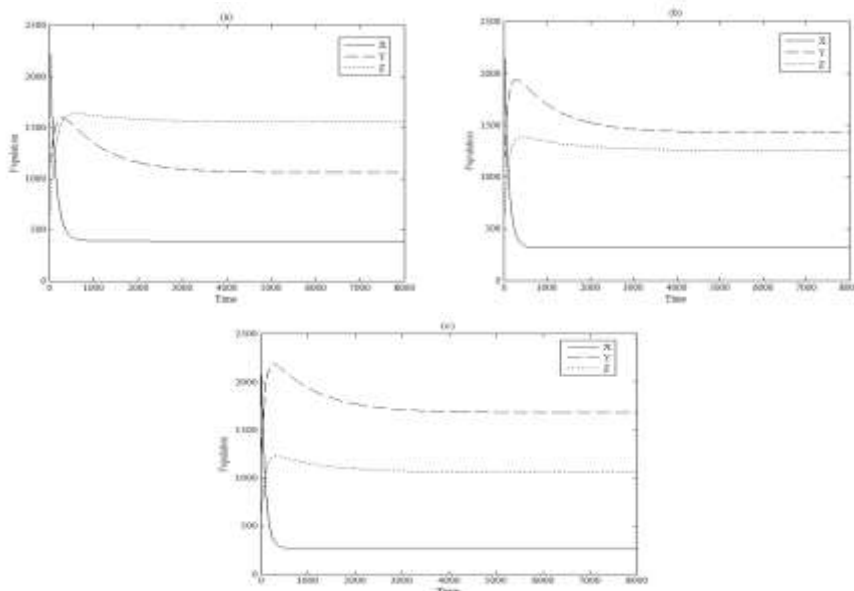
دراسات تربوية

الاستقرارية الكلية لنظام رياضي تربوي يدرس تأثير كل من الغياب وترك الدراسة على العملية التربوية والتعليمية.



الشكل (3)

النظام (1) يتجه نحو نقطة التوازن (E_3) . حيث ان (a) عندما $\beta = 0.3$, (b) عندما $\beta = 0.5$, (c) عندما $\beta = 0.7$.



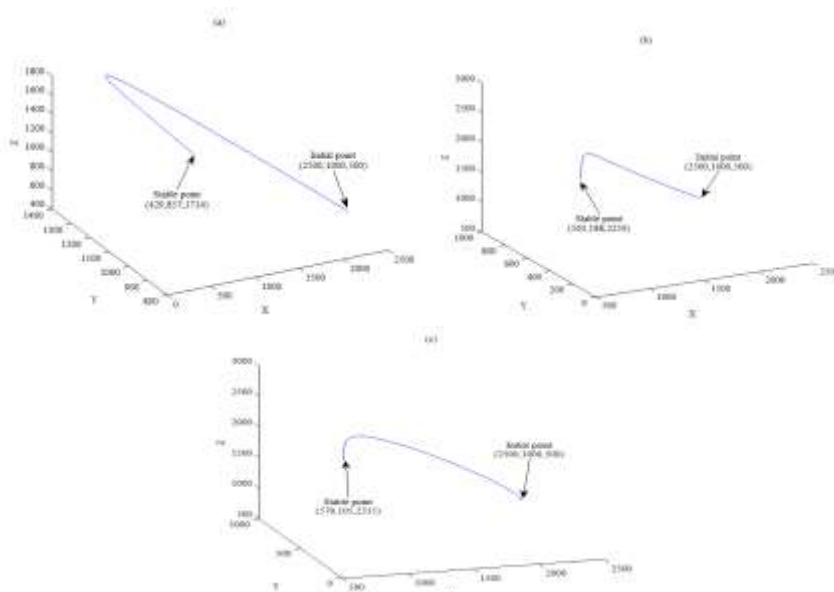
الشكل (4)

هو المتسلسلة الزمنية لحل النظام (1). حيث ان (a) متسلسلة زمنية للشكل (3a), (b) متسلسلة زمنية للشكل (3b), (c) متسلسلة زمنية للشكل (3c).

