حساب المتوسط والانحراف المعياري لاطوال التشغيل لخطط المجموع المتراكم للتوزيعات غير الطبيعية

Computing Average & Standard deviation for Run Lengths For Non normal Cumulative Sum Schemes

الاستاذ المساعد الدكتورة جنان عباس ناصر

الكلية التقنية الادارية- بغداد

المستخلص

في هذا البحث نتحرى حول خصائص طول التشغيل للوحات سيطرة المجموع المتركم (Cusum) للتوزيعات غير الطبيعية.وذلك بتعميم اسلوب سلسلة ماركوف المتجانسه لكشف الانحرافات الموجبة في متوسط العملية عندما تكون العملية تتبع التوزيع اللوجستي المقترح بانحراف معياري معلوم .وايضا كشف الانحرافات الموجبة في وسيط العملية عندما تكون العملية تتبع توزيع لابلاس المقترح بانحراف معياري معلوم.لحساب المتوسط والانحراف المعياري لطول التشغيل للوحات سيطرة المجموع المتركم عندما يكون المتغير تحت السيطرة يخضع للتوزيع الطبيعي, ومقارنتة مع المتوسط والانحراف المعياري لطول التشغيل لنفس اللوحات عندما يكون المتغير تحت السيطرة يخضع للتوزيع الوجستي وتوزيع لابلاس المقترحين في هذا البحث.نفذت التجارب لعدة توليفات مختلفة لمعلمات لوحة Cusum ولعدد حالات مختلفة في سلاسل ماركوف.استحصلت النتائج باستعمال برامج مكتوبة ببرنامج Matlab –R2008a. تبين النتائج بان لوحات سيطرة Cusum للتوزيع اللوجستي وتوزيع لابلاس كانت اكثر حساسية من لوحات سيطرة Cusum للتوزيع الطبيعي

مفاتيح الكلمات: لوحات السيطرة , المجموع المتركم , متوسط طول التشغيل (ARL),الانحراف المعياري لطول التشغيل (SDRL) ,سلاسل ماركوف, التوزيع الطبيعي ,التوزيع اللوجستي , توزيع لابلاس.

Abstract

In this study, we investigate about the run length properties of cumulative sum control charts. By generalization, the homogenous markov chain approach to detect positive shifts in the mean of the process for the proposed Logistic distribution with known standard deviation. And also to detect a positive shifts in the median of the process for the proposed Laplace distribution with known standard deviation .To compute the average and the standard deviation for run length for Cusum charts, when the variable under control follows the normal distribution. And we compared it with the average and the standard deviation for run length for the same control charts, when the variable under control follows the Logistic distribution and Laplace distribution, which were proposed in this study. The experiments executed for different combinations of the Cusum parameters, and several state numbers for markov chains. The results were obtained by using Programs written using MATLAB-R2008a program .The results shown that Cusum control charts for Logistic distribution and Laplace distribution were more sensitive than the Cusum control charts for normal distribution.

Key Words: Control Charts, Cumulative sum, Average Run Length (ARL), Standard Deviation Run Length (SDRL), Markov Chains, Normal Distribution, Logistic Distribution, and Laplace Distribution.

1. المقدمة والخلفية التاريخية:

تعد نوعية المنتج قضية مهمة في الوقت الحاضر خاصة في القطاعات الصناعية, إذ إن الهدف الرئيسي للقطاعات الصناعية هو ملائمة نوعية المنتج الذي يتم إنتاجه لمتطلبات الزبائن. وعادة ما تستعمل لوحات السيطرة التي تكون أداة فعالة في عملية السيطرة الإحصائية في القطاعات الصناعية.ويتم الاعتماد على معيار متوسط طول التشغيل ((Average Run Length(ARL) لغرض المقارنة بين لوحات السيطرة والذي يعرف بأنه معدل عدد العينات المفحوصة لحين ورود إلى ما يشير إلى إن العملية أصبحت خارج السيطرة ويكون هذا المعدل كبير عندما تكون العملية تحت السيطرة في حين يكون صغير عندما تكون العملية خارج السيطرة. وقد استعملت عدة أساليب لحساب قيم ARL للوحة المجموع المتراكم (Cusum),منها أسلوب سلاسل ماركوف المقترح من قبل الباحثان Brook و Evans [4] في عام 1972 الذي يمتاز بسهولته بدلا من أسلوب سلسلة اختبارات النسبة الاحتمالية التتابعية (SPRT) الذي يتطلب فيها حل معادلات تكاملية لإيجاد العدد المتوسط للعينة. وفي عام 1985استخدم تقريب Siegmund [15] لحساب قيم ARL للوحة Cusum من جانبين. وفي عام 2012 اقترح الباحث Hanif وآخرون معه [9] تقريب ابسط من تقريب Siegmund لحساب قيم ARL للوحة Cusum من جانب واحد. ونظرا للتطبيقات الواسعة للوحات السيطرة على النوعية في كافة المجالات الصناعية والاقتصادية فقد تناول العديد من الباحثين دراسة وتحليل لوحة Cusum نذكر منها :-

في عام 1972 استخدم الباحثان Brook و Evans [4] أسلوب سلاسل ماركوف لدراسة خصائص التوزيع الاحتمالي لطول التشغيل للوحة المجموع المتراكم (Cusum) من جانب واحد الأعلى عندما تكون العملية تحت السيطرة تخضع للتوزيع الاحتمالي المستمر أو المتقطع.في عام 1984 استخدم الباحث Woodall [23] أسلوب سلاسل ماركوف لدراسة خصائص التوزيع الاحتمالي لطول التشغيل للوحة Cusum من جانبين.في عام 1985 درس الباحثان Vardeman و Ray [19] متوسط أطوال التشغيل للوحات Cusum عندما تكون العملية تحت السيطرة تخضع للتوزيع الاحتمالي الاسي .في عام 1986 درس الباحث Waldmann [20] حدود التوزيع الاحتمالي لمتوسط أطوال التشغيل للوحات Cusum من جانب واحد ومن جانبين .في عام 1992 درس الباحث Gan [6] توزيع طول التشغيل المضبوط للوحات Cusum من جانب واحد عندما تكون العملية تحت السيطرة تخضع للتوزيع الاحتمالي الاسي. ثم تناول الباحث نفسه عام 1994 [7] التصميم الأمثل للوحات Cusum عندما تكون العملية تحت السيطرة تخضع للتوزيع الاحتمالي الاسي.وفي نفس العام درس الباحث Gan [8] حساب متوسط أطوال التشغيل للوحات Cusum عندما تكون العملية تحت السيطرة تخضع لتوزيع بواسون .في عام 1996 تناول الباحثان White و Keats [22] دراسة متوسط أطوال التشغيل وعزوم طول التشغيل من الرتب العليا للوحة Cusum, عندما تكون العملية تحت السيطرة تخضع لتوزيع يواسون. ثم تناول الباحث White وآخرون في عام 1997 [21]مقارنة للوحة Cusumعندما تكون العملية تحت السيطرة تخضع لتوزيع بواسون مع لوحة – c لنسب المعيب .في عام 2000 استخدمت الباحثه جنان [1] أسلوب سلاسل ماركوف لتحديد التوزيع الاحتمالي لمتوسط طول التشغيل للوحة Cusum من جانب واحد الأعلى ,ودراسة خصائص التوزيع الاحتمالي لطول التشغيل عندما تكون العملية تحت السيطرة تخضع للتوزيع الاحتمالي المتقطع (توزيع يواسون),وللتوزيع

الاحتمالي المستمر (التوزيع الطبيعي).وفي عام 2001 تناولت الباحثة نفسها [2] دراسة التوزيع الاحتمالي لمتوسط طول التشغيل لطول التشغيل للوحة Cusum من جانب واحد الأعلى ,بالاعتماد على اسلوب سلاسل ماركوف لدراسة خصائص التوزيع الاحتمالي لطول التشغيل بالاعتماد على الالتواء والتفلطح لطول التشغيل للوحة Cusum ,عندما تكون العملية تحت السيطرة تخضع للتوزيع الاحتمالي المتقطع توزيع ثنائي الحدين.في عام 2003 درس الباحث Borror وآخرون معه [3] رصانة لوحات Cusum التي تعتمد على التوزيع الوقت بين الحوادث (Time-Between events(TBE)) عندما يكون المتغير تحت السيطرة يتبع التوزيع الاسي , وتوصلوا إلى تغير التوزيع الاحتمالي لم يؤثر كثيرا على قدرة لوحة TBE Cusum لاكتشاف التغيرات في العملية,وقد كانت لوحة TBE Cusum رصينة جدا عند خضوع المتغير تحت السيطرة الإحصائية للتوزيع إلا سي.في عام 2004 اقترح الباحث Yeh وآخرون معه [25] للوحة Cusum جديدة لكشف الانحرافات الصغيرة في المتوسط والانحراف المعياري للعملية تحت السيطرة عندما يكون الانحراف المعياري مساوي للواحد للتوزيع الطبيعي, ثم عمم هذه اللوحة لتوزيعات غير طبيعية (التوزيع المنتظم بالفترة $U(0,1)$ وبالفترة $U(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$).وقد استخدموا أسلوب سلاسل ماركوف للكشف عن قابلية تلك اللوحة مقارنة بلوحة Cusum المنفردة للكشف الانحراف في متوسط العملية, ولوحة Cusum المنفردة للكشف الانحراف في الانحراف المعياري للعملية .في عام 2005 اشتق الباحثان Tan و Pooi [16] صيغة تكرارية لإيجاد توزيع طول التشغيل لوحة Cusum من جانبين للتحري عن أداء تلك اللوحة عندما تكون العملية تحت السيطرة تخضع للتوزيع الاحتمالي الطبيعي.في عام 2008 قارن الباحث Pehlivan [12] بين لوحات السيطرة النوعية متضمن لوحة شيوارت ولوحات Cusum و لوحات المتوسط المتحرك الموزون أسيا (EWMA) ولوحات سيطرة تعتمد على توزيع الوقت بين الحوادث (Time-Between events(TBE)).وقد استعمل أسلوب سلاسل ماركوف لدراسة رصانة لوحات السيطرة عندما يكون المتغير تحت السيطرة يتبع التوزيع اللوغارتمي الطبيعي , والتوزيع الاسي وتوزيع ويبل.في عام 2010 اقترح الباحث Yang وآخرون معه [24] للوحة Cusum للوسيط ومقارنتها بين عدة لوحات سيطرة بالاعتماد على قيم متوسط طول التشغيل لتلك اللوحات عندما تكون العملية تحت السيطرة تخضع للتوزيع الاحتمالي الطبيعي الملوث, واستنتجوا بان لوحة Cusum للوسيط تكون أكثر كفاءة عندما تتضمن العملية بعض القيم الشاردة (Outliers) وان أدائها يكون مشابه لأداء لوحات EWMA.في عام 2010 اقترح الباحث Ryu وآخرون معه [14] للوحة Cusum المعتمدة على طول التشغيل الموزون (EWRL) عندما يكون حجم التغيير في متوسط العملية غير معلوم,ثم قارن تلك اللوحة مع لوحة Cusum بالاعتماد على متوسط طول التشغيل (ARL) لتلك اللوحتين.ومن النتائج العديدة لقيم ARL المحتسبة بالاعتماد على تقريب Siegmund, تبين بان أداء لوحة Cusum يمكن تحسينه بالاعتماد على طول التشغيل الموزون ويمكن تعميمه للوحات أخرى مثل لوحات Multi-Cusum.في عام 2011 قارن الباحث Koshti [10] للوحة شيورات ولوحة Cusum باستخدام المحاكاة لحساب قيم ARL باستعمال برنامج c – وتوصل إلى إن أداء لوحة Cusum يكون أفضل من أداء لوحة شيورات عند الكشف عن الانحراف في المتوسط بحجم 1.5σاو اقل منه. في عام 2012 اقترح الباحث Petcharat وآخرون معه [13] صيغ مبسطة لحساب قيم ARL للوحة Cusum عندما تكون المشاهدات تخضع لتوزيعات مذيلة طويلة.إذ تم تقدير معلمات توزيع Pareto و

