

مقارنة خصائص مقدرات العزوم الاحتمالية
الموزونة مع العزوم التقليدية لتوزيع
Lomax ذي المعلمتين

الاستاذ المساعد الدكتور جنان عباس ناصر
الكلية التقنية الادارية - بغداد

المستخلص:

في هذا البحث، ندرس خصائص مقدرات معلمتي الشكل والقياس لتوزيع Lomax باستعمال العزوم الاحتمالية الموزونة مقارنة بالعزوم التقليدية . وقد تم اشتقاق مقدرات معلمتي التوزيع على وفق طريقة العزوم (MOM) وطريقة العزوم L- (L-MOM), والعزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الأول المقترح استعمالها كطريقة للتقدير ((IPWM1(pro.)) المتحيزة ((U-IPWM1(pro.)) وغير المتحيزة ((B- IPWM1(pro.)), والعزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الثاني ((IPWM2)) المتحيزة ((U-IPWM2)) وغير المتحيزة ((B-IPWM2)). تم استعمال عدة نماذج من توزيع Lomax لتوليد البيانات لإحجام عينات مختلفة (الصغيرة والوسط والكبيرة). استحصلت النتائج باستعمال أسلوب المحاكاة ببرامج مكتوبة ببرنامج Mat lab. لمقارنة مقدرات العزوم التقليدية والعزوم الاحتمالية الموزونة لمعلمتي الشكل والقياس لتوزيع Lomax المستعملة في هذا البحث، فقد اعتمد معيار المتوسط والانحراف المعياري ومعيار التحيز النسبي و جذر متوسط مربعات الخطاء النسبي لمقدرات معلمتي توزيع Lomax، فضلاً عن معيار متوسط مربع الخطاء (MSE) ومعيار الانحراف الكلي (TD) لمقدرات معلمتي التوزيع كمعايير لمقارنة الاداء للطرائق المستعملة. النتائج تبين بان طريقتين العزوم الاحتمالية الموزونة للنوع الاول المقترح استعمالها ((IPWM1)) الغير متحيزة ((U-IPWM1(Pro.)) و المتحيزة ((B-IPWM1(Pro.)) كانت متشابهة لنتائج اغلب المعايير المستحصلة باستعمال الطرائق الاخرى .

الكلمات المفتاحية : توزيع Lomax الاحتمالي , خصائص توزيع Lomax, مقدرات العزوم , مقدرات العزوم-L, مقدرات العزوم الاحتمالية من النوع الأول المقترحة الغير متحيزة والمتحيزة, مقدرات العزوم الاحتمالية من النوع الثاني الغير متحيزة والمتحيزة.

Abstract

In this study, different methods were used for estimating shape parameter and scale parameter for Lomax distribution, which include method of moment estimation (MOM), and method of L-moment estimation (L-MOM) and method of probability weighted moments (PWM) for type- 1 and type- 2 (proposed) for unbiased and biased estimators. Several models used from the Lomax distribution for data generating, for different sample sizes (small, medium, and large). The results were obtained by using simulation technique; programs written by using MATLAB program were used. To compare the performance for the methods used in this study, the mean squared error criterion (MSE) and total derivation (TD) for two parameters for the Lomax distribution were used as criterion to compare the performance for the methods. The results showing according to the most of the criterions ,that methods of probability weighted moments (PWM) for type -1 (proposed) for unbiased and biased estimators have the same result which obtained by another methods were used in this study.

Key Words: The Lomax Distribution; Properties of the Lomax Distribution ; Method of Moment (MOM) Estimators; Method of L- Moments (L-MOM) estimators; Method of Probability Weighted Moments (PWM) for Type- 1 (proposed) and Type-2 for unbiased and biased estimators.

1. المقدمة

يعد توزيع Lomax توزيع مقترح من توزيع باريتو للنوع الثاني، فقد استعمل للحصول على انموذج جيد في المشاكل الطبية الحيوية (biomedical) وكذلك يعد انموذج مهم لنمذجة اوقات الفشل، فقد استعمل توزيع Lomax ك انموذج تصادفي بمعدل فشل متناقص لاقوات تشغيل المركبات الالكترونية قيد البحث. واستعمل ايضا في الدراسات ذات العلاقة بالدخل والدراسات المتعلقة بحجم المدن. فضلا عن كونه انموذج مفيد في دراسة نظرية الطوابير وفي تحليل البيانات المتعلقة بالاحصاء الحيوي. من هنا تأتي أهمية دراسة خصائص مقدرات معلمتي توزيع Lomax باستعمال طرائق تقدير مختلفة، ونتناول في هذا البحث عدة طرائق لتقدير معلمتي توزيع Lomax متضمنه طريقة العزوم وطريقة العزوم -L التي قدمت من قبل Sillitlo عام 1959، إذ تعتمد طريقة L-MOM على quantiles الدوال التقريبية لدالة التوزيع التجميعية، ويمكن تقديرها بتوليفات خطية للإحصاءات المرتبة-L. وكذلك طريقة العزوم الاحتمالية الموزونة (PWM) [12,11]. وقد تناول العديد من الباحثين دراسة هذا التوزيع وبجوانب مختلفة نذكر بعض منهم بإيجاز تجنباً للأطالة:- فقد قدم Greenwood [9] عام (1979) طريقة العزوم الاحتمالية الموزونة (PWM) التي استعملت في العديد من البحوث والتطبيقات، لتقدير المعلمات لعدة توزيعات احتمالية، التي يمكن التعبير عن دالة التوزيع التراكمية (cdf) بصيغة معكوسة. وقارن Landwehr [16] وآخرون معه عام (1979) طريقة تقدير العزوم الاحتمالية الموزونة (PWM) مع بعض اساليب التقدير التقليدية متضمنة مقدرات الإمكان الأعظم ومقدرات العزوم لتوزيع كامل، وتحري عن خصائص مقدرات العينة الصغيرة ومقدرات الـ quantiles الدوال التقريبية لدالة التوزيع التجميعية. وتوصلوا إلى إن طريقة تقدير العزوم الاحتمالية الموزونة كانت الأفضل مقارنة ببقية طرائق التقدير التقليدية (الإمكان الأعظم و العزوم). واشتق Hosking [13] وآخرون معه عام (1985) مقدرات لمعاملات توزيع القيمة المتطرفة المعمم. وكذلك مقدرات الـ quantiles الدوال التقريبية لدالة التوزيع التجميعية، وتحروا عن خصائص تلك المقدرات في العينات الكبيرة، باستعمال النظرية المحاذية وكذلك في العينات الصغيرة والمتوسطة باستعمال المحاكاة. وتوصلوا إلى إن مقدرات العزوم الاحتمالية الموزونة أعطت اقل تباين وبدون تحيز مقارنة مع مقدرات الإمكان الأعظم. كما درس Hosking [12,11] في عامي 1986 و 1990 طريقة العزوم -L بشكل أوسع لتقدير معاملات بعض من التوزيعات الاحتمالية الإحصائية. وتكون هذه الطريقة عبارة عن دوال خطية لتوقعات الإحصاءات المرتبة، وتعد نظام بديل لوصف أشكال التوزيعات الاحتمالية. وتمتاز طريقة L-MOM بأنها تنتج تقديرات أكثر دقة ورسنية لمعاملات التوزيع الاحتمالي مقارنة بطرائق التقدير الأخرى، فضلا عن سهولة استعمالها حسابيا مقارنة بطريقة الإمكان الأعظم. كما اشتق Balakrishan و Ahsanullah [4] في عام 1994 العلاقات التكرارية للعزوم المفردة وعزوم مضروبات المتغيرات (Single and Product Moments) باستعمال الاحصاءات المرتبة للقيم المسجلة العليا (Upper record Value) من توزيع Lomax. والتي يمكن الاستفادة منها في تحديد المتوسط والتباين ومعاملات الالتواء والتقلطح لاي كمية محورية خطية (Linear pivotal quantity). واشتق Childs وآخرون معه [6] في عام 2001 العلاقات التكرارية للعزوم المفردة وعزوم مضروبات المتغيرات باستعمال الاحصاءات المرتبة للمتغيرات العشوائية المستقلة وغير متطابقة التوزيع سحبت من توزيع Lomax و توزيع Lomax المبتور من جهة

اليمين. واستعمل Abdellah [1] في عام 2003 اسلوب بيز لايجاد حدود بيز للتنبؤ بعينة من الاحصاءات المرتبة المحدودة لعينات من توزيع Lomax عندما تكون معلمتي التوزيع مجهولة والتوزيع الاولي المفترض يخضع للتوزيع الاسي. والتنبؤ بالعينة رقم $(k+1)$ بالاعتماد على العينة السابقة (k) . فقد اعتمد على اول r من الاحصاءات المرتبة لأوقات الفشل في حجم العينة (n) من توزيع Lomax مع حدود التنبؤ للمتغير $(x_{(n)})$ (لأستحصال اوقات اضافية مطلوبة لاكمال الاختبار). وناقش Abd-Elfattah و Alharbey [2] في عام 2010 العزوم الاحتمالية الموزونة المعممة (GPWM) كطريقة لتقدير معلمتي توزيع Lomax, و ناقشا ايضا مصفوفة التباينات والتغايرات للعزوم الاحتمالية الموزونة لمعلمتي توزيع Lomax. وتناول Badiaa و اخرون معه [3] في عام 2011 تقدير معلمتي توزيع Lomax بالاعتماد على بيانات مراقبة هجينة (Hybrid Censored). وقد استعمل طريقة الامكان الاعظم واسلوب بيز واستحصل على مصفوفة معلومات فشر التي استعملت لتكوين فترات الثقة المحاذية لمقدرات معلمتي التوزيع. وقام Cramer و Schmiedt [7] في عام 2011 بتحليل بيانات مراقبة من النوع الثاني بتدرج لنماذج المخاطرة التنافسية التي تتكون من اوقات البقاء للوحدات الفاشلة التي تمثل سبب الفشل, تحت افتراض اوقات الفشل Latent متغيرات عشوائية مستقلة من توزيع Lomax بنفس معلمة القياس (ثابتة) مع معلمات شكل مختلفة. وكذلك في حالة اوقات الفشل تخضع لتوزيعات اسية. وناقشا تقدير الامكان الاعظم للمعلمات المجهولة في هذه الحالة, فضلا عن حساب مصفوفة معلومات فشر وتوقعاتها التي اعتمدت في خطط مراقبة مثلى معتمدة على نمذجة توزيع Lomax. وناقش Panahi و Asadi [20] في عام 2011 تقدير معلمة قوة الاجهاد لتوزيع Lomax على افتراض ان كلا المجتمعين لهما نفس معلمة القياس (ثابتة) لكن بمعلمات شكل مختلفة. واستعمل مقدرات الامكان الاعظم للحصول على المعلمات المجهولة من خلال حل المعادلات غير الخطية, والتي بدورها يتم حساب مقدرات الامكان الاعظم لدالة المعولية (R) . فضلا عن استحصال تقديرات بيز وفترة الثقة المضبوطة لدالة المعولية عندما تكون معلمة القياس معروفة. وتوصلوا الى ان مقدرات الامكان الاعظم تسلك سلوك مشابه لمقدرات بيز تحت افتراض بان التوزيع الاولي Non-informative عند ثبوت حجم العينة. كما اشترك Giles و اخرون معه [8] في عام 2011 مقدرات الامكان الاعظم لمعلمتي توزيع Lomax مع صيغة تقريبية لحساب التحيز والتحيز المصحح لمقدرات الامكان الاعظم لمعلمتي التوزيع. ومن خلال دراسة المحاكاة ولحجوم محددة من العينات. تبين بان الصيغة تقريبية لحساب التحيز المصحح المعتمدة تقلل التحيز في مقدرات الامكان الاعظم لمعلمتي التوزيع. واشترك Morteza و اخرون معه [19] في عام 2012 تقدير معلمتي دوال المعولية والمخاطرة لتوزيع Lomax باستعمال اسلوب بيز وطريقة تقدير الامكان الاعظم اعتمادا على الاحصاءات المرتبة للعينة. وتوصلوا الى ان مقدرات بيز المعتمدة على القيم المسجلة (Record Values), و بيانات مراقبة من النوع الثاني بشكل متدرج تفوقت على مقدرات الامكان الاعظم. ولوحظ بان متوسط مربعات الخطاء يتناقص بزيادة حجم العينة n في الحالة التي تكون فيها معلمة القياس معلومة, وفي الحالة التي تكون فيها كلا المعلمتي (الشكل والقياس) مجهولة لتوزيع Lomax. واستعمل Parviz و Saman [21] في عام 2012 طريقة الامكان الاعظم والعزوم واسلوب بيز لتقدير نقطة اي تقدير معلمة الشكل لتوزيع Lomax الذي يكون بمعلمة واحدة بالاعتماد على اول n من القيم العليا المسجلة. وقد اعتمدت تسجيلات دالة الخسارة ومربع الخطاء والدالة التربيعية كمييار للمقارنة. كما درسوا اقصر و

على فترة ثقة للتوزيعات اللاحقة للمعلمة اعتمادا على القيم المسجلة ومدى ملائمتها بالاعتماد على معيار متوسط مربعات الاخطاء لنقطة التقدير ومعيار الطول لفترة التقدير .