الاستقرارية الكلية لنظام رياضي تربوي يدرس تأثير كل من الغياب وترك الدراسة على العملية التربوية والتعليمية.

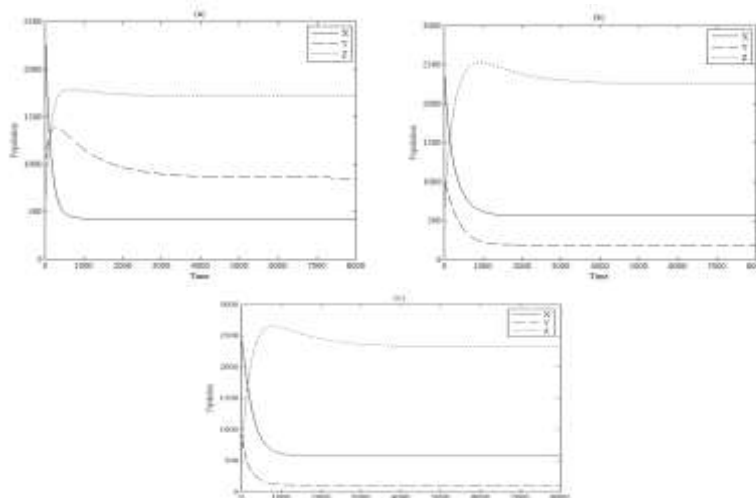
دراسات تربوية

من الواضح من خلال الاشكال اعلاه نلاحظ ان عند الزيادة بقيمة نسبة الغائبون β ان النظام يبقى مستقر ومتجه نحو نقطة التوازن E_3 اضافة الى ذلك نلاحظ ان اعداد كل من الطلبة اثناء الدراسة والطلبة الناجحون يتناقص بينما عدد الطلبة الغائبون في حالة تزايد. تأثير نسبة العائدون الى الدراسة θ على السلوك الديناميكي للنظام (1) من خلال الحل العددي للنظام (1) وذلك بتثبيت قيم البارامترات والمبينه بالمعادلة (19) مع تغيير قيم $\theta = 0, 0.5, 1$ حيث ان النتائج تبين في الاشكال (5a-5c) بينما تمثل الاشكال (6a-6b) المتسلسلة الزمنية للنظام (1).



الشكل (5)

النظام (1) يتجه نحو نقطة التوازن (E_3) . حيث ان (a) عندما $\theta = 0$, (b) عندما $\theta = 0.5$, (c) عندما $\theta = 1$.



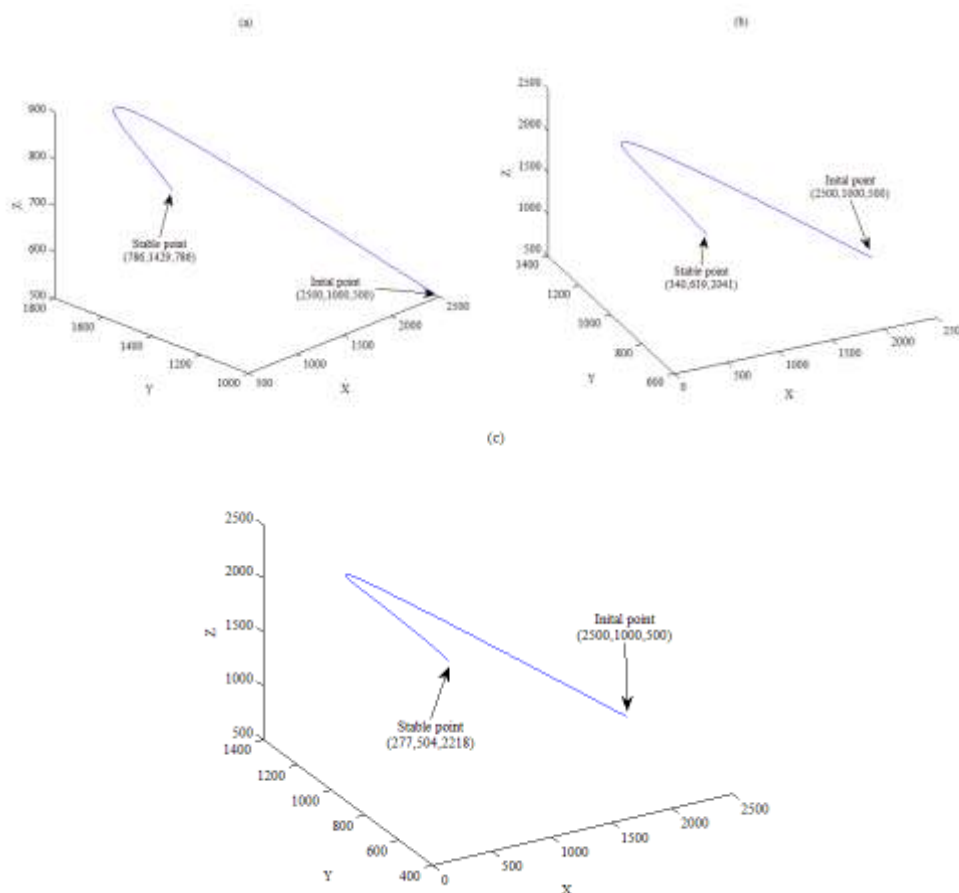
الشكل (6)