توزيع Hyperexponential باستعمال أسلوب Feldmann &Whitt (FW) لتقدير قيم ARL للوحة Cusum.و قورنت النتائج مع التقريبات العددية ومع أسلوب معادلات التكامل .في عام 2012 اقترح الباحث Hanifوآخرون معه [9] تقريب ابسط من تقريب Siegmund لحساب قيم ARL للوحة Cusum من جانب واحد, وقورن التقريب المقترح مع تقريب Siegmund لقيم مختلفة للتغييرفي متوسط العملية .

وبناء على ما تقدم فان هدفنا في هذا البحث هوالتحرى عن خصائص طول التشغيل للوحات سيطرة المجموع المتركم (Cusum) للتوزيعات غير الطبيعية.وذلك بتعميم اسلوب سلسلة ماركوف المتجانسه للكشف عن الانحرافات الموجبة في متوسط العملية عندما تكون العملية تتبع التوزيع اللوجستي المقترح بانحراف معياري معلوم.وكشف الانحرافات الموجبة في وسيط العملية عندما تكون العملية تتبع توزيع لابلاس المقترح بانحراف معياري معلوم .وذلك بتقدير المتوسط والانحراف المعياري لطول التشغيل للوحات سيطرة المجموع المتركم ومقارنتة مع المتوسط والانحراف المعياري لطول التشغيل لنفس اللوحات عندما يكون المتغير تحت السيطرة يخضع للتوزيع الطبيعي بانحراف معياري معلوم وتحديد مدى تقارب تلك التوزيعات الثلاثة بالاعتماد على المتوسط والانحراف المعياري لطول التشغيل للوحات سيطرة المجموع المتراكم .

2. لوحة Cusum لمراقبة متوسط العملية

لتكن $\mathbf{x_i}$ المشاهدة رقم $\mathbf{i^{th}}$ للعملية تحت السيطرة وموزعة طبيعيا بمتوسط $(\boldsymbol{\mu_0})$ وتباين مقداره $(\boldsymbol{\sigma^2})$.وتمثل $(\boldsymbol{\mu_0})$ قيمة متوسط العملية عند مستوى النوعية المقبول أو تسمى بـ (Target Value) لخاصية النوعية $\mathbf{x_i}$.ويتم حساب احصاءة المجموع المتراكم (Cusum) من جانبين على وفق الصيغة الآتية[11] :

$$\mathbf{C_i^+ = Max[0, x_i - (\mu_0 + k) + C_{i-1}^+]} \quad \dots (1)$$

$$\mathbf{C_i^- = Max[0, (\mu_0 - k) - x_i + C_{i-1}^-]} \quad \dots (2)$$

حيث إن القيم الأولية لأحصاءة Cusum تكون مساوية للصفر,إي $\mathbf{C_0^+ = C_0^- = 0}$ وان $\mathbf{C_i^+}$ تسمى الحد الأعلى التراكمي للكشف عن الانحرافات الموجبة للعملية و $\mathbf{C_i^-}$ تسمى الحد الادني التراكمي للكشف عن الانحرافات السالبة للعملية. وان k تسمى القيمة المرجعية (Reference Value) أو قيمة السماح وقيمتها مساوية لـ

$$\mathbf{k = \frac{\delta^*}{2}\sigma = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}} \quad \dots (3)$$

إذ إن $\boldsymbol{\mu_1}$ يمثل متوسط العملية خارج السيطرة وقيمته مساوية لـ $\boldsymbol{\mu_1 = \mu_0 + \delta^*\sigma}$, وتمثل $\boldsymbol{\delta^*}$التغير في متوسط العملية الذي نرغب باكتشاف بوقت مبكر وقيمتها مساوية لـ

$$\boldsymbol{\delta^* = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma}} \quad \dots (4)$$

فاذا تجاوزت قيمة احصاءة Cusum ($\mathbf{C_i^+}$او $\mathbf{C_i^-}$) حدي اتخاذ القرار الموجب أو السالب (H أو H −),فان العملية تعد خارج السيطرة ويتطلب إجراء عملية تصحيح للعملية لأعادتها تحت السيطرة. إذ إن التقدير الملائم لحد

اتخاذ القرار يكون مساوي لـ $\mathbf{H} = 5\boldsymbol{\sigma}$.إما لوحة Cusum من جانب واحد لمراقبة متوسط العملية (الانحرافات الموجبة) فان حد اتخاذ القرار سيكون بين الصفر و H, إي إن (0 و H) وسيتم إيقاف العملية الإنتاجية إذ كانت قيمة $\mathbf{H} < \mathbf{C}_\mathbf{i}^+$ اواذا وقعت قيمة $\mathbf{C}_\mathbf{i}^+$عند الصفر.و الشئ نفسه عند الكشف عن الانحرافات السالبة في متوسط العملية .

3. حساب متوسط طول التشغيل (Average Run Length (ARL))

يعد متوسط طول التشغيل (ARL) المعيار الشائع الاستعمال لغرض المقارنة بين لوحات السيطرة وتحديد قوة قدرة لوحة السيطرة على النوعية في اكتشاف التغيرات الموجبة والسالبة في متوسط العملية تحت السيطرة [11] .فقد استعملت عدة أساليب لحساب قيم ARL للوحة Cusum التي سبق وان تقدم ذكرها. وفي هذا البحث فقد اعتمد اسلوب سلاسل ماركوف لحساب المتوسط والانحراف العياري لطول التشغيل عندما يكون المتغير تحت السيطرة يخضع للتوزيعين اللوجستي ولابلاس (المقترحين في هذا البحث).مع صيغ الاشتقاق الخاصة بتوزيع احصاءة الاختبار للوحة Cusum لكلا التوزيعين المتقدم ذكرهما.

3.1 أسلوب سلاسل ماركوف الاسلوب المستخدم في البحث

يبدأ أسلوب سلاسل ماركوف المقترح من قبل الباحثان Brook و Evans [4] في عام 1972 بتقريب انتقالات احصاءة الاختبار للوحة Cusum من جانب واحد الأعلى لأسلوب سلاسل ماركوف للحصول قيم متوسط طول التشغيل لأيجاد حل مضبوط.وقد طبق أسلوب سلاسل ماركوف في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة (توزيع بواسون) والمستمرة (التوزيع الطبيعي).واستعمل هذا الأسلوب من قبل العديد من الباحثين،نذكر منهم الباحثان Champ و Rigdon [5] عام (1991),الذين قاما بمقارنة اسلوب معادلة التكامل مع اسلوب سلسلة ماركوف,وتوصلوا إلى إن هناك حالات معينة يكون فيها اسلوب سلاسل ماركوف اكثر ملائمة .

وفي أسلوب سلاسل ماركوف وفي حالة المتغيرات العشوائية المستمرة ,نفترض لوحة Cusum للجانب واحد الأعلى بان العملية تتوقف إذا كانت الانحرافات المتراكمة لـ z عن القيمة المرجعية (k) إي (z−k) تصل حد القرار الأعلى (H) أو يكون المجموع المتراكم مساوي للصفر[1, 2,4].