وبناء على ماتقدم فان هدف البحث هو دراسة خصائص مقدرات معلمتي الشكل والقياس لتوزيع Lomax باستعمال العزوم الاحتمالية الموزونة مقارنة بالعزوم التقليدية،متضمنه طريقة العزوم (MOM) و طريقة العزوم L-MOM) والعزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الأول المقترح استعمالها ((IPWM1(Pro.) المتحيزة (U-IPWM1(Pro.) وغير المتحيزة (B-IPWM1(Pro.))، والعزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الثاني (IPWM2) المتحيزة (U-IPWM2) وغير المتحيزة (B-IPWM2). وقد اعتمد معيار المتوسط والانحراف المعياري ومعيار التحيز النسبي و جذر متوسط مربعات الخفاء النسبي لمقدرات معلمتي توزيع Lomax، فضلا عن معيار متوسط مربع الخفاء (MSE) ومعيار الانحراف الكلي (TD) لمقدرات معلمتي التوزيع كمعايير لمقارنة الاداء للطرائق المستعملة في البحث باستعمال المحاكاة لإحجام مختلفة من العينات.

Properties of The Lomax Distribution

2. خواص توزيع Lomax

يعد توزيع Lomax مقترح من توزيع باريتو للنوع الثاني ، اذ يعدانموذج مهم لنمذجت اوقات الفشل ،فقد استعمل توزيع Lomax كانموذج تصادفي بمعدل فشل متناقص لاقات تشغيل المركبات الالكترونية قيد البحث. واستعمل ايضا في الدراسات ذات العلاقة بالدخل والدراسات المتعلقة بحجم المدن وان خصائص هذا التوزيع كالاتي [8]:يقال إن المتغير العشوائي t يتوزع وفق توزيع Lomax بالمعلمتين (α, λ) ، إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) على وفق الصيغة الآتية :

$$f(t) = \frac{\alpha}{\lambda} \left[1 + \frac{t}{\lambda}\right]^{-(1+\alpha)}, \quad t > 0 \quad \dots(1)$$

إذ إن $\alpha > 0$ تمثل معلمة الشكل (Shape parameter)، و $\lambda > 0$ تمثل معلمة القياس (Scale parameter). تكون دالة التوزيع التراكمية (cdf) على وفق الصيغة الآتية:

$$F(t) = P_r(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(u) du$$

$$F(t) = 1 - \left[1 + \frac{t}{\lambda}\right]^{-\alpha} \quad \dots(2)$$

إما الوسط الحسابي للتوزيع يكون على وفق الصيغة الآتية:

$$E(t) = \frac{\lambda}{\alpha - 1} \quad \text{for } \alpha > 1 \quad \dots (3)$$

والتباين للتوزيع يكون على وفق الصيغة الآتية:

$$\text{Var}(t) = \frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)} \quad \text{for } \alpha > 2 \quad \dots(4)$$

إما العزوم المركزية من الرتبة r للتوزيع يكون على وفق الصيغة الآتية:

$$E(t^r) = \frac{\alpha \lambda^r \Gamma(r+1) \Gamma(\alpha-r)}{\Gamma(\alpha+1)} \quad \alpha > r, r = 1, 2, 3, \dots \quad \dots(5)$$

3. طرق التقدير Estimation Methods

3.1 طريقة العزوم (MOM) Method of Moments

في هذه الطريقة يتم ايجاد عزوم التوزيع للمجتمع أولاً ومن ثم مساواتها بعزوم العينة المناظرة لها، وذلك بجعل معلمتي توزيع Lomax اللتين (احصائيتين) من مشاهدات العينة وكما مبين في أدناه [5]:
وان العزم r للمجتمع يكون على وفق الصيغة الآتية :

$$M_r = ET^r \quad \dots(6)$$

وان العزم من الرتبة r للعينة يكون على وفق الصيغة الآتية :

$$m_r = (1/n) \sum_{i=1}^n t^r \quad \dots(7)$$

وبمساواة العزمين للمجتمع والعينة نحصل على :

$$M_r = m_r \quad \dots(8)$$

أولاً : إن العزم الأول ($r=1$) ماهو إلا عبارة عن المتوسط للمجتمع.

$$M_1 = ET^1 = \mu = \frac{\lambda}{\alpha-1}$$

وان متوسط العينة (العزم الأول) يكون على وفق الصيغة الآتية:

$$m_1 = (1/n) \sum_{i=1}^n t = \bar{t}$$

وبمساواة العزمين للمجتمع وللعينة بالاعتماد على عزوم توزيع Lomax إي $M_1 = m_1$ إي إن $\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\alpha}-1} = \bar{t}$ وبذلك فان مقدر معلمة القياس يكون على وفق الصيغة الآتية:

$$\hat{\lambda} = \bar{t} (\hat{\alpha}-1) \quad \dots(9)$$

ثانياً : إن العزم الثاني ($r=2$) للمجتمع سيكون كالآتي :

$$M_2 = ET^2 = \text{Var}(t) + (E(t))^2$$

$$M_2 = \frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)} + (\mu)^2$$

وان العزم الثاني ($r=2$) للعينة يكون على وفق الصيغة الآتية :

$$m_2 = (1/n) \sum_{i=1}^n t_i^2$$

وبمساواة العزمين للمجتمع وللعينة أي $M_2 = m_2$ وبالاعتماد على عزوم توزيع دالة القوى أي إن

$$\frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)} + (\hat{\mu})^2 = (1/n) \sum_{i=1}^n t_i^2$$

وبالتعويض عن $\hat{\mu} = \bar{t}$ بالصيغة أعلاه، والتبسيط نحصل على

$$\frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)} = [(1/n) \sum_{i=1}^n t_i^2 - (\bar{t})^2] \Rightarrow \frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)} = S^2$$

حيث إن $S^2 = [(1/n) \sum_{i=1}^n t_i^2 - (\bar{t})^2]$ وان $\alpha \lambda^2 = S^2 (\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)$ ، وبتعويض $\hat{\lambda}$ المبينة بالصيغة (9) نحصل على

$$\hat{\alpha} (\bar{t} (\hat{\alpha} - 1))^2 = S^2 (\hat{\alpha} - 1)^2 (\hat{\alpha} - 2) \Rightarrow \hat{\alpha} \bar{t}^2 = S^2 (\hat{\alpha} - 2) \Rightarrow \hat{\alpha} \bar{t}^2 = \hat{\alpha} S^2 - 2S^2$$

$$\Rightarrow 2S^2 = \hat{\alpha} S^2 - \hat{\alpha} \bar{t}^2$$

وبذلك فان مقدر معلمة الشكل يكون على وفق الصيغة الآتية:

$$\hat{\alpha} = \frac{2S^2}{S^2 - \bar{t}^2} \quad \dots (10)$$

وبذلك فان تقدير معلمتي توزيع Lomax ستكون على وفق الصيغتين (9) و (10) لـ λ و α على التوالي.

Method of L- Moments (L-MOM)

3.2 طريقة العزوم - L

يمكن تعريف طريقة L-MOM لأي متغير عشوائي (t) يمتلك عزم أول محدود، لتكن الإحصاءات المرتبة لملاحظات العينة العشوائية بحجم (n) سحب من توزيع t، فإن الصيغة العامة لإيجاد العزوم L- للمتغير العشوائي t تكون على وفق الآتي [10,11]:

$$\lambda_r = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} E(t_{r-k:n}) \quad , r = 1, 2, 3, \dots, \quad \dots(12)$$

وقد عرف Hosking(1990) [11] العزوم بالاعتماد على العزوم الاحتمالية الموزونة (B_r) على وفق الصيغة الآتية :

$$B_r = E(t(F)^r) = \int_0^1 t(F) F^r dF \quad , r = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \dots(13)$$

إذ تمثل $t(F)$ معكوس دالة التوزيع التجميعية للمتغير العشوائي t، وفي بحثنا هذا ووفقا لمتغير العشوائي الذي يخضع لتوزيع Lomax بالمعلمتين (α, λ) ، نعرف أول عزمين - ($\lambda_r, r = 1, 2$) L باستعمال الصيغة (13) على وفق الآتي:

$$\lambda_1 = B_0 \quad \dots(14)$$

$$\lambda_2 = 2B_1 - B_0 \quad \dots(15)$$

غالبا ما تكون العزوم L- مقدر من عينة عشوائية بحجم n بمشاهدات مرتبة ترتيبا تصاعديا، ويرمز لها بـ (ℓ_r) وتكون عبارة عن توليفات خطية لملاحظات العينة المرتبة والتي تتضمن معلومات حول معلمة الشكل والقياس وكذلك الالتواء والتقلطح للتوزيع الاحتمالي الذي سحبت منه العينة. ويمكن تعريف العزم L- من الرتبة (r) للعينة (ℓ_r) على وفق الآتي:

$$\ell_r = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} t_{i_r-k:n} \quad , r = 1, 2, 3, \dots, \quad \dots(16)$$

ويمكن تعريف ($\ell_r, r = 1, 2$) بالاعتماد على الطريقة المباشرة لتقدير العزوم L- للعينة على وفق الآتي [22]:

$$\ell_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{(i:n)} = \bar{t} \quad \dots(17)$$

$$\ell_2 = \frac{1}{n} \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i=1}^n \left[\binom{i-1}{1} - \binom{n-i}{1} \right] t_{(i:n)} \quad \dots(18)$$

وبذلك فإن صيغ اشتقاق تقدير المعلمتي (α, λ) لتوزيع Lomax ستكون على وفق الخطوات الآتية :

1. باستعمال دالة cdf لتوزيع Lomax بالمعلمتين (α, λ) على وفق الصيغة (2) في المبحث 2- ويجعل

$$F = F(t) = 1 - \left[1 + \frac{t}{\lambda} \right]^{-\alpha}$$

2. نجد معكوس دالة cdf للتوزيع التي تكون على وفق الصيغة الآتية:

$$t(F) = \lambda[(1-F)^{-1/\alpha} - 1] \quad \dots(19)$$

3. بتعويض الصيغة (19) بالصيغة (13) نحصل على (B_r) وكما مبين أدناه

$$B_r = \int_0^1 t(F) F^r dF = \int_0^1 \lambda[(1-F)^{-1/\alpha} - 1] F^r dF = \lambda \left[\int_0^1 (1-F)^{-1/\alpha} F^r dF - \int_0^1 F^r dF \right]$$

$$B_r = \lambda [\text{Beta}(-\frac{1}{\alpha} + 1, r+1) - \text{Beta}(1, r+1)]$$