هو المتسلسلة الزمنية لحل النظام (1). حيث ان (a) متسلسلة زمنية للشكل (5a), (b) متسلسلة زمنية للشكل (5b), (c) متسلسلة زمنية للشكل (5c).

الاستقرارية الكلية لنظام رياضي تربوي يدرس تأثير كل من الغياب و ترك الدراسة على العملية التربوية والتعليمية.

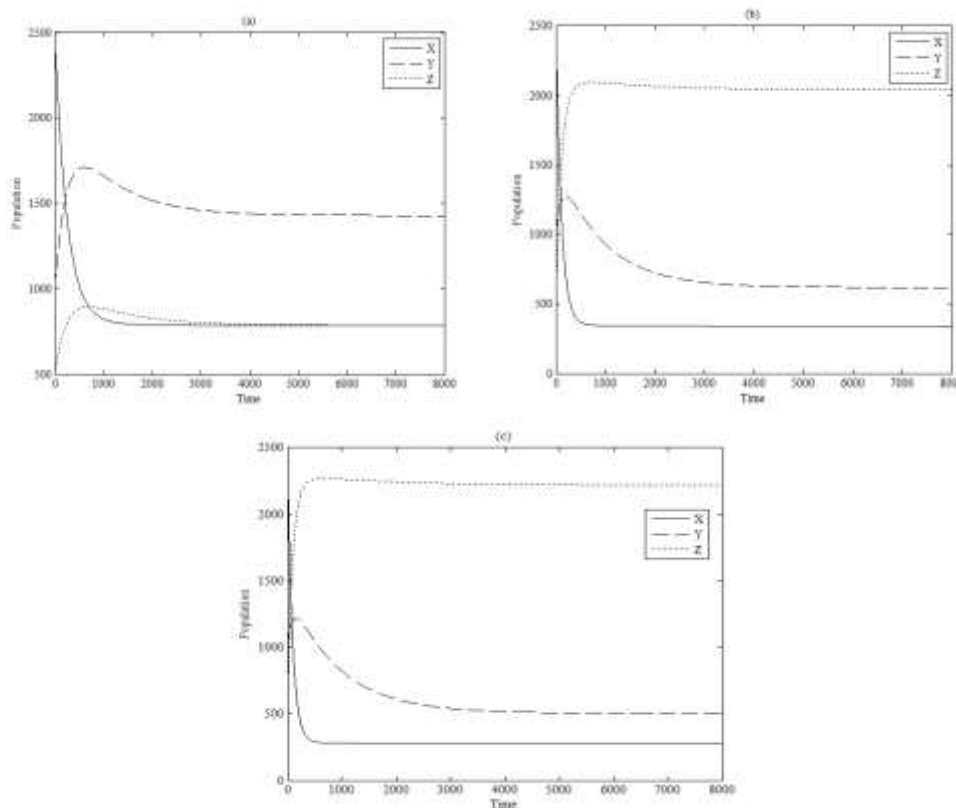
بسهولة نلاحظ في الاشكال اعلاه ان الزيادة بقيمة عودة نسبة الغائبين الى الدراسة θ ان النظام يبقى مستقر ومتجه نحو نقطة التوازن E_3 اضافة الى ذلك نلاحظ ان اعداد كل من الطلبة اثناء الدراسة والطلبة الناجحون يتزايد بينما عدد الطلبة الغائبون يتناقص.