إذ يتم تمثيل لوحة Cusum من جانب واحد بعملية ماركوف بمجال حالة مستمر (Continuous State Space). وبافتراض إن عدد الحالات لسلسلة ماركوف تكون مساوية لـ t+1 والتي سميت بـ $\mathbf{E_0}, \mathbf{E_1}, \ldots, \mathbf{E_t}$, حيث ان الحالة $\mathbf{E_t}$ الحالة المشبعة (Absorbing State). وان احتمال السلسلة تبقى قي نفس الحالة بالخطوة التالية, يجب إن يكون مطابق للحالة التي يكون فيها قيمة المجموع المتراكم لا تتغير بأكثر من مقدار صغير ليكن (0.5w) يعني بان القيمة التالية لـ z لا تنحرف عن القيمة المرجعية (k) بمقدار أكثر من (0.5w), إذ إن القيمة لـ (w) تحد العرض لفترة التجميع (The grouping interval) التي استعملت لتجزئة التوزيع الاحتمالي لـ z. ويتم اختيار قيمة w بعناية كبيرة لأنها تؤثر على خصائص متوسط طول التشغيل والنقاط المئوية لطول التشغيل لهذه اللوحة. فضلا عن تأثير الكبر لعرض فترة القرار, ولغرض تفادي إي سلوك غير مرغوب به تم وضع القيد الأتي:

هو ان احتمال الانتقال من الحالة $\mathbf{E_i}$ الى الحالة المشبعة $\mathbf{E_t}$ ينبغي إن يكون مساوي لاحتمال بان قيمة المجموع المتراكم للوحة Cusum إي (z–k) تنتقل ما بعد النقطة H بالفترة صفر وh إي (0, H) التي تقريبا مناظرة للحالة $\mathbf{E_i}$ ولذا اختيرت قيمة w لتكون على وفق الصيغة الآتية :

$$w = \frac{2H}{(2t-1)} \qquad \dots (8)$$

وان الاحتمالات الانتقالية لسلسلة ماركوف للحالات $i=0,1,2,\dots t-1$ كالأتي :

$$P_{i0} = P_r(E_i \to E_0) = P_r(z - k \le -i\,w + 0.5w) \qquad \dots (9)$$

$$P_{ij} = P_r(E_i \to E_j) = P_r((j-i)\,w - 0.5 \le z - k \le (j-i)\,w + 0.5w) \quad ,1 \le j \le t-1 \qquad \dots (10)$$

$$P_{it} = P_r(E_i \to E_t) = P_r((t-i)\,w - 0.5 \le z - k) \qquad \dots (11)$$

ان $\mathbf{P_r(E_0 \to E_t) = P_r(z - k > H)}$ تمثل القيمة الاحتمالية لطول التشغيل لاية قيمة لـ w تحقق الصيغة (8) عندما تكون القيمة الاحتمالية لطول التشغيل مساوية لـ $\mathbf{P_r = P_r(r\,w - 0.5 < z - k \le rw + 0.5w)}$.وان القيمة الاحتمالية التجميعية لطول التشغيل مساوية لـ $\mathbf{F_r = P_r(z - k \le rw + 0.5w)}$.إذ إن طول التشغيل يكون طويل عندما تكون العملية تحت السيطرة في حين يكون قصير عندما تحيد العملية عن السيطرة الإحصائية.

وبذلك نعرف مصفوفة الاحتمالات الانتقالية P التي تكون على وفق الصيغة الآتية :

$$P = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & (\mathbf{I}-\mathbf{R})\underline{\mathbf{1}} \\ \hline \mathbf{0^T} & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

إذ إن I مصفوفة وحدة من الرتبة $\mathbf{t \times t}$, و إن $\underline{\mathbf{1}}$ متجه عمودي من الرتبة $\mathbf{t \times 1}$ تكون قيمة كل عنصر من عناصره مساوية للواحد.وان R مصفوفة جزئية من مصفوفة الاحتمالات الانتقالية P برتبة $\mathbf{t \times t}$ والتي يتم حسابها بالاعتماد على الصيغة (9,10) .وان $\mathbf{0^T}$ تمثل مبدلة متجه صفري من الرتبة $\mathbf{1 \times t}$. يتم الحصول على قيم متوسط طول التشغيل (ARL) على وفق الصيغة الآتية:

$$ARL = \mu = (I - R)^{-1}\underline{1} \qquad \dots (12)$$

وباستعمال العلاقة $\mathbf{(I - R)\,\mu^{(s)} = s\,R\;\mu^{(s)}}$ حيث ان $\mathbf{s = 2, 3, \dots}$ وبالاعتماد على العلاقة بين العزوم العاملية والعزوم المركزية (انظر المصدر[2]),يمكن ايجاد الانحراف المعياري لطول التشغيل (SDRL) على وفق الصيغة الآتية :

$$SDRL = \sqrt{2\,((I - R)^{-1} - I)\,\mu + \mu\; - (\mu)^2} \qquad \dots (13)$$

حيث إن أول عنصر بالمتجه μ يعطي قيم متوسط طول التشغيل للوحة Cusum بداء من الصفر وبشكل عام من العنصر i^{th},إي تعطي المتوسط لطول التشغيل عندما تبدءا الخطة من الحالة $E_i \;,\; i = 0,1,2,\ldots t-1$.

وقد استخدم أسلوب سلاسل ماركوف من قبل الباحثان Brook و Evans [4] في عام 1972 لدراسة خصائص طول التشغيل للوحة Cusum للجانب واحد الأعلى,للكشف عن الانحرافات الموجبة في متوسط العملية الإنتاجية عندما يكون المتغير تحت السيطرة يخضع للتوزيع الطبيعي بانحراف معياري معلوم .أي إن

$$z \sim \text{Normal Dist}^{\,n}(\mu\,,\,\sigma)$$

وان التوزيع الاحتمالي لأحصاءة للوحة Cusum للجانب الاعلى فقط واحد الأعلى سيكون

$$z-k \sim \text{Normal Dist}^{\,n}(\mu-k\,,\,\sigma) \qquad \ldots (14)$$

والذي يستخدم لأيجاد القيم الاحتمالية P_{ij}للمصفوفة P وعلى وفق الصيغ (11,10,9) المبينة أعلاه.وغالبا ما تحيد العملية تحت السيطرة النوعية عن التوزيع الطبيعي في اغلب التطبيقات العملية.لذا سيتم تعميم أسلوب سلاسل ماركوف لتوزيعات أخرى كالتوزيع اللوجستي لمراقبة التغير في متوسط العملية الإنتاجية وتوزيع لابلاس لمراقبة التغير في وسيط العملية. فقد تم تقريب التوزيع الاحتمالي لأحصاءة المجموع المتراكم $(z-k)$ للتوزيعين اللوجستي ولابلاس من خلال اعتماد معلمة الشكل ومعلمة القياس وكما سيرد توضيحه في أدناه .

أولا: التوزيع اللوجستي (Logistic Dist^{n}.) المقترح استخدامه بالبحث لمراقبة متوسط العملية

فإذا كان متوسط العملية الانتاجية (z) يخضع للتوزيع اللوجستي بالمعلمتين α و B,اي إن

$$z \sim \text{Logistic Dist}^{\,n}(\alpha\,,\,\beta)$$

وان معلمة الشكل α تناظرالمعلمة μ في التوزيع الطبيعي والمعلمة القياس β تناظر المعلمة σ في التوزيع الطبيعي , علما بان حدود الدالة الاحتمالية للتوزيع اللوجستي هي $I_{(-\infty,\infty)}(z)$, وهي مماثله لحدود دالة التوزيع الطبيعي. وتكون قيمة المتوسط لكلا التوزيعين مساوية لـ $\mu = \alpha$, وان الانحراف المعياري للتوزيع اللوجستي يكون مساوي لـ $\sigma = \sqrt{\dfrac{\pi^2\beta^2}{3}}$ حيث ان $\pi = 3.1416$ تمثل النسبة الثابتة.وبذلك فان التوزيع الاحتمالي لأحصاءة لوحة Cusum للجانب واحد الأعلى سيكون كالأتي [18]:

$$z-k \sim \text{Logistic Dist}^{\,n}(\alpha-k\,,\,\beta) \qquad \ldots (15)$$

ويمكن برهنة صيغة التوزيع الاحتمالي لأحصاءة $z-k$ كالاتي :

بافتراض ان متوسط العملية الانتاجية (z) يخضع للتوزيع اللوجستي بالمعلمتين α وβ,اي إن

$$f(z;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta}\,\frac{\exp-((z-\alpha)/\beta)}{[1+\exp-((z-\alpha)/\beta)]^2} \quad , \quad (-\infty<\alpha<\infty,\ \beta>0) \qquad \ldots (16)$$

حيث ان قيمة المعلمة α تكون بين $(-\infty,\infty)$, اي ان $(-\infty < \alpha < \infty)$.وان قيمة المعلمة βتكون اكبر من الصفر, اي ان $(\beta > 0)$. ان أحصاءة $C_i^+ = z - k$ فان $z = C_i^+ + k$ وان $\left|\frac{dz}{dC_i^+}\right| = 1$ فان حدود توزيع احصاءة الاختبار ستكون كالأتي :

$$\text{if} \quad z = -\infty \rightarrow C_i^+ = -\infty$$
$$\text{if} \quad z = \infty \rightarrow C_i^+ = \infty$$

وان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع أحصاءة المجموع المتراكم $(C_i^+ = z - k)$ستكون على وفق الأتي:

$$f(C_i^+) = f(z = C_i^+ + k\ ;\alpha,\ \beta)\left|\frac{dz}{dC_i^+}\right| \quad , \ I_{(-\infty,\infty)}(z)\ , \quad (-\infty < \alpha < \infty,\ \beta > 0)$$

وباعادة ترتيب

$$f(C_i^+) = \frac{1}{\beta}\frac{\exp-((C_i^+ + k - \alpha)/\beta)}{[1+\exp-((C_i^+ + k - \alpha)/\beta)]^2} \quad , \ I_{(-\infty,\infty)}(z)\ , (-\infty < \alpha < \infty,\ \beta > \qquad \ldots (17)$$

المعلمات داخل الحد الاسي في الصيغة (17) نحصل على

$$f(C_i^+) = \frac{1}{\beta}\frac{\exp-((C_i^+ - (\alpha - k))/\beta)}{[1+\exp-((C_i^+ - (\alpha - k))/\beta)]^2} \quad , \ -\infty < C_i^+ < \infty$$
$$\& \ (-\infty < \alpha < \infty,\ \beta > 0) \qquad \ldots (18)$$

وبذلك فان حد القرار للوحة Cusum للتوزيع اللوجستي لمراقبة متوسط العملية سيكون مساوي لـ $H = 5\sigma = 5\sqrt{\frac{\pi^2\beta^2}{3}}$, وان القيمة المرجعية ستكون مساوية لـ $k = \frac{\delta^*}{2}\sigma = \frac{\delta^*}{2}\sqrt{\frac{\pi^2\beta^2}{3}} = \frac{|\alpha_1 - \alpha_0|}{2}$.