وبذلك فإن B_r ستكون على وفق الصيغة الآتية:

$$B_r = \lambda \frac{\Gamma(1-\frac{1}{\alpha}) \Gamma(r+1)}{\Gamma(2-\frac{1}{\alpha}+r)} - \frac{\lambda}{(r+1)}, \quad r=0,1. \quad \dots(20)$$

4. ايجاد λ_1 و λ_2 بعد ايجاد B_1 و B_0 من الصيغة (20) المبينة اعلاه.

$$\lambda_1 = B_0 = \lambda \frac{\Gamma(1-\frac{1}{\alpha}) \Gamma(1)}{\Gamma(2-\frac{1}{\alpha})} - \lambda, \quad r=0$$

اذ إن $\Gamma(1) = 1$ و إن $\Gamma(2-\frac{1}{\alpha}) = (1-\frac{1}{\alpha})\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})$ وبالتبسيط لـ λ_1 وكما مبين ادناه، نحصل على λ_1

$$\lambda_1 = \lambda \frac{\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(2-\frac{1}{\alpha})} - \lambda = \lambda \frac{\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})}{(1-\frac{1}{\alpha})\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})} - \lambda = \lambda \frac{1}{(1-\frac{1}{\alpha})} - \lambda$$

$$\lambda_1 = B_0 = \lambda \frac{\alpha}{(\alpha-1)} - \lambda = \lambda \left(\frac{\alpha-\alpha+1}{\alpha-1} \right) \Rightarrow \lambda_1 = B_0 = \left(\frac{\lambda}{\alpha-1} \right) = \text{Mean} \quad \dots(21)$$

إما B_1 فإنها ستكون على وفق الصيغة الآتية :

$$B_1 = \lambda \frac{\Gamma(1-\frac{1}{\alpha}) \Gamma(2)}{\Gamma(3-\frac{1}{\alpha})} - \frac{\lambda}{2}, \quad r=1$$

اذ إن $\Gamma(2) = 1$ و إن $\Gamma(3-\frac{1}{\alpha}) = (2-\frac{1}{\alpha})(1-\frac{1}{\alpha})\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})$ فإن

$$B_1 = \lambda \frac{\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})}{(2-\frac{1}{\alpha})(1-\frac{1}{\alpha})\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})} - \frac{\lambda}{2} = \lambda \frac{1}{(2-\frac{1}{\alpha})(1-\frac{1}{\alpha})} - \frac{\lambda}{2}$$

$$B_1 = \lambda \left[\frac{\alpha^2}{(2\alpha-1)(\alpha-1)} - \frac{1}{2} \right]$$

وبالتبسيط نحصل على B_1 على وفق الصيغة الآتية :

$$B_1 = \lambda \left[\frac{3\alpha-1}{2(2\alpha-1)(\alpha-1)} \right] \quad \dots(22)$$

وبتعويض الصيغتين (21) و (22) بالعزم الثاني L- المبين بالصيغة (15) نحصل على الآتي:

$$\lambda_2 = 2 \left(\lambda \left[\frac{3\alpha-1}{2(2\alpha-1)(\alpha-1)} \right] - \left(\frac{\lambda}{\alpha-1} \right) \right)$$

وباخراج $\left(\frac{\lambda}{\alpha-1} \right)$ عامل مشترك نحصل على الآتي:

$$\lambda_2 = \left(\frac{\lambda}{\alpha-1} \right) \left(\frac{3\alpha-1}{2\alpha-1} - 1 \right) \Rightarrow \lambda_2 = \left(\frac{\lambda}{\alpha-1} \right) \left(\frac{3\alpha-1-(2\alpha-1)}{2\alpha-1} \right) \Rightarrow \lambda_2 = \left(\frac{\lambda}{\alpha-1} \right) \left(\frac{\alpha}{2\alpha-1} \right) \quad \dots(23)$$

5. للحصول على مقدرات المعلمتي (α, λ) لتوزيع Lomax، يتم مساواة العزمين L- الأول و الثاني للمجتمع

$(\lambda_1$ و $\lambda_2)$ المبينة بالصيغتين (21) و (23) على التوالي مع العزمين L- الأول والثاني للعينة

$(l_1$ و $l_2)$ المبينة بالصيغتين (17) و (18) على التوالي وكما مبين أدناه

بوضع $\lambda_1 = l_1$ نحصل على الصيغة التقديرية للمعلمة λ وكما مبين أدناه

$$l_1 = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\alpha}-1} \Rightarrow \hat{\lambda} = l_1(\hat{\alpha}-1) \quad \dots(24)$$

بوضع $\lambda_2 = l_2$ نحصل على الصيغة التقديرية للمعلمة α وكما مبين أدناه

$$l_2 = \left(\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\alpha}-1} \right) \left(\frac{\hat{\alpha}}{2\hat{\alpha}-1} \right) \Rightarrow l_2 = l_1 \left(\frac{\hat{\alpha}}{2\hat{\alpha}-1} \right) \Rightarrow l_2(2\hat{\alpha}-1) = \hat{\alpha} l_1 \Rightarrow 2\hat{\alpha} l_2 - l_2 = \hat{\alpha} l_1$$

$$\hat{\alpha}(2l_2 - l_1) = l_2 \Rightarrow \hat{\alpha} = \left(\frac{l_2}{2l_2 - l_1} \right) \quad \dots(25)$$

بتعويض قيمة $\hat{\alpha}$ المبينة بالصيغة (25) بالصيغة (24) نحصل على $\hat{\lambda}$.

3.3 طريقة العزوم الاحتمالية الموزونة (PWM) Method of Probability Weighted Moments

يمكن تعريف العزوم الاحتمالية الموزونة (PWM) لأي متغير عشوائي ليكن (t) على وفق الصيغة

الآتية[9]:

$$\mu_{s,r,k} = E[t^s F^r (1-F)^k] = \int_0^1 [t(F)]^s F^r (1-F)^k dF \quad \dots (26)$$

إذ إن $F = F(t; \alpha, \lambda)$ تمثل دالة التوزيع التراكمية (cdf) بالمعلمتين (α, λ) ، وان $t(F) = t(F; \alpha, \lambda)$ تمثل معكوس دالة cdf بالمعلمتين (α, λ) . وان (k, r, s) تكون إعداد صحيحة موجبة. ويمكن الحصول على صيغتين بسيطة ومفيدة لتقدير العزوم الاحتمالية الموزونة للمجتمع من الصيغة (26) كما سيرد شرحها في أدناه.

أولاً: بوضع $s=1$ و $r=0$ نحصل على النوع الأول من العزوم الاحتمالية الموزونة (IPWE1) (μ_k) ، وهي الصيغة المقترح استعمالها في تقديرات معلمتي توزيع Lomax وتكون على وفق الصيغة الآتية :

$$\mu_k = \mu_{1,0,k} = \int_0^1 [t(F)](1-F)^k dF \quad \dots (27)$$

ثانياً: بوضع $s=1$ و $k=0$ نحصل على النوع الثاني من العزوم الاحتمالية الموزونة (IPWE2) ، التي اعتمدت من قبل الباحثين Abd-Elfattah و Alharbey [2] في مناقشة مقدرات معلمتي توزيع Lomax، كما مبين في الصيغة الآتية:

$$B_r = \mu_{1,r,0} = \int_0^1 [t(F)]F^r dF \quad \dots (28)$$

ولاية مجموعة من المشاهدات المرتبة ترتيباً تصاعدياً $(t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_n)$ يمكن تقدير تكامل العزوم الاحتمالية الموزونة (IPWM1) من النوع الأول لـ (μ_k) وهي الصيغة المقترح استعمالها في تقديرات معلمتي توزيع Lomax ويرمز لها بـ (a_k) وتكون على وفق الصيغة الآتية :

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(1 - P_{nex,i})^k t_i] \quad \dots (29)$$

إما تقدير تكامل العزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الثاني (IPWM2) (B_r) ويرمز لها بـ (b_r) تكون على وفق الصيغة الآتية :

$$b_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(P_{nex,i}^s) t_i] \quad \dots (30)$$

وتكون k و $r=0,1,2, \dots, (n-1)$ وتأخذ القيم موجبة، وتأخذ القيم k و $r=0,1,2, \dots, (n-1)$ وتمثل المشاهدات رقم (i) المرتبة ترتيباً تصاعدياً بين مشاهدات العينة بحجم (n) وان $P_{nex,i}$ تمثل احتمال عدم تجاوز (non-exceedance) للحدث رقم (i) الذي يمكن تقديره بأسلوب موقع الرسم (plotting position) أو بدونه. وقد استعملت عدة صيغ تقريبية لـ $P_{nex,i}$ للحصول على العزوم الاحتمالية الموزونة نذكر منها المستخدمة في هذا البحث وهي :

استعمل Landweher(1979) [15] الصيغة غير المتحيزة لـ $P_{nex,i}$ (U-IPWE) على وفق الصيغة الآتية:

$$P_{nex,i}^j = \frac{(i-1)! (n-j-1)!}{(n-1)! (i-j-1)!}, j = 0,1,2,3,\dots,(n-1) \quad \dots(31)$$

واستعمل Hosking [11] و Landweher [15] و Abd-Elfattah و Alharbey [2] الصيغة المتحيزة لـ $P_{nex,i}$ على وفق الصيغة الآتية :

$$P_{nex,i}^j = \left(\frac{i-0.35}{n}\right)^j, j = 0,1,2,3,\dots,(n-1) \quad \dots(32)$$

وبذلك فان صيغ اشتقاق تقدير المعلمتي (α, λ) لتوزيع Lomax ستكون على نوعين كالآتي:

A: اشتقاق تقدير المعلمتي (α, λ) لتوزيع Lomax باستعمال النوع الأول من العزوم الاحتمالية الموزونة المقترح

استعمالها (IPWE1 (pro.)) المبينة في الصيغة (27) على وفق الخطوات الآتية:

1. استعمال دالة cdf لتوزيع Loma بالمعلمتين (α, λ) على وفق الصيغة (2) بجعل

$$F = F(t) = 1 - \left[1 + \frac{t}{\lambda}\right]^{-\alpha}$$

2. باستعمال معكوس دالة cdf للتوزيع المبينة بالصيغة (19) وهي $t(F) = \lambda [(1-F)^{-1/\alpha} - 1]$

3. بتعويض الصيغة (19) في الصيغة (27) نحصل على (μ_k) وكما مبين أدناه.

$$\mu_k = \mu_{1,0,k} = \int_0^1 [t(F)](1-F)^k dF = \int_0^1 \lambda [(1-F)^{-1/\alpha} - 1](1-F)^k dF$$

$$\mu_k = \lambda \left[\int_0^1 [(1-F)^{(-1/\alpha)+k}] dF - \int_0^1 (1-F)^k dF \right]$$

$$\mu_k = \lambda \left[\text{Beta}\left(k - \frac{1}{\alpha} + 1, 1\right) - \text{Beta}(k+1, 1) \right]$$

$$\mu_k = \lambda \left(\frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{\alpha} + 1\right) \Gamma(1)}{\Gamma\left(k - \frac{1}{\alpha} + 2\right)} - \frac{\Gamma(k+1) \Gamma(1)}{\Gamma(k+2)} \right), \quad \dots(35)$$

4. ايجاد μ_0 و μ_1 وذلك بالتعويض عن $k=0$ و $k=1$ بالصيغة (35) وكما مبين على التوالي.