والان ندرس تأثير زيادة نسبة الناجحون α على السلوك الديناميكي للنظام (1) من خلال الحل العددي للنظام (1) وذلك بتثبيت قيم البارامترات والمبينه بالمعادلة (19) مع تغيير قيم $\alpha = 0.1, 0.6, 0.8$ حيث ان النتائج تبين في الاشكال (7a-7c) بينما تمثل الاشكال (8a-8b) المتسلسلة الزمنية للاشكال (7a-7c).



الشكل (7)

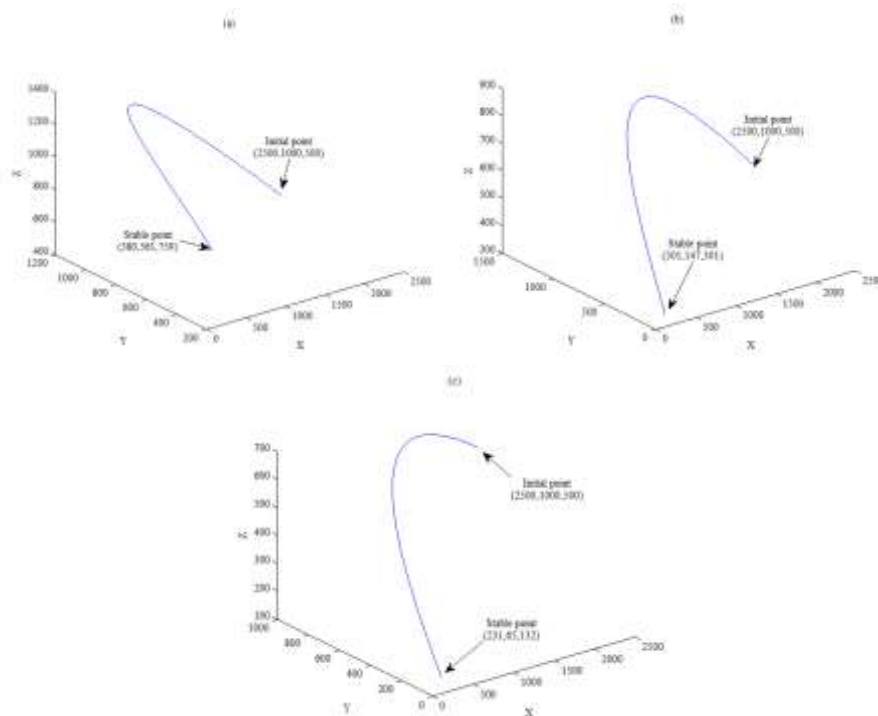
النظام (1) يتجه نحو نقطة التوازن (E_3) . حيث ان (a) عندما $\alpha = 0.1$, (b) عندما $\alpha = 0.6$, (c) عندما $\alpha = 0.8$.



الشكل (8)