ويمكن تقدير معلمتي التوزيع اللوجستي بعدة طرق منها طريقة العزوم والتي تعتمد على المتوسط والانحراف المعياري للعينة أو بإحدى طرق التقدير اللأخطية.

ثانيا : توزيع لابلاس (Laplace Dist^n.) المقترح استخدامه بالبحث لمراقبة وسيط العملية

فإذا كان وسيط العملية الإنتاجية (z) يخضع لتوزيع لابلاس بالمعلمتين α و β,إي إن توزيع z

$$z \sim \text{Laplace Dist.}^n(\alpha\ ,\ \beta)$$

وان معلمة الشكل αمناظره للمعلمة الشكل μفي التوزيع الطبيعي والمعلمة القياس β تناظرالمعلمة σ في التوزيع الطبيعي,علما بان حدود الدالة الاحتمالية لتوزيع لابلاس هي $I_{(-\infty,\infty)}(z)$,وهي مماثله لحدود دالة

التوزيع الطبيعي.وتكون قيمة الوسيط لتوزيع لابلاس مساوية لـ $\textbf{Median} = \alpha$, وان الانحراف المعياري لتوزيع لابلاس مساوية لـ $\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{2}\beta$.وبذلك فان التوزيع الاحتمالي لأحصاءة لوحة Cusum للجانب واحد الأعلى سيكون كالأتي [17]:

$$\mathbf{z - k \sim Laplace\ \ Dist\ .^{n}(\ \alpha - k\ ,\ \beta\ )} \qquad \ldots\ (19)$$

ويمكن برهنة صيغة التوزيع الاحتمالي لأحصاءة $\mathbf{z - k}$ كالاتي :

بافتراض إن وسيط العملية الانتاجية (z) يخضع لتوزيع لابلاس بالمعلمتين αو β ,إي إن

$$\mathbf{f\,(\,z\,;\alpha\,,\,B\,) = \frac{1}{2\,\beta}\ exp\text{-}(\left|\ (z\text{-}\alpha)\ \right|/\beta\,)\ ,\ I_{\ (\text{-}\infty,\,\infty)}(\,z\,),\ (\,\text{-}\infty < \alpha < \infty,\ \beta > 0\,)} \qquad \ldots\ (20)$$

حيث ان قيمة المعلمة α تكون بين $(\infty\ ,\infty\ \text{-}\,)$, اي ان $(\,\text{-}\,\infty < \alpha < \infty\,)$.وان قيمة المعلمة βتكون اكبر من الصفر, اي ان $(\beta > \mathbf{0})$. وان أحصاءة $\mathbf{C_i^{+} = z\text{ - }k}$ فان $\mathbf{z = C_i^{+} + k}$ وان $\left|\dfrac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dC_i^{+}}}\right| = \mathbf{1}$ فان حدود توزيع احصاءة الاختبار ستكون كالأتي :

$$\mathbf{if}\quad \mathbf{z} = -\infty \rightarrow \mathbf{C_i^{+}} = -\infty$$

$$\mathbf{if}\quad \mathbf{z} = \infty \rightarrow \mathbf{C_i^{+}} = \infty$$

وان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع أحصاءة المجموع المتركم $(\,\mathbf{C_i^{+} = z\text{ - }k}\,)$ستكون على وفق الأتي :

$$\mathbf{f\,(\,C_i^{+}\,) = f\,(z = C_i^{+} + k\ \ ;\alpha\,,\ \beta\,)}\left|\frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dC_i^{+}}}\right| \qquad ,\qquad (\,\text{-}\infty < \alpha < \infty,\ \beta > \mathbf{0}\,)$$

$$\mathbf{f\,(\,C_i^{+}\,) = \frac{1}{2\,\beta}\ exp\text{-}(\left|\ (C_i^{+} + k\text{-}\alpha)\ \right|/\ \beta),}\qquad (\,\text{-}\infty < \alpha < \infty,\ \beta > \mathbf{0}\,) \qquad \ldots\ (21)$$

وباعادة ترتيب المعلمات داخل الحد الاسي في الصيغة (21) نحصل على

$$\mathbf{f\,(\,C_i^{+}\,) = \frac{1}{2\,\beta}\ exp\text{-}(\left|\ (C_i^{+}\text{-}(\alpha - k))\ \right|/\beta\,)\ ,\text{-}\infty < C_i^{+} < \infty\,\&\,(\,\text{-}\infty < \alpha < \infty,\ \beta > 0\,)} \quad \ldots(22)$$

وبذلك فان حد القرار للوحة Cusum لتوزيع لابلاس لمراقبة وسيط العملية سيكون مساوي لـ $\mathbf{H} = 5\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{5}\ (\sqrt{2}\beta)$,وان القيمة المرجعية ستكون مساوية لـ $\mathbf{k} = \dfrac{\boldsymbol{\delta}^{*}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\sigma} = \dfrac{\boldsymbol{\delta}^{*}}{\mathbf{2}}(\sqrt{2}\beta) = \dfrac{|\alpha_{1} - \alpha_{0}|}{\mathbf{2}}$. ويمكن تقدير معلمتي توزيع لابلاس α و β بعدة طرق منها طريقة العزوم والتي تعتمد على المتوسط والانحراف المعياري للعينة أو بإحدى طرق التقدير اللاخطية.

4. الجانب التجريبي ومناقشة النتائج

يتضمن هذا الجانب عرض الاساليب التي يتم من خلالها الكشف عن الانحراف في النوعية عندما يكون المتغير تحت السيطرة يخضع للتوزيع الطبيعي لمراقبة المتوسط للعملية الإنتاجية وللتوزيع اللوجستي المقترح استعماله لمراقبة المتوسط للعملية الإنتاجية وتوزيع لابلاس المقترح استعماله لمراقبة الوسيط للعملية الإنتاجية تحت السيطرة.وتكون هذه الاساليب باستخدام لوحات المجموع المتراكم (Cusum) .وقد تم كتابة برامج باستعمال برنامج

Matlab –R2008a للحصول على نتائج البحث ووفقا لكل التوزيعات الاحتمالية المتقدم ذكرها ولتوليفات مختلفة لمعلمات تلك اللوحات وعدد الحالات في سلسلة ماركوف.

4-1 لوحات Cusum عندما يكون المتغير تحت السيطرة يخضع للتوزيع الطبيعي

لغرض حساب قيم ARL على وفق الصيغة (12), اي العدد المتوقع من العينات المسحوبة لغاية ورود مايشير الى ان العملية قد اصبحت خارج السيطرة كذلك حساب قيم SDRL على وفق الصيغة (13). فقد تم افتراض ان المتغير تحت السيطرة يتبع للتوزيع الطبيعي بالمعلمتين $(\mu_0 = 0 , \sigma = 1)$, وقد اعتمدت قيمة $\sigma = 1$ لغرض استبعاد تأثير الانحراف المعياري للعملية تحت السيطرة, إما قيمة متوسط العملية عند مستوى النوعية المقبول فسيكون مساوي لـ $\mu_0 = 0$.

- ولمعرفة تاثير انحراف قيمة متوسط العملية عن مستوى النوعية المقبول على قيم ARL وقيم SDRL , اذ ستكون قيمة متوسط العملية عند مستوى النوعية المرفوض (μ_1) مساوية لـ $\mu_1 = \mu_0 - k$ التي تمثل انحراف متوسط العملية عن القيمة المرجعية k والتي تكون مساوية لـ $k = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}$.سنفترض عدة قيم لـ $\mu_1 = 0, 0.5 , 1 , 1.5 , 2 , 2.5 \ , 3 , 3.5 , \ 4$.وبذلك ستكون قيمة k مساوية لـ $k = 0, 0.25 , 0.5 , 0.75 , 1 , 1.25, \ 1.5, \ 1.75 , 2$.
- ولدراسة تاثير حد القرار للوحة الـ Cusum, سيتم افتراض قيمتين لحد القرار التي يمكن ان تكون تقديرية لانها تعتمد على القيمة التقديرية لـ σ هما $H = 4\sigma = 4(1) = 4$ و $H = 5\sigma = 5(1) = 5$.
- اذ نعتمد على التوزيع الاحتمالي الطبيعي لأحصاءة الاختبار z المبينة بالصيغة (14) اي ان $z - k \sim Normal\ Dist.^n(\ \mu_0 - k\ ,\ \sigma = 1)$,لحساب الاحتمالات الانتقالية $(P_{ij} \ \forall \ i, j = 0,1,...,t-1)$ للمصفوفة R برتبة $t \times t$ باستخدام الصيغة (9,10) , ثم حساب قيم ARL على وفق الصيغة (12) وقيم SDRL على وفق الصيغة (13) .
- ولمعرفة تاثير عدد الحالات المستخدمة في سلسلة ماركوف على قيم ARL وقيم SDRL سنفترض بان $(t = 5 , 25 , 45)$.وقد اختيرت الحالات $(E_0$ و $E_{(t+1)/2}$ و $E_{t-1})$ كمقياس للمقارنة بين لوحات السيطرة المفترضة للتوليفات أعلاه, حيث ان:-

- E_0 تمثل الحالة التي تكون فيها احصاءة الاختبارعند القيمة صفر للوحة Cusum ,اي العملية الانتاجية تكون تحت السيطرة .
- وان $E_{(t+1)/2}$ تمثل الحالة التي تكون فيها احصاءة الاختبارعند منتصف الفترة المحصورة بين (0,H) للوحة Cusum.
- اما E_{t-1} تمثل الحالة التي تكون فيها احصاءة الاختبار عند حد السيطرة الاعلى H للوحة Cusum والتي يتم ايقاف العملية الانتاجية.