$$\mu_0 = \lambda \left[\frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \Gamma(1)}{\Gamma\left(2 - \frac{1}{\alpha}\right)} - \frac{\Gamma(1) \Gamma(1)}{\Gamma(2)} \right], \quad k = 0$$

ولأنه $\Gamma(1) = 1$ و $\Gamma(2) \neq 1$, وان $\Gamma(2 - \frac{1}{\alpha}) = (1 - \frac{1}{\alpha})\Gamma(1 - \frac{1}{\alpha})$,وبذلك فان μ_0 ستكون

كالآتي:

$$\mu_0 = \lambda \left(\frac{\Gamma(1 - \frac{1}{\alpha})}{(1 - \frac{1}{\alpha})\Gamma(1 - \frac{1}{\alpha})} - 1 \right) \Rightarrow \mu_0 = \lambda \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} - 1 \right) \Rightarrow \mu_0 = \lambda \left(\frac{\alpha - \alpha + 1}{\alpha - 1} \right)$$

$$\mu_0 = \left(\frac{\lambda}{\alpha - 1} \right) \quad \dots (36)$$

وبالتعويض عن $k=1$ بالصيغة (35), سنجد μ_1 على وفق الصيغة الآتية :

$$\mu_1 = \lambda \left(\frac{\Gamma(2 - \frac{1}{\alpha}) \Gamma(1)}{\Gamma(3 - \frac{1}{\alpha})} - \frac{\Gamma(2) \Gamma(1)}{\Gamma(3)} \right), \quad k = 1$$

ولأنه $\Gamma(1) = 1$ و $\Gamma(2) = 1$ و $\Gamma(3) = 2\Gamma(2)$ وان $\Gamma(3 - \frac{1}{\alpha}) = (2 - \frac{1}{\alpha})\Gamma(2 - \frac{1}{\alpha})$,وبذلك فان μ_1 ستكون

$$\mu_1 = \lambda \left(\frac{1}{(2 - \frac{1}{\alpha})} - \frac{1}{2} \right) = \lambda \left(\frac{\alpha}{(2\alpha - 1)} - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \mu_1 = \lambda \left(\frac{2\alpha - 2\alpha + 1}{(4\alpha - 2)} \right)$$

وعليه فان μ_1 ستكون كالآتي:

$$\mu_1 = \left(\frac{\lambda}{4\alpha - 2} \right) \quad \dots (37)$$

إما تقديرات العزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الأول للعينة (a_k) , فسيتم ايجاد a_0 و a_1 بالتعويض عن $k=0$ و $k=1$ في الصيغة (29) نحصل على الصيغتين المبينه ادناه وعلى التوالي .

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(1 - P_{nex,i})^0 t_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = \bar{t} \quad \dots (38)$$

$$a_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(1 - P_{nex,i})^1 t_i] \quad \dots (39)$$

وان $P_{nex,i}$ في حالة التقدير غير المتحيز تكون مساوية لـ

$$P_{nex,i} = \frac{(i-1)}{(n-1)}, \quad j = 1 \quad \dots (40)$$

وفي حالة التقدير المتحيز فستكون $P_{nex,i}$ مساوية لـ

$$P_{nex,i} = \left(\frac{i-0.35}{n} \right), j=1 \quad \dots(41)$$

5. ولاشتقاق صيغ تقدير المعلمتي (α, λ) لتوزيع Lomax باستعمال (IPWE1 (pro.)) نتبع مايلي:

نقوم بمساواة الصيغة (36) بالصيغة (38) والتبسيط نحصل على صيغة تقدير المعلمة λ وكما مبين أدناه

$$a_0 = \left(\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\alpha}-1} \right) \Rightarrow \hat{\lambda} = a_0 (\hat{\alpha}-1) \quad \dots(42)$$

إما صيغة تقدير المعلمة α فيتم الحصول عليه بمساواة الصيغة (37) بالصيغة (39)

$$a_1 = \left(\frac{\hat{\lambda}}{4\hat{\alpha}-2} \right) \Rightarrow \hat{\lambda} = a_1 (4\hat{\alpha}-2)$$

وبالتعويض عن $\hat{\lambda}$ بـ $(a_1 (4\hat{\alpha}-2))$ بالصيغة (42) والتبسيط نحصل على $\hat{\alpha}$ كما مبين ادناه

$$a_0 (\hat{\alpha}-1) = a_1 (4\hat{\alpha}-2) \Rightarrow \hat{\alpha} a_0 - a_0 = \hat{\alpha} 4a_1 - 2a_1 \Rightarrow 2a_1 - a_0 = \hat{\alpha} (4a_1 - a_0)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{2a_1 - a_0}{4a_1 - a_0} \quad \dots(43)$$

وبتعويض قيمة $\hat{\alpha}$ بالصيغة (42) نحصل على قيمة $\hat{\lambda}$.

B: اشتقاق صيغ تقدير المعلمتي (α, λ) لتوزيع Lomax باستعمال النوع الثاني من العزوم الاحتمالية الموزونة (IPWE2) المبينة في الصيغة (28) على وفق الخطوات الاتية:

1. باستعمال دالة cdf لتوزيع Lomax بالمعلمتين (α, λ) على وفق الصيغة (2) بجعل

$$F = F(t) = 1 - \left[1 + \frac{t}{\lambda} \right]^{-\alpha}$$

2. باستعمال معكوس دالة cdf لتوزيع Loma المبينة بالصيغة (19) وهي $t(F) = \lambda [(1-F)^{-1/\alpha} - 1]$

3. بتعويض الصيغة (19) بالصيغة (28) يتم ايجاد B_r على وفق الصيغة (20) وكالاتي:

$$B_r = \int_0^1 t(F) F^r dF = \int_0^1 \lambda [(1-F)^{-1/\alpha} - 1] F^r dF = \lambda \left[\int_0^1 [(1-F)^{-1/\alpha}] F^r dF - \int_0^1 F^r dF \right]$$

$$B_r = \lambda \left[\text{Beta} \left(-\frac{1}{\alpha} + 1, r+1 \right) - \text{Beta} (1, r+1) \right]$$

$$B_r = \lambda \frac{\Gamma(1 - \frac{1}{\alpha}) \Gamma(r+1)}{\Gamma(2 - \frac{1}{\alpha} + r)} - \frac{\lambda}{(r+1)}, r=0,1. \quad \dots(20)$$

4. ايجاد B_0 و B_1 من الصيغة (20) وكما مبين أدناه

بوضع $r=0$ بالصيغة المعتمدة لحساب B_r فان B_0 ستكون على وفق الصيغة (21) المبينة في المبحث 3.2.

$$B_0 = \left(\frac{\lambda}{\alpha - 1} \right)$$

بوضع $r=1$ بالصيغة المعتمدة لحساب B_r فان B_1 ستكون على وفق الصيغة (22) المبينة في المبحث 3.2.

$$B_1 = \lambda \left[\frac{3\alpha - 1}{2(2\alpha - 1)(\alpha - 1)} \right] \Rightarrow B_1 = \left(\frac{\lambda}{\alpha - 1} \right) \left(\frac{3\alpha - 1}{4\alpha - 2} \right)$$

$$B_1 = B_0 \left(\frac{3\alpha - 1}{4\alpha - 2} \right)$$

إما تقديرات العزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الثاني للعينة (b_r) ، فسيتم ايجاد b_0 و b_1 بالتعويض عن $r=0$

و $r=1$ في الصيغة (30) وكما مبين بالصيغتين ادناه وعلى التوالي .

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(P_{nex,i})^0 t_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = \bar{t} \quad \dots (44)$$

$$b_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(P_{nex,i})^1 t_i] \quad \dots (45)$$

وستكون $P_{nex,i}$ في حالة التقدير غير المتحيز وفقا للصيغة (40)، إما في حالة التقدير المتحيز ستكون وفقا للصيغة (41).

5. ولاشتقاق صيغ تقدير المعلمتي (α, λ) لتوزيع Lomax باستعمال (IPWE2) نتبع مايلي:

نقوم بمساواة الصيغة (21) بالصيغة (44) والتبسيط نحصل على صيغة تقدير المعلمة λ وكما مبين أدناه .

$$b_0 = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\alpha} - 1} \Rightarrow \hat{\lambda} = b_0 (\hat{\alpha} - 1) \quad \dots (46)$$

إما صيغة تقدير المعلمة α فيتم الحصول عليه بمساواة الصيغة (22) بالصيغة (45) والتبسيط نحصل على α

كما مبين أدناه.

$$b_1 = b_0 \left(\frac{\hat{\alpha} - 1}{4\hat{\alpha} - 2} \right) \Rightarrow b_1 (4\hat{\alpha} - 2) = b_0 (3\hat{\alpha} - 1) \Rightarrow 4\hat{\alpha} b_1 - 2b_1 = 3\hat{\alpha} b_0 - b_0$$

$$3\hat{\alpha} b_0 - 4\hat{\alpha} b_1 = b_0 - 2b_1 \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{b_0 - 2b_1}{3b_0 - 4b_1} \quad \dots (47)$$

وبتعويض قيمة $\hat{\alpha}$ بالصيغة (46) نحصل على قيمة $\hat{\lambda}$.

4. الجانب التجريبي

تم استعمال المحاكاة لغرض دراسة خصائص مقدرات معلمتي (α, λ) (Lomax)، ووفقا لكل الطرائق المتقدم ذكرها في المبحث (3)، تم بناء التجارب على وفق الفروض والموصفات التالية :

1. تم استعمال أحجام العينات $n = 15, 25, 50, 100, 150, 250$

2. ثم توليد بيانات لتوزيع Lomax على وفق الصيغة الآتية:

$$t_i = t(F) = \lambda[(1-u_i)^{-1/\alpha} - 1] \quad \dots(48)$$

حيث إن u_i متغير عشوائي من التوزيع المنتظم القياسي، أي $u_i \sim U(0, 1) \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n$ واعتمادا على القيم المفترضة للمعلمتي (α, λ) كما مبينة أدناه:

Model -5 with $(\alpha = 1.5, \lambda = 2)$

Model -1 with $(\alpha = 1.5, \lambda = 1)$

Model -6 with $(\alpha = 2, \lambda = 2)$

Model -2 with $(\alpha = 2, \lambda = 1)$

Model -7 with $(\alpha = 2.5, \lambda = 2)$

Model -3 with $(\alpha = 2.5, \lambda = 1)$

Model -8 with $(\alpha = 4, \lambda = 2)$

Model -4 with $(\alpha = 4, \lambda = 1)$

3. ويتم إجراء التجارب المختلفة وفقا لجميع التوليفات الممكنة للفروض المتقدم ذكرها أعلاه من خلال تكرار هذا التوليد لتوزيع Lomax \downarrow 1000 مرة لكل تجربة ولكل حجم عينة (n) .

4. ومن ثم يتم استعمال طرائق التقدير المتقدم ذكرها في المبحث (3) لتقدير معلمة الشكل ومعلمة القياس .

وقد استعمل الـ MATLAB لكتابة برامج البحث على وفق الخوارزميات المبينة بالمخططات الأنسابية رقم (1) ولغاية رقم (6) المبينة في الملحق. سنلاحظ في كل مرة مالذي ستؤول إليه نتائج التقدير، وذلك باستعمال المعايير التالية للإشارة إلى جودة تلك التقديرات وكما مبين أدناه.