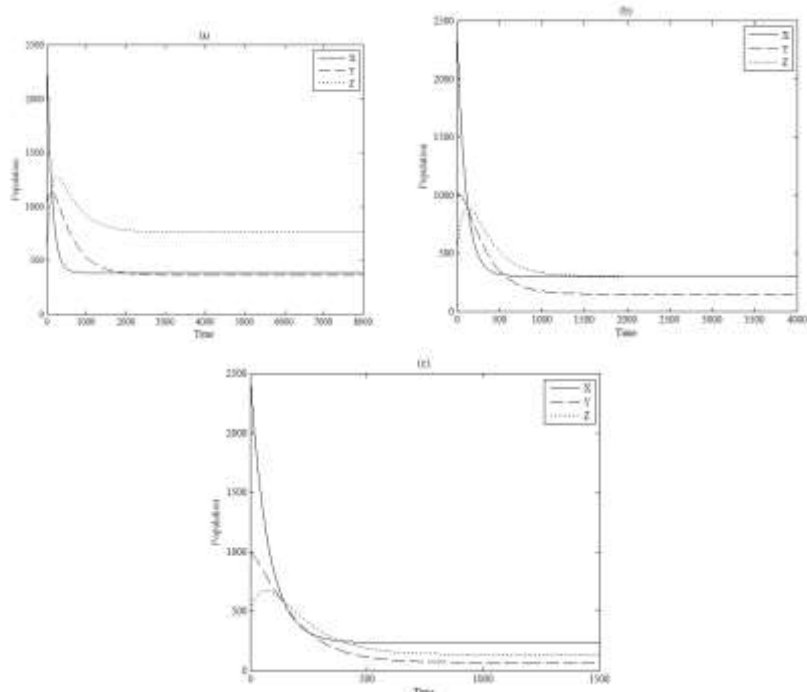
هو المتسلسلة الزمنية لحل النظام (1). حيث ان (a) متسلسلة زمنية للشكل (7a)، (b) متسلسلة زمنية للشكل (7b)، (c) متسلسلة زمنية للشكل (7c).
من الواضح ان في الاشكال اعلاه نلاحظ ان الزيادة بقيمة نسبة الناجحين α ان النظام يبقى مستقر ومتجه نحو نقطة التوازن E_3 اضافة الى ذلك نلاحظ ان اعداد كل من الطلبة اثناء الدراسة والطلبة الغائبون يتناقص بينما عدد الطلبة الناجحون يتزايد.
واخيراً سندرس تأثير زيادة نسبة عدد التاركين للدراسة μ على السلوك الديناميكي للنظام (1) من خلال الحل العددي للنظام (1) وذلك بتثبيت قيم البارامترات والمبينه بالمعادلة (19) مع تغيير قيم $\mu = 0.2, 0.4, 0.7$ حيث ان النتائج تبين في الاشكال (9a-9c) بينما تمثل الاشكال (10a-10b) المتسلسلة الزمنية للاشكال (9a-9c).

الاستقرارية الكلية لنظام رياضي تربوي يدرس تأثير كل من الغياب و ترك الدراسة على العملية التربوية والتعليمية.



الشكل (9)

النظام (1) يتجه نحو نقطة التوازن (E_3) . حيث ان (a) عندما $\mu = 0.2$, (b) عندما $\mu = 0.4$, (c) عندما $\mu = 0.7$.



الشكل (10)

هو المتسلسلة الزمنية لحل النظام (1). حيث ان (a) متسلسلة زمنية للشكل (9a), (b) متسلسلة زمنية للشكل (9b), (c) متسلسلة زمنية للشكل (9c).

من الواضح ان في الاشكال اعلاه نلاحظ ان الزيادة بقيمة نسبة التاركيين للدراسة μ ان النظام يبقى مستقر ومتجه نحو نقطة التوازن E_3 اضافة الى ذلك نلاحظ ان اعداد كل من الطلبة اثناء الدراسة والطلبة الغائبون والطلبة الناجحون يتناقص.

7. الاستنتاجات والمناقشة:

في هذا الجزء، اقترحنا وحللنا نموذج رياضي تربوي يدرس السلوك الديناميكي لتأثير بعض العوامل التي تؤثر على سير العملية التعليمية. حيث يتكون النظام من ثلاثة معادلات تفاضلية خطية تمثل ثلاثة مجتمعات مختلفة X مجتمع الطلاب في فترة الدراسة، Y مجتمع الطلبة الغائبون و Z مجتمع الناجحون. درسنا وحدانية و وجود وقيود الحل للنظام المقترح. تم ايجاد كل نقاط التوازن المحتملة للنظام المقترح وهي اربعة نقاط تسمى $E_i, i = 0,1,2,3$ ، حيث تم ملاحظة ان جميع نقاط التوازن تكون مستقرة استقرار محليا اذا تحقق الشرط (7). كما ان نقطة التوازن الاولى E_0 تكون مستقرة استقرارا كليا اذا تحقق الشرط (9)، والنقطة الثانية E_1 تكون مستقرة استقرارا كليا اذا تحقق الشرطين (10a-10b)، والنقطة الثالثة E_2 تكون مستقرة استقرارا كليا اذا تحقق الشرطين (11a-11b) واخيراً النقطة الرابعة E_3 تكون مستقرة استقرارا كليا اذا تحقق الشرطين (12a-12b). ولفهم تأثير كل البارامترات على الديناميكية الكلية للنظام (1) ولتقديم صورة اوضح للحل التحليلي للنظام قمنا بدراسة عددية للنظام من خلال عدد من الشروط الابتدائية المختلفة وقيم لعدد من البارامترات الافتراضية والملخصة بالاتي:

1. من خلال مجموعة البارامترات الافتراضية المعطاة في المعادلة (19) نلاحظ ان النظام مستقر استقرارا كليا نحو نقطة التوازن الثالثة وهي $E_3 = (440,800,1760)$.
2. النظام دائماً مستقر وغير متذبذب، أي لايمتلك (تفرع هوبف).
3. عند زيادة نسبة الغياب بزيادة نسبة β النظام يتجه نحو نقطة التوازن E_3 كما نلاحظ زيادة في اعداد Y ونقصان في اعداد X, Z . اما اذا كانت قيمة $\beta = 0$ فان النظام (1) يتجه نحو النقطة E_1 .
4. عند زيادة نسبة العائدين من الغياب θ نلاحظ نتائج عكس (تأثير نسبة الغياب β) أي زيادة في اعداد X, Z ونقصان في اعداد Y . ولكن النظام (1) يبقى متجه نحو نقطة التوازن E_3 .
5. في حالة زيادة نسبة الناجحين α ، نلاحظ زيادة في اعداد Z ، ونقصان في اعداد كل من X, Y . والنظام يقترب من نقطة التوازن E_3 . اما في حالة انه لا يوجد نجاح أي ($\alpha = 0$) فان النظام (1) يقترب الى نقطة التوازن E_2 .
6. اخيراً الزيادة في نسبة التاركيين للدراسة μ ينتج عنه نقصان في جميع الاقسام أي في X, Z, Y .

8. المصادر:

1. Murray, J.D., (2002). *Mathematical biology an introduction*. Third edition. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg.
2. Smith, J.M. (1974). *Models in ecology*. Cambridge university press. Great Britain.
3. Raid K., Azhar A., (2012). *Stability analysis of an ecological system consisting of a predator and stage structured prey*, Iraqi journal of science, Vol.53, No.1, 2012, pp.148-155.
4. Dina S., (2010). *The dynamics of stage structured prey-predator model involving parasitic infectious disease*. M.sc. thesis. Department of Mathematics, College of Science, University of Baghdad. Baghdad, Iraq.
5. Kermack, M., McKendrick, A., (1927). *Contributions to the mathematical theory of epidemics Part I*. Proc. Roy. Soc. A 115:700-721.
6. Kribs-Zaleta, C.M., Velasco-Hernandez, J.X., (2000). *A simple vaccination model with multiple endemic states*. Math. Biosci. 164:183-201.
7. Arino, J., McCluskey, C.C., van den Driessche, P., (2003). *Global results for an epidemic model with vaccination that exhibits backward bifurcation*. SIAM J. APPL. MATH. 64: 260-276.
8. Raid K., Ahmed A., (2013). *Stability analysis with bifurcation of an SVIR epidemic model involving immigrations*. Iraqi Journal of Science. Vol 54.No.2.Pp 397 -408.
9. Hirsch, M. W. and Smale, S. (1974). *Differential Equation, Dynamical System, and Linear Algebra*. Academic Press, Inc., New York. p 169-170.
10. May R. M., (1973), *Stability and Complexity in model ecosystem*, Princeton, New Jersey: Princeton University press.