وقد تم تنفيذ التجارب وفقا للتوليفات المتقدم ذكرها للحصول قيم ARL وقيم SDRL للوحات الـ Cusum , وقد لخصت النتائج مما تقدم ذكره بالجدولين (1−1) و(2−1) ونلاحظ منها وبشكل عام بان ان قيم ARL وقيم SDRL :−

1. تزداد بزيادة القيمة المرجعية (k) والتي يعتمد في حسابها على قيمة متوسط العملية عند مستوى النوعية المرفوض (μ_1) بثبوت الحالة E_i وعدد الحالات في سلسلة ماركوف t وحد القرار H .
2. تتناقص بزيادة قيمة الحالة E_i بثبوت القيمة المرجعية (k) و t و H .
3. تزداد بزيادة حد القرار H بثبوت الحالة E_i وعدد الحالات في سلسلة ماركوف t والقيمة المرجعية (k).

اما بالنسبة لدراسة تاثيرعدد الحالات (t) المستعملة باسلوب ماركوف على قيم ARL وقيم SDRL للوحات الـ Cusum, بثبوت قيمة H=4 وH=5 ,اذ كما نلاحظ من الجدولين (1−1) و(2−1) بان

4. قيم ARL وقيم SDRL عند الحالتين E_0و $E_{(t+1)/2}$,تكون متزايدة بزيادة قيمة t بثبوت قيمة H=4,5 وثبوت قيمة k .
5. قيم ARL وقيم SDRL عند الحالة E_{t-1} فتكون متناقصة بزيادة قيمة t بثبوت قيمة H=4 وثبوت قيمة عند $k \le 0.5$,في حين تكون متزايدة بزيادة قيمة t عموما لبقية قيم $k > 0.5$.
6. قيم ARL وقيم SDRL عند الحالة E_{t-1} فتكون متناقصة بزيادة قيمة t بثبوت قيمة H=5 وقيمة $k \le 0.25$ و $k \le 0.75$, في حين تكون متزايدة بزيادة قيمة t عموما لكل لبقية قيم k.

جدول (1-1) قيم ARL و SDRL للوحات Cusum حين تخضع العملية تتبع التوزيع الطبيعي ($\mu_0 = 0 , \sigma = 1$) وحد القرار ($H = 4$), لكل من الحالات (E_0 و $E_{(t+1)/2}$ و E_{t-1}) .

No. of states(t)	k / E_i	ARL(μ_1 ,k)								
		0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
5	E_0	26.5501	73.5537	297.5887	1629	10813	80657	647576.9	$5.4663e^{+6}$	$4.7902e^{+7}$
	E_2	21.3041	65.5071	284.3469	1605.6	10769	80568	647389.8	$5.4659e^{+6}$	$4.7901e^{+7}$
	E_4	10.4977	38.8932	204.2155	1323.6	9667.5	75984	627686.7	$5.3803e^{+6}$	$4.753e^{+7}$
25	E_0	26.674	76.949	333.93	1989.3	14358	115375.4	984586.9	$8.6962e^{+6}$	$7.8378e^{+7}$
	E_{12}	20.462	66.878	315.97	1954.1	14282	115201.2	984160.6	$8.6951e^{+6}$	$7.8375e^{+7}$
	E_{24}	7.8273	31.742	191.25	1425.5	11792	102830.7	921722.2	$8.3824e^{+6}$	$7.6845e^{+7}$
45	E_0	26.678	77.039	334.93	1999.7	14465	116461.5	995473.3	$8.803e^{+6}$	$7.9399e^{+7}$
	E_{22}	20.369	66.768	316.5	1963.2	14386	116277.7	995019.1	$8.8018e^{+6}$	$7.9396e^{+7}$
	E_{44}	7.5883	30.913	187.76	1410.7	11749	103023.8	927360.8	$8.4594e^{+6}$	$7.7704e^{+7}$
No. of states(t)	k / E_i	SDRL(μ_1 ,k)								
		0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
5	E_0	21.8244	68.6480	292.9818	1625	10810	80654	647574.4	$5.4663e^{+6}$	$4.7902e^{+7}$
	E_2	21.3396	68.2516	292.7120	1624.8	10810	80654	647574.4	$5.4663e^{+6}$	$4.7902e^{+7}$
	E_4	17.1408	60.7174	278.5393	1596.4	10749	80519	647268.9	$5.4656e^{+6}$	$4.7901e^{+7}$
25	E_0	21.81	71.897	329.22	1985.2	14355	115372.5	984584.4	$8.6962e^{+6}$	$7.8378e^{+7}$
	E_{12}	21.158	71.315	328.78	1984.9	14354	115372.4	984584.4	$8.6962e^{+6}$	$7.8378e^{+7}$
	E_{24}	14.996	58.287	298.08	1904.2	14124	114688.7	982575.5	$8.6905e^{+6}$	$7.8363e^{+7}$
45	E_0	21.81	71.983	330.22	1995.6	14461	116458.6	995470.9	$8.803e^{+6}$	$7.9399e^{+7}$
	E_{22}	21.138	71.379	329.75	1995.3	14461	116458.5	995470.8	$8.803e^{+6}$	$7.9399e^{+7}$
	E_{44}	14.773	57.747	297.06	1907.5	14204	115680.9	993138.0	$8.7963e^{+6}$	$7.9381e^{+7}$

جدول (1-2) قيم ARL و SDRL للوحات Cusum حين تخضع العملية تتبع التوزيع الطبيعي ($\mu_0 = 0, \sigma = 1$) وحد القرار ($H = 5$), لكل من الحالات (E_0 و $E_{(t+1)/2}$ و E_{t-1}) .

No. of states(t)	k / E_i	ARL(μ_1 ,k)								
		0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
5	E_0	37.248	126.68	711.72	5752	57486	651825	8025775	$1.0469e^{+8}$	$1.4238e^{+9}$
	E_2	29.853	114.51	689.7	5708.1	57391	651604	8025231	$1.0469e^{+8}$	$1.4238e^{+9}$
	E_4	13.732	66.663	501.36	4794.7	52320	621003.6	7831421	$1.0343e^{+8}$	$1.4156e^{+9}$
25	E_0	37.981	141.1	921.61	8858.1	104755.4	1381813	19330375	$2.787e^{+8}$	$4.0727e^{+9}$
	E_{12}	29.052	125.12	888.8	8781	104552.5	1381229	19328582	$2.787e^{+8}$	$4.0727e^{+9}$
	E_{24}	9.533	54.8	525.03	6385.2	86515.6	1236467	18143187	$2.6908e^{+8}$	$3.9969e^{+9}$
45	E_0	38.00	141.51	928.06	8962.3	106480.9	1410553	19805222	$2.8641e^{+8}$	$4.195e^{+9}$
	E_{22}	28.924	125.17	894.21	8881.9	106266.2	1409927	19803268	$2.864e^{+8}$	$4.195e^{+9}$
	E_{44}	9.159	53.066	514.85	6337.2	86760.1	1250677	18478313	$2.7549e^{+8}$	$4.1078e^{+9}$
No. of states(t)	k / E_i	SDRL(μ_1 ,k)								
		0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
5	E_0	30.626	119.81	705.46	5746.7	57482	651821.2	8025772	$1.0469e^{+8}$	$1.4238e^{+9}$
	E_2	29.955	119.29	705.15	5746.5	57482	651821.2	8025772	$1.0469e^{+8}$	$1.4238e^{+9}$
	E_4	23.527	105.94	674.55	5666.9	57249	651092.2	8023418	$1.0468e^{+8}$	$1.4238e^{+9}$
25	E_0	31.041	133.9	915.14	8852.7	104751.0	1381809	19330372	$2.787e^{+8}$	$4.0727e^{+9}$
	E_{12}	30.116	133.11	914.6	8852.4	104750.8	1381809	19330371	$2.787e^{+8}$	$4.0727e^{+9}$
	E_{24}	20.093	106.37	826.91	8501.4	103151.3	1374144	19293881	$2.7854e^{+8}$	$4.072e^{+9}$
45	E_0	31.052	134.3	921.59	8956.9	106476.4	1410550	19805219	$2.8641e^{+8}$	$4.195e^{+9}$
	E_{22}	30.098	133.48	921.02	8956.6	106476.2	1410549	19805219	$2.8641e^{+8}$	$4.195e^{+9}$
	E_{44}	19.713	105.25	826.04	8564.8	104634.8	1401460	19760719	$2.862e^{+8}$	$4.1941e^{+9}$

4-2 لوحات Cusum عندما يكون المتغير تحت السيطرة يخضع للتوزيع اللوجستي

لغرض حساب قيم ARL على وفق الصيغة (12), اي العدد المتوقع من العينات المسحوبة لغاية ورود مايشير الى ان العملية قد اصبحت خارج السيطرة كذلك حساب قيم SDARL على وفق الصيغة (13).فقد تم افتراض ان المتغير تحت السيطرة يتبع للتوزيع اللوجستي بالمعلمتين $(\alpha_0 = 0 , \beta = 0.55133)$, اذ إن اختيار قيمة β عند القيمة $\beta = 0.55133$ التي تحقق قيمة $\sigma = 1$ لغرض استبعاد تأثير الانحراف المعياري للعملية تحت السيطرة, إما قيمة متوسط العملية عند مستوى النوعية المقبول فسيكون مساوي لـ $\alpha_0 = 0$.