5. استعمال المعايير التالية لمعرفة خصائص وافضلية التقديرات

حساب معيار المتوسط $(\hat{\mu}(\hat{\theta}_i))$ والانحراف المعياري $(SD(\hat{\theta}_i))$ لمعلمتي توزيع Lomax المقدر على وفق الصيغتين المبينة ادناه على التوالي.

$$\hat{\mu}(\hat{\theta}_i) = \sum_{r=1}^{1000} \hat{\theta}_i(r)/1000, \quad i = 1, 2. \quad \dots(49)$$

$$SD(\hat{\theta}_i) = \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta}_i)} = \sqrt{\frac{1}{1000-1} \sum_{r=1}^{1000} (\hat{\theta}_i(r) - \hat{\mu}(\hat{\theta}_i))^2}, \quad i = 1, 2. \quad \dots(50)$$

إذ إن $\hat{\theta}_i$ قد تكون إحدى معلمتي التوزيع (α, λ) ، تزداد جودة التقديرات كلما قلت قيمة الانحراف المعياري للمعلمة المقدر.

حساب معيار التحيز النسبي (R_BIAS) و جذر متوسط مربعات الخطاء النسبي (R_RMSE) لمعلمتي توزيع Lomax المقدر على وفق الصيغتين المبينة ادناه على التوالي.

$$R_BIAS(\theta_i) = \frac{1}{\theta_i} [\theta_i - \hat{\mu}(\theta_i)] \quad , i = 1, 2. \quad \dots(51)$$

$$R_RMSE(\theta_i) = \frac{1}{\theta_i} [(\theta_i - \hat{\mu}(\theta_i))^2 + \text{Var}(\hat{\theta}_i)]^{1/2} \quad , i = 1, 2. \quad \dots(52)$$

إذ إن θ_i قد تكون إحدى معلمتي التوزيع (α, λ) ، وتزداد جودة التقديرات كلما اقتربت قيمة المعيارين اعلاه من الصفر، وإن القيم الموجبة لمعيار (R_BIAS) تعني القيمة المقدرة للمعلمة تكون اقل من القيمة الحقيقية (أي القيمة المفترضة للانموذج الذي تم توليد البيانات منه)، أما القيم السالبة لهذا المعيار تعني القيمة المقدرة للمعلمة تكون اكبر من القيمة الحقيقية.

متوسط مربعات الخطأ (MSE) Mean Squared Error

$$MSE = \sum_{r=1}^{1000} (\theta_i - \hat{\theta}_i(r))^2 / 1000 \quad \dots(53)$$

إذ إن θ_i قد تكون إحدى معلمتي التوزيع (α, λ) ، و تزداد جودة التقديرات كلما اقتربت قيمة هذا المعيار من الصفر.

الانحراف الكلي (TD) Total Derivation

$$TD = \frac{1}{1000} \sum_{r=1}^{1000} \left[\left| \frac{\hat{\alpha}(r) - \alpha}{\alpha} \right| + \left| \frac{\hat{\lambda}(r) - \lambda}{\lambda} \right| \right] \quad \dots(54)$$

وتزداد جودة التقديرات كلما اقتربت قيمة هذا المعيار من الصفر. وقد لخصت النتائج مما تقدم ذكره في الجدول (1-8).

4.1 استعراض النتائج التجريبية

في هذا المبحث سنعرض النتائج التي تم الحصول عليها وتحليلها عند تقدير معايير المفاضلة المتقدم ذكرها في الفقرات (49) و(54) للتحري عن خصائص جودت التقديرات لتوزيع Lomax بالمعلمتي (α, λ) ، باستعمال طرائق التقدير متضمنه طريقة العزوم التقليدية وطريقة العزوم الاحتمالية الموزونه على وفق الصيغ المتقدم ذكرها في المبحث (3). وقد تم تنفيذ التجارب على مرحلتين وكما مبين في ادناه:-
المرحلة الاولى :- يتم استعمال العزوم الاحتمالية الموزونه (متضمنه طريقتي العزوم الاحتمالية الموزونه للنوع الاول المقترح استعمالها (IPWM1) الغير متحيزة (U-IPWM1(Pro.) والمتحيزة (B-IPWM1(Pro.) والعزوم الاحتمالية الموزونه للنوع الثاني (IPWM2) الغير متحيزة (U-IPWM2) والمتحيزة (B-IPWM2)) والعزوم التقليدية (متضمنه طريقة العزوم (MOM) وطريقة العزوم-L (L_MOM)) لاختبار تاثير عدد مرات تكرار التجربة (r) على خصائص مقدرات المعلمتي (α, λ) لتوزيع Lomax.

فقد نفذت التجارب للانموذج Model-1 المفترض بالمعلمتين $(\alpha = 1.5, \lambda = 1)$ وفقا لطرائق التقدير المختلفة ولكل حجوم العينات وفقا لعدد مرات تكرار التجربة المفترضة ($r = 1000, 2000, 4000$). وقد لخصت النتائج في الجدول (1) التي تبين قيم المتوسط ($\hat{\mu}$) والانحراف المعياري (\hat{SD}) للقيم المقدرة لمعلمتي الشكل و القياس

للتوزيع Lomax مع قيم التحيز النسبي (R_BIAS) وجذر متوسط مربعات الخطاء النسبي (R_RMSE) ومتوسط مربعات الخطاء (MSE) لكلا المعلمتين المقدرتين والانحراف الكلي (TD). نلاحظ بشكل عام من الجدول (1) وفقا لكل طريقة من طرائق التقدير وكما مبين ادناه.

• باستعمال طريقة MOM على وفق المعايير المتقدم ذكرها نلاحظ بانه :-

على وفق مقياس اقل قيمة لمعيار الانحراف المعياري (\hat{SD}) لكلا المعلمتين المقدرتين لـ (α, λ) عند التكرار $r=4000$ عندما يكون حجم العينة $n=15$. في حين تكون اقل قيمة لهذا المعيار عند $r=2000$ عندما تكون $n=25$. وان اقل قيمة لهذا المعيار عند التكرار $r=1000$ لبقية احجام العينات عدا $n=100$, اذ تكون اقل قيمة لهذا المعيار للمعلمة المقدره α عند $r=1000$, اما اقل قيمة لمعيار \hat{SD} للمعلمة المقدره λ تكون عند التكرار $r=2000$. اما على وفق مقياس اقتراب معيار التحيز النسبي (R_BIAS) من الصفر سواء كانت التحيزات سالبة او موجبة لكلا المعلمتين المقدرتين لتوزيع Lomax, فقد كانت جودت التقدير افضل لقيم $n=15, 50$ عند التكرار $r=2000$. في حين تكون جودت التقدير افضل للمعلمة المقدره α عند $r=2000$ وعند $r=1000$ للمعلمة المقدره λ . اما $n=25$ اما لحجم العينة $n=100$, فقد كانت جودت التقدير افضل لكلا المعلمتين عند التكرار $r=4000$, اما ببقية قيم n فقد كانت افضل جودت لتقدير وللكلا المعلمتين عند $r=1000$. وعلى وفق مقياس اقتراب المعيارين جذر متوسط مربعات الخطاء النسبي (R_RMSE) ومعيار متوسط مربعات الخطاء (MSE) من الصفر, اذ تكون جودت التقدير افضل عند التكرار $r=4000$ لحجم العينة $n=15$. وتعد جودت التقدير افضل عند $r=2000$ لـ $n=25$. اما لحجم العينة $n=50$ و $n \geq 150$ فان جودت التقدير تعد افضل عند $r=1000$. وتعد جودت التقدير للمعلمة α افضل عند $r=1000$, في حين تكون جودت التقدير للمعلمة λ افضل عند $r=2000$, عندما تكون $n=100$. وكذلك على وفق مقياس اقتراب معيار الانحراف الكلي (TD) من الصفر, فقد كانت جودت التقدير افضل عند التكرار $r=2000$ لقيم $n=15, 25, 100$. اما ببقية قيم n فقد كانت جودت التقدير افضل عند $r=1000$.

• باستعمال طريقة L-MOM على وفق المعايير المتقدم ذكرها نلاحظ بانه :-

وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} لكلا المعلمتين المقدرتين تكون اقل قيمة لهذا المعيار عند التكرار $r=1000$ لكل حجوم العينات (n) عدا الحجم $n=25$ فقد كانت اقل قيمة لهذا المعيار عند $r=2000$. وعلى وفق مقياس اقتراب معيار R_BIAS من الصفر لكلا المعلمتين المقدرتين لتوزيع Lomax, اذ تكون جودت التقدير افضل لكل قيم n عند $r=1000$. اما على وفق مقياس اقتراب المعيارين R_RMSE ومعيار MSE من الصفر لكلا المعلمتين المقدرتين, اذ تكون جودت التقدير افضل عند التكرار $r=1000$ لكل قيم n عدا $n=25$, فقد كانت جودت التقدير افضل عند $r=2000$. وعلى وفق مقياس اقتراب معيار TD من الصفر, فقد كانت جودت التقدير افضل عند التكرار $r=1000$ لكل قيم n عدا $n=50$, اذ تكون جودت لتقدير افضل عند $r=4000$.

• باستعمال طريقة U-IPWM2 على وفق المعايير المتقدم ذكرها نلاحظ بانه :-

وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} لكلا المعلمتين المقدرتين تكون اقل قيمة لهذا المعيار عند التكرار $r=1000$ لاجسام العينات $n=25$ و $n \geq 100$ في حين تكون اقل قيمة لهذا المعيار عند $r=2000$ عند $n=15$, وعند

$r=4000$ لـ $n=50$ و على وفق مقياس اقتراب معيار **R_BIAS** من الصفر لكلا المعلمتين المقدرتين لتوزيع Lomax, اذ تكون جودت التقدير افضل لاجسام العينات $n=25$ و $n \geq 100$ عند التكرار $r=1000$, في حين تكون جودت التقدير افضل عند التكرار $r=1000$ للمعلمة المقدره α , وعند $r=2000$ للمعلمة المقدره λ عندما تكون $n=15$. اما عندما تكون $n=50$ فان جودت التقدير تعد افضل عند $r=2000$ لكلا المعلمتين. وكذلك على وفق مقياس اقتراب المعيارين **R_RMSE** ومعيار **MSE** من الصفر لكلا المعلمتين المقدرتين, اذ تكون جودت التقدير افضل عند $r=1000$ لاجسام العينات $n=25$ و $n \geq 100$. في حين تكون جودت التقدير افضل عند $r=2000$ لـ $n=15$, اما لـ $n=50$ فان جودت التقدير تعد افضل عند $r=4000$ لكلا المعلمتين. اما على وفق مقياس اقتراب معيار TD من الصفر, فقد كانت جودت التقدير افضل عند $r=1000$ لكل قيم n عدا $n=50$, فقد كانت جودت لتقدير افضل عند $r=4000$.

• باستعمال طريقة **B-IPWM2** على وفق المعايير المتقدم ذكرها نلاحظ بانها :-

وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} لكلا المعلمتين المقدرتين تكون اقل قيمة لهذا المعيار عند التكرار $r=1000$ لقيم $n=15$ و $n \geq 100$ في حين تكون اقل قيمة لهذا المعيار عند $r=2000$ لقيم $n=25, 50$. وعلى وفق مقياس اقتراب معيار **R_BIAS** من الصفر لكلا المعلمتين المقدرتين لتوزيع Lomax, فقد كانت جودت التقدير افضل عندما تكون $n \geq 50$ عند $r=1000$. في حين تكون جودت التقدير افضل عند $r=1000$ للمعلمة المقدره α وعند $r=2000$ للمعلمة المقدره λ عندما تكون $n=15$. اما عندما تكون $n=25$ فان جودت التقدير تعد افضل عند $r=2000$ لكلا المعلمتين. اما على وفق مقياس اقتراب المعيارين **R_RMSE** ومعيار **MSE** من الصفر لكلا المعلمتين, فقد كانت جودت التقدير افضل عند التكرار $r=1000$ لقيم $n=15$ و $n \geq 100$. في حين تكون جودت التقدير افضل لكلا المعلمتين عند $r=2000$ لحجمي العينة $n=25, 50$. وعلى وفق مقياس اقتراب معيار TD من الصفر, فقد كانت جودت التقدير افضل عند $r=1000$ لكل قيم n عدا $n=25, 50$, فقد كانت جودت لتقدير افضل عند $r=2000$.