- ولمعرفة تاثير انحراف قيمة متوسط العملية عن مستوى النوعية المقبول على قيم ARL وقيم SDARL , اذ ستكون قيمة متوسط العملية عند مستوى النوعية المرفوض المرفوض (α_1) مساوية لـ $\alpha_1 = \alpha_0 - \mathbf{k}$ التي تمثل انحراف متوسط العملية عن القيمة المرجعية k و مساوية لـ $\mathbf{k} = \frac{|\alpha_1 - \alpha_0|}{2}$,سنفترض عدة قيم لـ $\boldsymbol{\alpha_1} = 0, 0.5 , 1 , 1.5 , 2 , 2.5 , 3 , 3.5 , 4$.وبذلك ستكون قيمة k مساوية لـ $\mathbf{k} = 0, 0.25 , 0.5 , 0.75 , 1 , 1.25, 1.5, 1.75 , 2$.
- ولدراسة تاثير حد القرار للوحة الـ Cusum, سيتم افتراض قيمتين لحد القرار التي يمكن ان تكون تقديرية لانها تعتمد على القيمة التقديرية لـ $\sigma = \sqrt{\frac{\pi^2 \beta^2}{3}}$ هما $H = 4\sigma = 4(1) = 4$ و $H = 5\sigma = 5(1) = 5$.
- اذ نعتمد على التوزيع الاحتمالي اللوجستي لأحصاءة الاختبار z.المبينة بالصيغة (18) اي ان $z - k \sim \text{Logistic Dist}.^{n}(\alpha_0 - k , \beta = 0.55133)$,لحساب الاحتمالات الانتقالية للمصفوفة R برتبة $t \times t$ باستخدام الصيغة (9,10) $(P_{ij} \forall i, j = 0,1,...,t - 1)$, ثم حساب قيم ARL على وفق الصيغة (12) و قيم SDRL على وفق الصيغة (13) .
- ولمعرفة تاثير عدد الحالات المستخدمة في سلسلة ماركوف على قيم ARL وقيم SDRL سنفترض بان $(t = 5 , 25 , 45)$.وقد اختيرت الحالات $(E_0$ و $E_{(t+1)/2}$ و $E_{t-1})$ كمقياس للمقارنة بين لوحات السيطرة المفترضة للتوليفات أعلاه , حيث ان:-
  - E_0 تمثل الحالة التي تكون فيها احصاءة الاختبارعند القيمة صفر للوحة Cusum, اي العملية الانتاجية تكون تحت السيطرة .
  - وان $E_{(t+1)/2}$ تمثل الحالة التي تكون فيها احصاءة الاختبارعند منتصف الفترة المحصورة بين (0,H) للوحة Cusum.
  - اما E_{t-1} تمثل الحالة التي تكون فيها احصاءة الاختبار عند حد السيطرة الاعلى H للوحة Cusum والتي يتم ايقاف العملية الانتاجية.

وقد تم تنفيذ التجارب وفقا للتوليفات المتقدم ذكرها للحصول قيم قيم ARL وقيم SDRL للوحات الـ Cusum, وقد لخصت النتائج مما تقدم ذكره بالجدولين (1−2) و(2−2),ونلاحظ منها وبشكل عام بان ان قيم ARL وقيم SDRL :−

1. تزداد بزيادة القيمة المرجعية (k) والتي يعتمد في حسابها على قيمة متوسط العملية عند مستوى النوعية المرفوض (α_1) بثبوت الحالة $\mathbf{E_i}$ وعدد الحالات في سلسلة ماركوف t وحد القرار H.
2. تتناقص بزيادة قيمة الحالة $\mathbf{E_i}$بثبوت القيمة المرجعية (k) و t وH.
3. تزداد بزيادة حد القرار H بثبوت الحالة $\mathbf{E_i}$ وعدد الحالات في سلسلة ماركوف t والقيمة المرجعية (k).

اما بالنسبة لدراسة تاثيرعدد الحالات (t) المستعملة باسلوب ماركوف على قيم ARL وقيم SDRL للوحات الـ Cusum, بثبوت قيمة H=4 وH=5 ,اذ كما نلاحظ من الجدولين (1−2) و(2−2) بان

4. قيم ARL وقيم SDRL عند الحالة $\mathbf{E_0}$ تكون متزايدة بزيادة قيمة t بثبوت قيمة H=4,5 وعند ثبوت قيم k .
5. قيم ARL وقيم SDRL عند الحالة $\mathbf{E_{(t+1)/2}}$, تكون متزايدة بزيادة قيمة t بثبوت قيمة H=4,5 بثبوت كل قيم k عدا قيمة k=0.0 , اذ تكون فيها قيم ARL وقيم SDRL متناقصة بزيادة قيمة t .
6. قيم ARL وقيم SDRLعند الحالة $\mathbf{E_{t-1}}$,تكون متناقصة بزيادة قيمة t بثبوت قيمة H=4, ولقيم $\mathbf{k \leq 1.25}$ عموما في حين تكون متزايدة بزيادة قيمة t عموما لبقية قيم $\mathbf{k \geq 1.5}$.
7. قيم ARL وقيم SDRL عند الحالة $\mathbf{E_{t-1}}$ تكون متناقصة بزيادة قيمة t بثبوت قيمة H=5 ولقيم $\mathbf{k \leq 0.5}$ و, في حين تكون متذبذبه بزيادة ونقصان بزيادة قيمة t عموما لكل لبقية قيم $\mathbf{k > 0.5}$.

جدول (2-1) قيم ARL و SDRL للوحات Cusum للتوزيع اللوجستي بالمعلمتين $(\alpha_0 = 0 , \beta = 0.55133)$ وحد القرار ($H = 4$), لكل من الحالات (E_0 و $E_{(t+1)/2}$ و E_{t-1}) .

No. of states(t)	k / E_i	ARL(α_1 ,k)								
		0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
5	E_0	27.528	75.728	260.466	893.357	2617.780	6367.529	13316.89	25082.20	44156.21
	E_2	22.147	67.838	249.162	878.224	2599.224	6346.494	13294.33	25058.82	44132.42
	E_4	10.999	41.452	184.847	739.958	2356.205	5993.836	12850.79	24550.86	43583.05
25	E_0	27.668	78.973	281.649	973.964	2812.294	6699.792	13768.25	25616.26	44740.52
	E_{12}	21.316	69.209	266.988	953.661	2786.905	6670.702	13736.86	25583.59	44707.18
	E_{24}	8.022	33.515	167.873	719.685	2352.689	6021.031	12904.33	24618.16	43653.91
45	E_0	27.672	79.059	282.209	976.059	2817.221	6708.016	13779.25	25629.16	44754.56
	E_{22}	21.223	69.105	267.198	955.193	2791.059	6677.989	13746.81	25595.37	44720.08
	E_{44}	7.756	32.582	164.609	710.603	2333.763	5990.209	12862.30	24567.19	43596.55
No. of states(t)	k / E_i	SDRL(α_1 ,k)								
		0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
5	E_0	22.757	71.126	256.702	890.605	2615.846	6366.149	13315.85	25081.37	44155.51
	E_2	22.226	70.724	256.459	890.475	2615.778	6366.113	13315.83	25081.36	44155.50
	E_4	17.878	63.474	245.799	877.458	2602.774	6355.173	13307.69	25075.74	44151.79
25	E_0	22.765	74.290	277.906	971.29	2810.439	6698.470	13767.25	25615.46	44739.84
	E_{12}	22.055	73.712	277.533	971.077	2810.322	6698.405	13767.22	25615.44	44739.82
	E_{24}	15.516	60.730	254.396	937.708	2772.679	6663.997	13740.11	25595.99	44726.63
45	E_0	22.766	74.374	278.468	973.387	2815.368	6706.696	13778.25	25628.36	44753.88
	E_{22}	22.035	73.775	278.077	973.163	2815.244	6706.627	13778.21	25628.34	44753.86
	E_{44}	15.268	60.132	253.311	936.803	2773.629	6668.179	13747.70	25606.33	44738.88

جدول (2-2) قيم ARL و SDRL للوحات Cusum للتوزيع اللوجستي بالمعلمتين $(\alpha_0 = 0 , \beta = 0.55133)$ وحد القرار $(H = 5)$, لكل من الحالات (E_0 و $E_{(t+1)/2}$ و E_{t-1}) .

No. of states(t)	k / E_i	ARL(α_1 ,k)								
		0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
5	E_0	38.4528	129.188	596.189	2743.167	10175.57	29238.53	68196.04	137570.7	252696.1
	E_2	30.8661	117.204	577.356	2715.457	10138.76	29194.31	68146.80	137518.5	252642.3
	E_4	14.4113	70.363	431.855	2317.441	9286.759	27770.86	66183.35	135136.5	249973.7
25	E_0	39.165	142.700	713.908	3339.271	11971.09	32814.05	73562.67	144329. 9	260377.4
	E_{12}	30.0435	127.226	687.784	3298.947	11916.33	32747.71	73488.57	144251.1	260296.1
	E_{24}	9.7556	57.187	422.361	2475.577	10053.63	29575.06	69081.23	138881.9	254259.7
45	E_0	39.186	143.08	717.245	3355.752	12018.59	32904.71	73694.55	144492.7	260560.4
	E_{22}	29.9157	127.267	690.382	3314.073	11961.79	32835.76	73617.42	144410.7	260475.6
	E_{44}	9.341	55.254	413.131	2442.843	9972.93	29427.56	68863.54	138603.4	253934.9
No. of states(t)	k / E_i	SDRL(α_1 ,k)								
		0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
5	E_0	31.755	122.681	590.985	2739.474	10173.06	29236.80	68194.79	137569.8	252695.3
	E_2	31.032	122.159	590.698	2739.335	10172.99	29236.76	68194.78	137569.8	252695.3
	E_4	24.470	109.507	568.446	2706.457	10134.23	29199.95	68165.09	137548.2	252680.7
25	E_0	32.166	136.013	708.772	3335.76	11968.76	32812.45	73561.51	144329.0	260376.7
	E_{12}	31.1769	135.238	708.313	3335.523	11968.63	32812.38	73561.47	144328.9	260376.7
	E_{24}	20.6898	109.156	647.441	3222.507	11814.31	32652.22	73424.87	144226.1	260304.8
45	E_0	32.179	136.388	712.111	3352.25	12016.26	32903.12	73693.39	144491.8	260559.7
	E_{22}	31.160	135.582	711.628	3351.994	12016.13	32903.04	73693.35	144491.8	260559.7
	E_{44}	20.268	107.926	645.402	3226.081	11841.01	32718.91	73534.87	144371.8	260475.4

3-4 لوحات Cusum عندما يكون المتغير تحت السيطرة يخضع لتوزيع لابلاس

لغرض حساب قيم ARL على وفق الصيغة (12), اي العدد المتوقع من العينات المسحوبة لغاية ورود مايشير الى ان العملية قد اصبحت خارج السيطرة كذلك حساب قيم SDRL على وفق الصيغة (13).فقد تم افتراض ان المتغير تحت السيطرة يتبع لتوزيع لابلاس بالمعلمتين $(\alpha_0 = 0 , \beta = 0.70711)$,إذ إن اختيار قيمة β عند القيمة $\beta = 0.70711$ تحقق قيمة $\sigma = 1$ لغرض استبعاد تأثير الانحراف المعياري للعملية تحت السيطرة, إما قيمة متوسط العملية عند مستوى النوعية المقبول فسيكون مساوي لـ $\alpha_0 = 0$.

- ولمعرفة تاثير انحراف قيمة متوسط العملية عن مستوى النوعية المقبول على قيم ARL وقيم SDARL,اذ ستكون قيمة متوسط العملية عند مستوى النوعية المرفوض المرفوض (α_1) مساوية لـ $\alpha_1 = \alpha_0 - k$ التي تمثل انحراف متوسط العملية عن القيمة المرجعية k ومساوية لـ $k = \dfrac{|\alpha_1 - \alpha_0|}{2}$,سنفترض عدة قيم لـ $\alpha_1 = 0, 0.5 , 1 , 1.5 , 2 , 2.5 , 3 , 3.5 , 4$.وبذلك ستكون قيمة k مساوية لـ $k = 0, 0.25 , 0.5 , 0.75 , 1 , 1.25, 1.5, 1.75 , 2$.
- ولدراسة تاثير حد القرار للوحة الـ Cusum, سيتم افتراض قيمتين لحد القرار التي يمكن ان تكون تقديرية لانها تعتمد على القيمة التقديرية لـ $\sigma = \sqrt{2}\beta$ هما $H = 4\sigma = 4(1) = 4$ و $H = 5\sigma = 5(1) = 5$.
- اذ نعتمد على التوزيع الاحتمالي اللوجستي لأحصاءة الاختبار z.المبينة بالصيغة (22) اي ان $z - k \sim Laplace\ Dist.^n(\alpha_0 - k , \beta)$, لحساب الاحتمالات الانتقالية $(P_{ij} \ \forall\ i, j = 0,1,...,t-1)$ للمصفوفة R برتبة $t \times t$ باستخدام الصيغة (9, 10) , ثم حساب قيم ARL على وفق الصيغة (12) وقيم SDRL على وفق الصيغة (13) .
- ولمعرفة تاثير عدد الحالات المستخدمة في سلسلة ماركوف على قيم ARL وقيم SDRL سنفترض بان $(t = 5 , 25 , 45)$.وقد اختيرت الحالات $(E_0$ و$E_{(t+1)/2}$ و$E_{t-1})$ كمقياس للمقارنة بين لوحات السيطرة المفترضة للتوليفات أعلاه, حيث ان:-
  - E_0 تمثل الحالة التي تكون فيها احصاءة الاختبارعند القيمة صفر للوحة Cusum , اي العملية الانتاجية تكون تحت السيطرة .
  - وان $E_{(t+1)/2}$ تمثل الحالة التي تكون فيها احصاءة الاختبارعند منتصف الفترة المحصورة بين (0,H) للوحة Cusum.
  - اما E_{t-1} تمثل الحالة التي تكون فيها احصاءة الاختبار عند حد السيطرة الاعلى H للوحة Cusum والتي يتم ايقاف العملية الانتاجية.

وقد تم تنفيذ التجارب وفقا للتوليفات المتقدم ذكرها للحصول قيم قيم ARL وقيم SDRL للوحات الـ Cusum , وقد لخصت النتائج مما تقدم ذكره بالجدولين بالجدولين (3-1) و(3-2) , ونلاحظ منها وبشكل عام بان ان قيم ARL وقيم SDRL :-

1. تزداد بزيادة القيمة المرجعية (k) والتي يعتمد في حسابها على قيمة متوسط العملية عند مستوى النوعية المرفوض (α_1) بثبوت الحالة E_i وعدد الحالات في سلسلة ماركوف t وحد القرار H.
2. تتناقص بزيادة قيمة الحالة E_iبثبوت القيمة المرجعية (k) و t وH.
3. تزداد بزيادة حد القرار H بثبوت الحالة E_i وعدد الحالات في سلسلة ماركوف t والقيمة المرجعية (k).

اما بالنسبة لدراسة تاثيرعدد الحالات (t) المستعملة باسلوب ماركوف على قيم ARL وقيم SDRL للوحات الـ Cusum ,بثبوت قيمة H=4 وH=5 ,اذ كما نلاحظ من الجدولين (1−3) و(2−3) بان

4. قيم ARL وقيم SDRL عند الحالة E_0 تكون متزايدة بزيادة قيمة t بثبوت قيمة H=4 ولكل قيمة من قيم k عدا k=0.0 .أذ تكون قيم ARL وقيم SDRL متناقصة بزيادة قيمة t.
5. قيم ARL وقيم SDRL عند الحالة E_0 تكون متزايدة بزيادة قيمة t بثبوت قيمة H=5 ولكل قيمة من قيم k .
6. قيم ARL وقيم SDRL عند الحالة $E_{(t+1)/2}$, تكون متزايدة بزيادة قيمة t بثبوت قيمة H=4,5 بثبوت كل قيم k عدا قيمة k=0.0 , اذ تكون فيها قيم ARL وقيم SDRL متناقصة بزيادة قيمة t .
7. قيم ARL وقيم SDRL عند الحالة E_{t-1} تكون متناقصة بزيادة قيمة t بثبوت قيمة H=5 ولقيم **k** .

جدول (3-1) قيم ARL و SDRL للوحات Cusum لتوزيع لابلاس بالمعلمتين $(\alpha_0 = 0, \beta = 0.70711)$ وحد القرار (H = 4), لكل من الحالات (E_0 و $E_{(t+1)/2}$ و E_{t-1}) .

No. of states(t)	k / E_i	ARL(α_1 ,k)								
		0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
5	E_0	29.427	76.368	224.579	554.583	1134.971	2057.672	3441.613	5443.048	8313.241
	E_2	23.755	68.659	215.181	544.132	1123. 90	2046.334	3430.257	5431.692	8301.884
	E_4	12.105	43.526	165.879	467.981	1024.938	1930.991	3304.854	5299.707	8165.804
25	E_0	29.3103	81.917	236.0548	573.786	1168.959	2101.805	3485.451	5489.205	8361.870
	E_{12}	22.7035	72.532	224.223	560.353	1154.646	2087.065	3470.534	5474.239	8346.899
	E_{24}	8.4368	37.064	149.865	440.215	994.692	1897.895	3261.777	5253.010	8117.978
45	E_0	29.313	81.9939	236.357	574.345	1169.797	2102.783	3486.549	5490.334	8363.038
	E_{22}	22.606	72.43027	224.261	560.5795	1155.110	2087.645	3471.223	5474.952	8347.648
	E_{44}	8.084	35.9697	147.124	435.1900	987.526	1888.970	3251.642	5242.014	8106.451
No. of states(t)	k / E_i	SDRL(α_1 ,k)								
		0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
5	E_0	24.537	72.060	221.598	552.579	1133.538	2056.585	3440.740	5442.304	8312.577
	E_2	23.924	71.640	221.387	552.473	1133.479	2056.551	3440.720	5442.291	8312.568
	E_4	19.373	64.944	213.886	545.779	1128.172	2052.661	3438.005	5440.404	8311.261
25	E_0	24.331	77.712	233.134	571.826	1167.570	2100.749	3484.594	5488.470	8361.213
	E_{12}	23.531	77.148	232.825	571.659	1167.477	2100.694	3484.560	5488.448	8361.198
	E_{24}	16.444	64.843	217.009	556.081	1154.483	2090.804	3477.385	5483.367	8357.641
45	E_0	24.330	77.7895	233.442	572.385	1168.409	2101.727	3485.693	5489.601	8362.381
	E_{22}	23.509	77.2055	233.116	572.211	1168.311	2101.669	3485.657	5489.578	8362.366
	E_{44}	16.120	64.1814	216.130	555.29	1154.096	2090.798	3477.744	5483.963	8358.429

جدول (3-2) قيم ARL و SDRL للوحات Cusum لتوزيع لابلاس بالمعلمتين $(\alpha_0 = 0 , \beta = 0.70711)$ وحد القرار ($H = 5$), لكل من الحالات (E_0 و $E_{(t+1)/2}$ و E_{t-1}) .