• باستعمال طريقة **U-IPWM1(pro.)** المقترح استعمالها على وفق المعايير المتقدم ذكرها نلاحظ بانها :-

وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} لكلا المعلمتين المقدرتين تكون اقل قيمة لهذا المعيار عند $r=1000$ لقيم $n=15$ و $n \geq 50$ في حين تكون اقل قيمة لهذا المعيار عند $r=2000$ لحجم العينة $n=25$. على وفق مقياس اقتراب معيار **R_BIAS** من الصفر لكلا المعلمتين المقدرتين لتوزيع Lomax, اذ تكون جودت التقدير افضل لكل قيم n عند $r=1000$. وعلى وفق مقياس اقتراب المعيارين **R_RMSE** ومعيار **MSE** من الصفر لكلا المعلمتين المقدرتين, اذ تكون جودت التقدير افضل عند $r=1000$ لكل قيم n عدا $n=25$, اذ تتحسن جودت التقدير لكلا المعلمتين عند $r=2000$. اما على وفق مقياس اقتراب معيار TD من الصفر, فقد كانت جودت التقدير افضل عند $r=1000$ لكل قيم n عدا $n=50$, فقد كانت جودت لتقدير افضل عند $r=4000$.

• باستعمال طريقة (B-IPWM1(pro.) المقترح استعمالها على وفق المعايير المتقدم ذكرها نلاحظ بانه :-

وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} لكلا للمعلمتين المقدره تكون اقل قيمة لهذا المعيار عند التكرار $r=1000$ لاجسام العينات $n=15$ و $n \geq 100$ في حين تكون اقل قيمة لهذا المعيار عند $r=2000$ لحجمي العينة $n=25,50$. وعلى وفق مقياس اقتراب معيار R_BIAS من الصفر لكلا المعلمتين المقدره لتوزيع Lomax, اذ تتحسن جودت التقدير للمعلمة α عند $r=1000$ وعند $r=2000$ عندما تكون $n=15$. ولحجم العينة $n=25$ تكون جودت التقدير افضل لكلا المعلمتين عند $r=2000$. اما بقية قيم n فقد كانت جودت التقدير افضل لكلا المعلمتين عند $r=1000$. اما على وفق مقياس اقتراب المعيارين R_RMSE ومعيار MSE من الصفر لكلا للمعلمتين المقدره, فقد كانت جودت التقدير افضل عند $r=1000$ لأحجام العينات $n=15$ و $n \geq 100$, في حين تتحسن جودت التقدير لكلا المعلمتين عند $r=2000$ لحجمي العينة $n=25,50$. وعلى وفق مقياس اقتراب معيار TD من الصفر, فقد كانت جودت التقدير افضل عند $r=1000$ لكل احجام العينات عدا $n=25,50$, فقد كانت جودت التقدير افضل عند $r=2000$.

المرحلة الثانية:- يتم استعمال العزوم الاحتمالية الموزونه و مقارنتها بالعزوم التقليدية لتحري عن افضل طريقة تقدير لمعلمتي لتوزيع Lomax, فقد نفذت التجارب لبقيه النماذج المفترضة في الفقرة (2) في المبحث (4), وفقا لطرائق التقدير المختلفة مقارنة بطريقة التقدير المقترحة (IPWM1) لكل حجوم العينات, ووفقا لكل المعايير المستعمله في البحث, وقد تم تكرار التجربة $r=1000$. وقد لخصت النتائج في الجداول (8-2) التي تبين قيم المتوسط ($\hat{\mu}$) والانحراف المعياري (\hat{SD}) للقيم المقدره لمعلمتي الشكل و القياس للتوزيع Lomax مع قيم التحيز النسبي (R_BIAS) وجذر متوسط مربعات الخفاء النسبي (R_RMSE) ومتوسط مربعات الخفاء (MSE) لكلا المعلمتين المقدره والانحراف الكلي (TD).

نلاحظ بشكل عام من الجدول (2) للأنموذج Model -2

عندما يكون حجم العينة $n=15$ فقد اعطت الطريقتين B-IPWM2 و B-IPWM1(Pro.) نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE لكلا المعلمتين المقدره لـ (α, λ) , وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD, وتعد طريقة U-IPWM2 الافضل فقد اعطت قيم اقرب القيم للصفر من خلال معيار R_BIAS لكلا المعلمتين, وقد كانت التحيزات النسبية سالبة اي ان القيم المقدره بهذه الطريقة تكون اكبر من القيم الحقيقية للمعلمتي النموذج الذي ولدت منه البيانات .

عندما تكون $n=25$ فقد اعطت الطريقتين B-IPWM2 و B-IPWM1(Pro.) نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE لكلا المعلمتين, وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD. وتعد طريقة L-MOM و U-IPWM1(Pro.) الافضل فقد اعطت نتائج متشابهة وكانت القيم اقرب للقيم للصفر من خلال معيار R_BIAS لكلا المعلمتين, وقد كانت

التحيزات النسبية سالبة اي ان القيم المقدره بهذه الطريقة تكون اكبر من القيم الحقيقية للمعلمتي النموذج الذي ولدت منه البيانات .

عندما تكون $n \geq 50$ فقد اعطت الطريقتين L_MOM و $U-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لكل المعايير المعتمدة في البحث لكلا المعلمتين, وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD.

نلاحظ بشكل عام من الجدول (3) للأنموذج Model -3

عندما يكون حجم العينة $n=15$ فقد اعطت الطريقتين $B-IPWM2$ و $B-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE و معيار MSE ومعيار R_BIAS لكلا المعلمتين, واعطت الطريقتين L_MOM و $U-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD.

عندما تكون $n=25$ فقد اعطت الطريقتين $B-IPWM2$ و $B-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE لكلا المعلمتين المقدره. وتعد طريقة L_MOM و $U-IPWM1(Pro.)$ الافضل فقد اعطت نتائج متشابهة وكانت القيم اقرب للقيم للصفر من خلال معيار R_BIAS لكلا المعلمتين المقدره وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD.

عندما تكون $n = 50$ و $n \geq 150$ فقد اعطت الطريقتين L_MOM و $U-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لكل المعايير المعتمدة في البحث لكلا المعلمتين, وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD.

عندما تكون $n=100$ فقد اعطت الطريقتين L_MOM و $U-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE لكلا المعلمتين, وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD. تعد الطريقة $U-IPWM2$ الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وكانت القيم اقرب للصفر من خلال معيار R_BIAS للمعلمة المقدره لـ α . تعد الطريقة $B-IPWM2$ الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وكانت القيم اقرب للقيم للصفر من خلال معيار R_BIAS للمعلمة المقدره لـ λ .

نلاحظ بشكل عام من الجدول (4) للأنموذج Model -4

عندما يكون حجم العينة $n=15$ أذ تعد الطريقة $U-IPWM2$ الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE لكلا المعلمتين المقدره, وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD. واعطت الطريقتين $B-IPWM2$ و $B-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل

مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث على وفق مقياس اقتراب القيم للصفر من خلال معيار R_BIAS لكلا المعلمتين المقدرتين.

عندما تكون $n=25$ فقد اعطت الطريقتين L_MOM و $U-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لكل المعايير المعتمدة في البحث لكلا المعلمتين المقدرتين، وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD .

عندما يكون حجم العينة $n=50$ أذ تعد الطريقة $U-IPWM2$ الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} و معيار R_RMSE و معيار MSE لكلا المعلمتين المقدرتين، وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD . وعلى وفق مقياس اقتراب القيم للصفر من خلال معيار R_BIAS للمعلمة λ . واعطت الطريقتين $B-IPWM2$ و $B-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة و تعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث على وفق مقياس اقتراب القيم للصفر من خلال معيار R_BIAS للمعلمة α .

عندما تكون $n=100$ فقد اعطت الطريقتين $B-IPWM2$ و $B-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} و معيار R_RMSE و معيار MSE لكلا المعلمتين المقدرتين. واعطت الطريقتين L_MOM و $U-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث على وفق مقياس اقتراب القيم للصفر من خلال معيار R_BIAS لكلا المعلمتين المقدرتين، وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD .

عندما تكون $n=150$ فقد اعطت الطريقتين $B-IPWM2$ و $B-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} و معيار R_RMSE و معيار MSE لكلا المعلمتين المقدرتين، وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD . واعطت الطريقتين L_MOM و $U-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث على وفق مقياس اقتراب القيم للصفر من خلال معيار R_BIAS لكلا المعلمتين.

عندما تكون $n=250$ تعد طريقة MOM الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} و معيار R_RMSE و معيار MSE لكلا المعلمتين. واعطت الطريقتين $B-IPWM2$ و $B-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث على وفق مقياس اقتراب القيم للصفر من خلال معيار R_BIAS لكلا المعلمتين المقدرتين، وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD .

نلاحظ بشكل عام من الجدول (5) للأنموذج Model -5

عندما يكون حجم العينة $n=15$ فقد اعطت الطريقتين L_MOM و $U-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث على وفق مقياس اقتراب القيم للصفر من خلال معيار R_BIAS لكلا المعلمتين المقدرتين (λ, α) ، وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} و معيار R_RMSE و معيار MSE للمعلمة α ، وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD . واعطت الطريقتين $B-IPWM2$ و $B-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث على وفق مقياس اقتراب القيم للصفر من خلال معيار R_BIAS لكلا المعلمتين المقدرتين (λ, α) ، وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} و معيار R_RMSE و معيار MSE للمعلمة α ، وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD .

(Pro.) IPWM1 انتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE للمعلمة λ .
 عندما تكون $n=25$ أذ تعد الطريقة U-IPWM2 الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE لكلا المعلمتين. واعطت الطريقتين B-IPWM2 و B-IPWM1 (Pro.) انتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث على وفق مقياس اقتراب القيم للصفر من خلال معيار R_BIAS لكلا المعلمتين المقدرة لـ (α, λ) , وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD.

عندما تكون $n=50$ فقد اعطت الطريقتين L_MOM و U-IPWM1 (Pro.) نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE لكلا المعلمتين المقدرة, وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD. وتعد الطريقة U-IPWM2 الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وكانت القيم اقرب للقيم للصفر من خلال معيار R_BIAS لكلا المعلمتين المقدرة. عندما تكون $n \geq 100$ فقد اعطت الطريقتين L_MOM و U-IPWM1 (Pro.) نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لكل المعايير المعتمدة في البحث لكلا المعلمتين المقدرة, وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD.

نلاحظ بشكل عام من الجدول (6) للأنموذج Model -6

عندما يكون حجم العينة $n=15$ فقد اعطت الطريقتين L_MOM و U-IPWM1 (Pro.) نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE , وكذلك لمعيار R_BIAS للمعلمة α , و لمقياس اقل قيمة لمعيار TD. واعطت الطريقتين B-IPWM1 (Pro.) و B-IPWM2 انتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE للمعلمة λ . تعد طريقة L_MOM الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وكانت القيم اقرب للقيم للصفر من خلال معيار R_BIAS للمعلمة λ .

عندما يكون حجم العينة $n=25$ فقد اعطت الطريقتين B-IPWM1 (Pro.) و B-IPWM2 انتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لكل المعايير المعتمدة في البحث لكلا المعلمتين المقدرة لـ (α, λ) , وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD. اذ لمعيار R_BIAS للمعلمة λ , اذا تعد طريقة U-IPWM2 الافضل على وفق اقتراب القيمة من الصفر .

عندما تكون $n=50$ تعد طريقة MOM الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE لكلا المعلمتين المقدرة. واعطت الطريقتين L_MOM و U-

(Pro.)IPWM1 انتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وكانت القيم اقرب القيم للصفر من خلال معيار R_BIAS لكلا المعلمتين المقدره، وكذلك ووفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD. عندما تكون $n=100$

• اعطت الطريقتين B-IPWM2 و B-IPWM1(Pro.) نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE للمعلمة α . و اعطت الطريقتين L_MOM و U-IPWM1(Pro.) نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE للمعلمة λ ، وكذلك على وفق مقياس اقتراب القيم للصفر لمعيار R_BIAS لكلا المعلمتين المقدره، ووفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD.

عندما تكون $n \geq 150$ فقد اعطت الطريقتين L_MOM و U-IPWM1(Pro.) نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لكل المعايير المعتمدة في البحث لكلا المعلمتين المقدره، وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD.

نلاحظ بشكل عام من الجدول (7) للأنموذج Model -7

عندما يكون حجم العينة $n=15$ فقد اعطت الطريقتين L_MOM و U-IPWM1(Pro.) نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE للمعلمة α ، وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD. و اعطت الطريقتين B-IPWM2 و B-IPWM1(Pro.) انتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث على وفق مقياس اقتراب القيم للصفر لمعيار R_BIAS لكلا المعلمتين المقدره (α, λ) ، ووفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار MSE للمعلمة λ . وتعد الطريقة U-IPWM2 الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث، وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE للمعلمة λ .

عندما تكون $n=25$ فقد اعطت الطريقتين B-IPWM2 و B-IPWM1(Pro.) نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لكل المعايير المستعملة في البحث عدا معيار R_BIAS للمعلمة λ ، اذ تعد طريقة U-IPWM2 وفقا لمقياس مقياس اقتراب القيم للصفر لهذا المعيار. عندما تكون $n=50$ تعد الطريقة U-IPWM2 الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE لكلا المعلمتين المقدره، وكذلك لمعيار R_BIAS للمعلمة α . اعطت الطريقتين B-IPWM2 و B-IPWM1(Pro.) نتائج متشابهة و تعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث على وفق مقياس اقتراب القيم للصفر لمعيار R_BIAS للمعلمة λ ، وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD.

عندما تكون $n=100$ فقد اعطت الطريقتين L_MOM و $U-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لكل المعايير المعتمدة في البحث لكلا المعلمتين المقدر لـ (α, λ) ، عدا معيار R_BIAS لكلا المعلمتين، اذ تعد طريقة $U-IPWM2$ الافضل وفقا لمقياس اقتراب القيم من الصفر لهذا المعيار.

عندما تكون $n=150$ تعد الطريقة MOM الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث، وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE لكلا المعلمتين المقدر. واعطت الطريقتين L_MOM و $U-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث على وفق مقياس اقتراب القيم للصفر لمعيار R_BIAS لكلا المعلمتين المقدر. واعطت الطريقتين $B-IPWM1(Pro.)$ و $IPWM2$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD .

عندما تكون $n=250$ فقد اعطت الطريقتين L_MOM و $U-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لكل المعايير المعتمدة في البحث لكلا المعلمتين المقدر، وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD .

نلاحظ بشكل عام من الجدول (8) للأ نموذج 8 - Model

عندما يكون حجم العينة $n=15$ فقد اعطت الطريقتين $B-IPWM1(Pro.)$ و $B-IPWM2$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} لكلا المعلمتين المقدر لـ (α, λ) ، وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار (TD) . وتعد الطريقة MOM الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار R_RMSE ولمعيار R_BIAS للمعلمة λ .

عندما تكون $n=150$ و $n=25$ فقد اعطت الطريقتين L_MOM و $U-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لكل المعايير المعتمدة في البحث لكلا المعلمتين المقدر، وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD ، عدا معيار R_BIAS لكلا المعلمتين، اذ تعد الطريقتين $B-IPWM1(Pro.)$ و $B-IPWM2$ الافضل وكانت النتائج متشابهة لهذا المعيار.

عندما تكون $n=50$ اذ تعد الطريقة $U-IPWM2$ الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE لكلا المعلمتين. واعطت الطريقتين $B-IPWM1(Pro.)$ و $IPWM2$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث على وفق مقياس اقتراب القيم للصفر لمعيار R_BIAS لكلا المعلمتين المقدر. واعطت الطريقتين L_MOM و $U-IPWM1(Pro.)$ نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD .

عندما تكون $n=100$ فقد اعطت الطريقتين B-IPWM2 و B-IPWM1(Pro.) نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE لكلا المعلمتين المقدرتين. واعطت الطريقتين L_MOM و U-IPWM1(Pro.) نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث على وفق مقياس اقتراب القيم للصفر لمعيار R_BIAS لكلا المعلمتين المقدرتين (α, λ) .

عندما تكون $n=250$ اذ تعد الطريقة MOM الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار \hat{SD} ومعيار R_RMSE ومعيار MSE لكلا المعلمتين. واعطت الطريقتين B-IPWM2 و B-IPWM1(Pro.) نتائج متشابهة وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة في البحث على وفق مقياس اقتراب القيم للصفر لمعيار R_BIAS لكلا المعلمتين المقدرتين. وكذلك وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD.

5. الاستنتاجات

من خلال استعمال العزوم الاحتمالية الموزونه (متضمنه طريقتي العزوم الاحتمالية الموزونه للنوع الاول المقترح استعمالها (IPWM1) الغير متحيزة (U-IPWM1(Pro.)) والمتحيزة (B-IPWM1(Pro.)) والعزوم الاحتمالية الموزونه للنوع الثاني (IPWM2) الغير متحيزة (U-IPWM2) والمتحيزة (B-IPWM2)) والعزوم التقليدية (متضمنه طريقة العزوم (MOM) وطريقة العزوم L- (L_MOM)) لكل إحجام العينات ولكل النماذج المفترضة في البحث فقد اعطت نتائج مختلفة وعموما يمكن القول بان جودة التقدير تتحسن بزيادة حجم العينة لكل الطرائق المستعملة وفقا لكل المعايير المستعملة في البحث.

من تجارب المرحلة الاولى التي تم اختبار تأثير عدد مرات تكرار التجربة (r) على خصائص مقدرات المعلمتي (α, λ) لتوزيع Lomax للأتمودج Model -1 لوحظ بان جودت التقدير وفقا لأغلب المعايير المستعملة تتحسن لاحجام العينات الكبيرة عندما تكون $r=1000$ باستعمال كل الطرائق قيد البحث.

اما لتجارب المرحلة الثانية التي تم استعمالها لغرض المقارنة بين الطرائق ولكل انمودج ولاحجام العينات, بان طريقتين العزوم الاحتمالية الموزونه للنوع الاول المقترح استعمالها (IPWM1) الغير متحيزة (U-IPWM1(Pro.)) و المتحيزة (B-IPWM1(Pro.)) كانت متشابهة لنتائج اغلب المعايير المستحصلة باستعمال الطرائق الاخرى كما مبين ادناه.

- طريقتي التقدير (B-IPWM1(Pro.)) و (B-IPWM2) اعطت تقديرات مشابهة لاغلب المعايير المستعملة عند احجام العينات الصغيرة (n), وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق. في حين اعطت L_MOM و U-IPWM1(Pro.) تقديرات مشابهة لاغلب المعايير المستعملة عند احجام العينات الكبيرة, وتعد الافضل مقارنة ببقية الطرائق وفقا للنتائج المستحصلة للأتمودجين Model -2 و Model -3.

- طريقتي التقدير ((B-IPWM1(Pro.)) و (B-IPWM2) اعطت تقديرات مشابهة لاغلب المعايير المستعملة عند احجام العينات الكبيرة (150, 100 = n), وتعد الافضل مقارنة ببيقة الطرائق. في حين تعد طريقة MOM الافضل مقارنة ببيقة الطرائق ولاغلب المعايير المستعملة عندما تكون n = 250 وفقا للنتائج المستحصلة للأنموذج Model -4.
- طريقتي التقدير اعطت L_MOM و U-IPWM1(Pro.) اعطت تقديرات مشابهة لاغلب المعايير المستعملة عند قيم n الصغيرة عند تقدير المعلمة α , وتعد الافضل مقارنة ببيقة الطرائق. في حين اعطت طريقتي التقدير ((B-IPWM1(Pro.)) و (B-IPWM2) تقديرات مشابهة لاغلب المعايير المستعملة عند احجام العينات الصغيرة عند تقدير المعلمة λ . وكذلك اعطت L_MOM و U-IPWM1(Pro.) تقديرات مشابهة لاغلب المعايير المستعملة عند احجام العينات الكبيرة ($n \geq 150$), وتعد الافضل مقارنة ببيقة الطرائق وفقا للنتائج المستحصلة للأنموذجين Model -5 و Model -6.
- طريقتي التقدير اعطت L_MOM و U-IPWM1(Pro.) اعطت تقديرات مشابهة لاغلب المعايير المستعملة عند احجام العينات n = 100, 250, وتعد الافضل مقارنة ببيقة الطرائق وفقا للنتائج المستحصلة للأنموذج Model -7.
- طريقتي التقدير ((B-IPWM1(Pro.)) و (B-IPWM2) اعطت تقديرات مشابهة لاغلب المعايير المستعملة عند احجام العينات الكبيرة n = 15, 100, وتعد الافضل مقارنة ببيقة الطرائق. في حين اعطت طريقتي التقدير اعطت L_MOM و U-IPWM1(Pro.) تقديرات مشابهة لاغلب المعايير المستعملة عند احجام العينات n = 25, 150, وتعد الافضل مقارنة ببيقة الطرائق وفقا للنتائج المستحصلة للأنموذج Model -8.

References

1. Abd Ellah, A.H., (2003), 'Bayesian one sample prediction bounds for the Lomax distribution', Indian J. Pur. Appl. Math., 34(1):101-109.
2. Abd-Elfattah, A. M. and Alharbey, A. H., (2010), 'Estimation of Lomax Parameters Based on Generalized Probability Weighted Moment', JKAU: Sci., Vol. 22 No. 2, pp: 171-184 A.D./1431 A.H.), Doi: 10.4197 / Sci. 22-2.13.
3. Badiia, S. K. M., Abdallah, M. A. & Samir, K. A. (2011), 'Parameter Estimation of the Hybrid Censored Lomax Distribution', Pak.j.stat.oper.res. Vol.VII, No.1, pp1-19.
4. Balakrishnan, N. & Ahsanullah, M., (1994), ' Relations for single and product Moments of Record values from Lomax distribution ', The Indian Journal of statistics, Vol.56, series B, pt.2, pp.140-146.
5. Bickel, P.J. & Doksum, K. A., (1977), Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics, Holden- Day, Inc., San Francisco.
6. Childs, A., N. Balakrishnan, and M. Moshref. (2001). Order statistics from non-identical right truncated Lomax random variables with applications. Statistical Papers, 42, 187-206.