No. of states(t)	k / E_i	ARL(α_1 ,k)								
		0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
5	E_0	41.09419	124.3197	464.3915	1499.722	3567.931	7067.352	12517.15	20636.62	32374.75
	E_2	33.05767	112.5989	448.7217	1481.234	3547.589	7045.867	12495.09	20614.45	32352.59
	E_4	15.9004	69.39701	343.6025	1282.908	3257.949	6680.568	12074.69	20159.53	31875.23
25	E_0	41.116	145.070	549.5867	1636.479	3797.206	7408.787	12941.58	21078.33	32826.83
	E_{12}	31.664	130.240	529.0289	1611.488	3769.388	7379.351	12911.29	21047.62	32795.95
	E_{24}	10.257	62.172	345.0991	1254.751	3235.280	6699.079	12124.31	20187.77	31888.14
45	E_0	41.1339	145.469	551.309	1640.272	3803.529	7417.247	12951.41	21088.84	32837.81
	E_{22}	31.5305	130.325	530.223	1614.560	3774.854	7386.869	12920.12	21057.11	32805.89
	E_{44}	9.7192	59.995	337.871	1238.584	3209.254	6664.386	12082.75	20141.05	31837.96
No. of states(t)	k / E_i	SDRL(α_1 ,k)								
		0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
5	E_0	34.1681	118.053	460.054	1497.043	3566.118	7066.027	12516.12	20635.78	32374.03
	E_2	33.3452	117.4948	459.784	1496.925	3566.057	7065.993	12516.1	20635.76	32374.02
	E_4	26.5168	105.983	444.364	1481.358	3552.634	7055.426	12508.29	20630.25	32370.17
25	E_0	34.006	139.038	545.574	1633.916	3795.476	7407.528	12940.60	21077.51	32826.12
	E_{12}	32.914	138.287	545.1859	1633.721	3795.372	7407.468	12940.56	21077.49	32826.10
	E_{24}	21.788	114.153	506.5655	1588.897	3753.684	7373.444	12914.75	21058.68	32812.68
45	E_0	34.0168	139.439	547.302	1637.713	3801.802	7415.991	12950.42	21088.02	32837.10
	E_{22}	32.8935	138.659	546.895	1637.508	3801.691	7415.927	12950.39	21088.00	32837.09
	E_{44}	21.2489	112.869	504.785	1587.902	3755.107	7377.669	12921.24	21066.69	32821.86

ونلاحظ بان لوحات Cusum للتوزيع اللوجستي تكون اكثر حساسية للتغيرات في متوسط العملية تحت السيطرة مقارنة بلوحات Cusum للتوزيع الطبيعي عند نفس القيمة للمتوسط والانحراف المعياري لكلا التوزيعين,اذ تكون قيم ARL وقيم SDRL المستحصلة للوحات Cusum في حالة التوزيع اللوجستي اقل مقارنة بقيم ARL وقيم SDRL المستحصلة للوحات Cusum في حالة التوزيع الطبيعي عند كل قيمة من قيم $\mathbf{k \geq 0.5}$,عند ثبوت الحالة $\mathbf{E_i}$ وعدد الحالات في سلسلة ماركوف t و H .

وتكون لوحات Cusum لتوزيع لابلاس اكثر حساسية للتغيرات في متوسط العملية تحت السيطرة مقارنة بلوحات Cusum للتوزيع الطبيعي والتوزيع اللوجستي عند نفس القيمة للمتوسط والانحراف المعياري لكلا التوزيعات المستخدمة في البحث ,اذ تكون قيم ARL وقيم SDRL المستحصلة للوحات Cusum لتوزيع لابلاس اقل مقارنة بقيم ARL وقيم SDRL المستحصلة للوحات Cusum للتوزيع الطبيعي والتوزيع اللوحستي عند كل قيمة من قيم $\mathbf{k \geq 0.5}$, عند ثبوت الحالة $\mathbf{E_i}$ وعدد الحالات في سلسلة ماركوف t و H .

5. الاستنتاجات

أهم الاستنتاجات التي تم التوصل إليها من خلال نتائج البحث وبشكل عام:

- تزداد حساسية لوحات Cusum في حالة التوزيع الطبيعي واللوجستي ولابلاس من خلال تناقص قيم معدل عدد العينات المفحوصة لغاية ورود مايشير الى ان العملية اصبحت خارج السيطرة بتناقص القيمة المرجعية k عند ثبوت الحالة $\mathbf{E_i}$ وعدد الحالات في سلسلة ماركوف t وحد القرار H .
- تكون لوحات Cusum في حالة التوزيع اللوجستي ولابلاس المقترحتين في هذا البحث اكثر حساسية مقارنة بلوحات Cusum في حالة التوزيع الطبيعي من خلال تناقص قيم معدل عدد العينات المفحوصة لغاية ورود مايشير الى ان العملية اصبحت خارج السيطرة عند نفس القيمة لمتوسط العملية ووسيط العملية بانحراف معياري مساوي للواحد , عند كل قيمة من قيم $\mathbf{k \geq 0.5}$, عند ثبوت الحالة $\mathbf{E_i}$ وعدد الحالات في سلسلة ماركوف t و H .
- تكون لوحات Cusum في حالة التوزيع لابلاس المقترح في هذا البحث اكثر حساسية مقارنة بلوحات Cusum في حالة التوزيع الطبيعي و اللوجستي من خلال تناقص قيم معدل عدد العينات عند نفس القيمة لمتوسط العملية ووسيط العملية بانحراف معياري مساوي للواحد , عند كل قيمة من قيم $\mathbf{k \geq 0.5}$, عند ثبوت الحالة $\mathbf{E_i}$ وعدد الحالات في سلسلة ماركوف t و H .

المصادر باللغة العربية

1. العبيدي, جنان عباس ناصر, (2000), "تحديد التوزيع الاحتمالي لمتوسط طول التشغيل لخطة Cusum باستعمال سلاسل ماركوف", رسالة ماجستير مقدمة إلى مجلس كلية الإدارة والاقتصاد – قسم الإحصاء, الجامعة المستنصرية.
2. العبيدي , جنان عباس ناصر , (2001), " التوزيع الاحتمال لمتوسط طول التشغيل لخطة Cusum عندما تتبع البيانات التوزيع المتقطع (ثنائي الحدين) " ,مجلة كلية الرافدين الجامعة للعلوم (المؤتمر العلمي السابع) – العراق / العدد 8 السنة الخامسة .

References

3. Borror, C. M., Keats, J. B., and Montgomery, D. C., (2003). "Robustness of the time between events CUSUM", International Journal of Production Research, Vol. 41, pp. 3435-3444.
4. Brook, D. and Evans, D. A. (1972). " An approach to the probability distribution of CUSUM run length". Biometrika, 59, 539-549.
5. Champ, C. W., & Rigdon, S. E. (1991). "A Comparison of the Markov Chain and the Integral Equation Approaches for Evaluating the Run Length Distribution of Quality Control Charts". Communications in Statistics: Simulation and Computation, 20(1), 191–204.
6. Gan, F. F. (1992). Exact run length distribution for One-Sided Exponential CUSUM Schemes". Statistica Sinica, 2, 297–312.
7. Gan, F. F. (1994). "Design of Optimal Exponential CUSUM control charts". Journal of Quality Technology, 26, 109-124.
8. Gan, F. F. and Choi, K. P., (1994). "Computing average run lengths for exponential CUSUM schemes", Journal of Quality Technology, Vol. 26, pp. 134-143.
9. Hanif, M., & Hussain, A., & Jamal, N., & Amir, M., (2012),"New Approximation of ARL in Cusum control chart", Far East Journal of Marketing and Management Vol. 2 No. 2.
10. Koshti, V. V., (2011)," Cumulative sum control chart", International Journal of Physics and Mathematical Sciences ISSN: 2277-2111 (Online) An Online International Journal Available at http://www.cibtech.org/jpms.htm2011 Vol. 1 (1) October-December, pp.28-32/Koshti.
11. Montgomery, D. C., (1997). Introduction to Statistical Quality control. 3rd ed., John Wily &Sons Inc., New York.
12. Pehlivan, C., (2008),"controlling High Quality Manufactring process: A Robustness Study of the lower sided TBE EWMA procedure", A thesis Submitted to the Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University.
13. Petcharat, K.,& Areepong,Y,& Sukparungsee ,S.& Mititelu,G.,(2012)," Fitting Pareto distribution with Hyperexponential to evaluate the ARL for Cusum chart" ,International Journal of Pure and Applied Mathematics Vol.77, No. 2 , 233-244.ISSN: 1311-8080 (printed version).

14. Ryu, J.-H., & WAN, H., & KIM, S., (2010)," Optimal Design of a CUSUM Chart for a Mean Shift of Unknown Size ", www.asq.org ,Vol. 42, No. 3.
15. Siegmund, D. (1985). Sequential analysis Test and Confidence intervals. New York: Springer – Verlage.
16. Tan, Y. F. &. Pooi, A. H, (2005)," Run length distribution of two-sided CUSUM procedures for continuous random variables". Bulletin of the institute of mathematics academia sinica .Vol.33, No.2.
17. The Laplace Distribution. (2016), From Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/wiki/ Laplace _distribution
18. The Logistic Distribution. (2015), From Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_distribution.
19. Vardeman, S. and Ray, D. (1985)."Average run lengths for CUSUM when observations are exponentially distributed". Technometrics, 27, 145–150.
20. Waldmann, K. H. (1986)." Bounds for the distribution of the run length of one-sided and two-sided CUSUM quality control schemes. Technometrics, 28, 61-67.
21. White, C. H., Keats, J. B. and Stanley, J. (1997)." Poisson CUSUM vs. c-chart for defect rate". Quality Engineering, 9, 673-679.
22. White, C.H. and Keats, J.B., (1996). "ARLs and Higher-Order Run-Length Moments for the Poisson CUSUM", Journal of Quality Technology, Vol. 28, pp. 363-369.
23. Woodall, W. H. (1984). "On the Markov chain approach to the two-sided CUSUM procedure". Technometrics, 26, 41-46.
24. Yang, L., Pai, S., and Wang, Y.-R., (2010)," A Novel CUSUM Median Control Chart", Proceeding of the International Multi Conference of Engineers and Computer Scientists. Vol.III, IMEC 2010, March 17-19, 2010, Hong Kong.ISBN:978-988-18210-5-8, ISSN: 2078-0958(Print): ISSN: 2078-0966(Online).
25. Yeh, B. & Lin, D., k. & Venkataramani, C., (2004), " Unified CUSUM charts for Monitoring process mean and variability ".Quality Technolog and Quantitative Management. Vol.1, No.1, pp.65-85.