7. Cramer, E. and A.B. Schmiedt (2011), 'Progressively type-II censored competing risks data from Lomax distributions', *Computational Statistics and Data Analysis*, 55, 1285–1303.
8. Giles, D. E., H. Feng & R. T. Godwin (2011),' On the Bias of the Maximum Likelihood Estimator for the Two- Parameter Lomax Distribution', *Econometrics Working Paper EWP1104*, Department of Economics, University of Victoria.
9. Greenwood, J.A., Landwehr, J.M., Matalas, N.C. and Wallis, J.R., (1979) 'Probability weighted moments: definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form', *Water Resources Research*, 15(5): 1049-1054.
10. Hamdan, M., S., (2009).The Properties of L-moments Compared to Conventional Moments. A Thesis submitted in partial fulfillment of the requirement for the degree of master of mathematics .The Islamic University of Gaza.
11. Hosking, J. R. M. (1990)." L-moments: Analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics", *J. Roy. Statistical Soc., Series B*, 52, pp. 105-124.
12. Hosking, J.R.M. (1986) The theory of probability weighted moments, *Research Report RC 12210*, IBM Research Division, Yorktown Heights, NY.
13. Hosking, J.R.M., Wallis, J.R. and Wood, E.F. (1985)." Estimation of the generalized Extreme-Value Distribution by the Method of probability weighted moments", *Technometrics*, 27(3): 251-261.
14. Ibrahim, B. A. M., (2012),'Recurrence relations for moments of lower generalized order statistics from exponentiated Lomax distribution and its characterization', *J. Math. Compute. Sci.* 2, No. 4, 999-1011, ISSN: 1927-5307.
15. Landwehr, J M., Matalas, NC. and Wallis, JR., (1979b) "Estimation of Parameters and Quantiles of Wakeby Distributions. Known Lower Bounds", *Water Resources Research*, 15(6), p. 1361.
16. Landwehr, JM; Matalas, NC; Wallis, JR (1979). "Probability weighted moments compared with some traditional techniques in estimating Gumbel parameters and quantiles". *Water Resources Research* 15: 1055–1064. Doi: 10.1029/WR015i005p01055. Retrieved 4 February 2013.
17. Lee, M. Y., and Lim, E.H., (2009),' Characterizations of the Lomax, Exponential and Pareto distributions by Conditional expectations of record values', *Journal of The Chungcheong Mathematical Society*, Vol. 22 , No. 2.
18. Lomax, H. S. (1954). Business failures: Another example of the analysis of failure data. *Journal of the American Statistical Association*, 49, 847-852.
19. Morteza, S. M., Farhad, Y.& Manoochehr, B., (2012) ',Inference for Lomax Distribution under Generalized Order Statistics', *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 6, no. 105, 5241 – 5251.
20. Panahi, H. & Asadi, S., (2011),'Inference of Stress-Strength Model for a Lomax Distribution', *World Academy of Science, Engineering and Technology* 55.
21. Parviz, N. &Saman, H., (2012),'Statistical Inferences for Lomax Distribution Based on Record Values (Bayesian and Classical)', *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, Vol. 11, No. 1, 179-189.

22. Wang, Q. J. (1996). "Direct Sample Estimators of L Moments". Water Resources Research 32 (12): 3617–3619. [Doi: 10.1029/96WR02675](https://doi.org/10.1029/96WR02675).

الملحق 1

جدول (1) يبين قيم المتوسط ($\hat{\mu}$) والانحراف المعياري (\hat{SD}) للقيم المقدرة لمعلمتي الشكل والقياس للتوزيع Lomax مع قيم التحيز النسبي (R_BIAS) وجذر متوسط مربعات الخطأ النسبي (R_RMSE) ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) لكلا المعلمتين المقدرة والانحراف الكلي (TD)، عندما يكون الانموذج المفترض بالمعلمتين ($\alpha = 1.5, \lambda = 1$)، وفقاً لطرائق التقدير المختلفة مقارنة بطريقة التقدير المقترحة (IPWM1) لكل حجم العينات، ووفقاً لعدد مرات تكرار التجربة (r).

n	method	r	Model-1 with ($\alpha = 1.5, \lambda = 1$)										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	$R_BIAS(\alpha)$	$R_BIAS(\lambda)$	$R_RMSE(\alpha)$	$R_RMSE(\lambda)$	$MSE(\alpha)$	$MSE(\lambda)$	TD
15	MOM	1000	6.2574	10.004	100.67	171.96	-3.1716	-9.0039	67.19	172.19	10147	29621	27.968
		2000	1.0632	0.73238	105.08	162.39	0.29121	0.2676	70.053	162.39	11036	26357	24.875
		4000	3.2773	4.737	92.32	89.312	-1.1849	-3.737	61.558	89.39	8524.1	7988.5	27.094
L-MOM		1000	2.6644	2.0673	22.824	21.319	-0.7763	-1.0673	15.236	21.346	521.77	455.2	7.7045
		2000	18.64	10.906	816.69	495.56	-11.426	-9.9064	544.58	495.66	6.6694e ⁵	2.4555e ⁵	30.824
		4000	14.192	15.508	806.35	892.52	-8.4614	-14.508	537.63	892.64	6.502e ⁵	7.966e ⁵	30.986
U-IPWM2		1000	1.8025	1.7791	34.94	44.977	-0.2017	-0.7791	23.294	44.983	1219.7	2021.5	11.987
		2000	2.0719	1.6445	26.87	31.402	-0.3813	-0.6445	17.917	31.408	721.97	985.99	10.946
		4000	3.9122	4.1013	182.2	263.06	-1.6082	-3.1013	121.48	263.08	33196	69194	21.644
B-IPWM2		1000	2.4886	2.1246	30.799	29.353	-0.6591	-1.1246	20.544	29.375	948.63	862.03	9.308
		2000	-0.1365	1.1624	143.46	90.45	1.091	-0.1624	95.647	90.45	20574	8177.1	16.835
		4000	3.3777	1.9234	199.19	124.57	-1.2518	-0.9234	132.8	124.57	39670	15514	15.595
U-IPWM1 (pro.)		1000	2.6644	2.0673	22.824	21.319	-0.7763	-1.0673	15.236	21.346	521.77	455.2	7.7045
		2000	18.64	10.906	816.69	495.56	-11.426	-9.9064	544.58	495.66	6.6694e ⁵	2.4555e ⁵	30.824
		4000	14.192	15.508	806.35	892.52	-8.4614	-14.508	537.63	892.64	6.502e ⁵	7.966e ⁵	30.986
B-IPWM1 (pro.)		1000	2.4886	2.1246	30.799	29.353	-0.6591	-1.1246	20.544	29.375	948.63	862.03	9.308
		2000	-0.1365	1.1624	143.46	90.45	1.091	-0.1624	95.647	90.45	20574	8177.1	16.835
		4000	3.3777	1.9234	199.19	124.57	-1.2518	-0.9234	132.8	124.57	39670	15514	15.595

n	method	r	Model-1 with ($\alpha = 1.5, \lambda = 1$)										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	$R_BIAS(\alpha)$	$R_BIAS(\lambda)$	$R_RMSE(\alpha)$	$R_RMSE(\lambda)$	$MSE(\alpha)$	$MSE(\lambda)$	TD
25	MOM	1000	-2.9134	-2.0022	173.6	179.7	2.9423	3.0022	115.8	179.72	30140	32267	26.307
		2000	4.3825	5.8598	50.234	59.54	-1.9217	-4.8598	33.545	59.74	2530.5	3567.1	16.944
		4000	12.406	12.816	350.38	310.5	-7.2705	-11.816	233.7	310.73	1.2285e ⁵	96528	33.495
L-MOM		1000	1.5174	1.2067	22.454	17.92	-0.0116	-0.2067	14.969	17.923	503.67	320.93	4.6753
		2000	2.7412	2.2209	16.315	16.00	-0.8274	-1.2209	10.908	16.048	267.6	257.42	5.0045
		4000	1.6447	1.4018	51.066	30.514	-0.0965	-0.4018	34.044	30.516	2607.1	931.01	5.8317
U-IPWM2		1000	1.7583	1.3719	30.747	39.126	-0.1722	-0.3719	20.499	39.128	944.5	1529.5	9.9197
		2000	-0.108	-2.4516	120.65	208.66	1.0723	3.4516	80.438	208.68	14551	43527	14.886
		4000	-23.08	-38.188	1611.6	2537.5	16.389	39.188	1074.5	2537.8	2.5973e ⁵	6.439e ⁵	66.726
B-IPWM2		1000	0.2016	-0.3747	44.362	48.585	0.8656	1.3747	29.587	48.604	1967.7	2360	8.2979
		2000	2.2566	1.8813	22.141	24.342	-0.5044	-0.8814	14.769	24.358	490.53	593.02	6.3058
		4000	4.9682	4.025	141.92	108.1	-2.3121	-3.025	94.641	108.15	20148	11693	11.123
U-IPWM1 (pro.)		1000	1.5174	1.2067	22.454	17.922	-0.0116	-0.2067	14.969	17.923	503.67	320.93	4.6753
		2000	2.7412	2.2209	16.315	16.002	-0.8274	-1.2209	10.908	16.048	267.6	257.42	5.0045
		4000	1.6447	1.4018	51.066	30.514	-0.0964	-0.4018	34.044	30.516	2607.1	931.01	5.8317
B-IPWM1 (pro.)		1000	0.2016	-0.3747	44.362	48.585	0.8656	1.3747	29.587	48.604	1967.7	2360	8.2979
		2000	2.2566	1.8813	22.141	24.342	-0.5044	-0.8814	14.769	24.358	490.53	593.02	6.3058
		4000	4.9682	4.025	141.92	108.1	-2.3121	-3.025	94.641	108.15	20148	11693	11.123

n	method	r	Model-1 with ($\alpha = 1.5, \lambda = 1$)										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	$R_BIAS(\alpha)$	$R_BIAS(\lambda)$	$R_RMSE(\alpha)$	$R_RMSE(\lambda)$	$MSE(\alpha)$	$MSE(\lambda)$	TD
50	MOM	1000	3.2628	3.7295	4.8105	5.1042	-1.1752	-2.7295	3.4155	5.7882	26.225	33.477	6.9275
		2000	1.3328	1.2052	80.44	102.7	0.1115	-0.2052	53.627	102.79	6467.4	10560	11.57
		4000	4.3782	4.7438	68.389	56.25	-1.9188	-3.7438	45.633	56.381	4684.2	3178	9.1261
L-MOM		1000	1.933	1.4359	3.9274	3.6188	-0.2887	-0.4359	2.6341	3.645	15.597	13.273	1.6818
		2000	2.3803	1.8787	8.4673	8.8265	-0.5869	-0.8787	5.6753	8.8701	72.434	78.64	1.7029
		4000	2.1569	1.6774	5.8073	7.3081	-0.4379	-0.6774	3.8962	7.3395	34.148	53.854	1.608
U-IPWM2		1000	3.4262	3.0408	32.693	33.028	-1.2841	-2.0408	21.833	33.091	1071.5	1093.9	4.0541
		2000	1.9945	1.4351	17.612	21.717	-0.3297	-0.4351	11.746	21.721	310.26	471.57	3.9258
		4000	2.1436	1.6993	8.4117	9.4998	-0.4291	-0.6993	5.6242	9.5255	71.154	90.712	2.9376
B-IPWM2		1000	2.3313	1.8562	8.0159	7.7221	-0.5542	-0.8563	5.3726	7.7694	64.882	60.304	2.0402
		2000	2.3803	1.8887	4.9753	4.1006	-0.5869	-0.8887	3.3684	4.1958	25.516	17.597	1.794
		4000	2.4803	2.1029	46.859	46.563	-0.6535	-1.1029	31.246	46.576	2196.1	2168.8	3.3788
U-IPWM1 (pro.)		1000	1.933	1.4359	3.9274	3.6188	-0.2887	-0.4359	2.6341	3.645	15.597	13.273	1.6818
		2000	2.3803	1.8787	8.4673	8.8265	-0.5867	-0.8787	5.6753	8.8701	72.434	78.64	1.7029
		4000	2.1569	1.6774	5.8073	7.3081	-0.4379	-0.6774	3.8962	7.3395	34.148	53.854	1.608
B-IPWM1 (pro.)		1000	2.3313	1.8562	8.0159	7.7221	-0.5542	-0.8563	5.3726	7.7694	64.882	60.304	2.0402
		2000	2.3803	1.8887	4.9753	4.1006	-0.5869	-0.8887	3.3684	4.1958	25.516	17.597	1.794
		4000	2.4803	2.1029	46.859	46.563	-0.6535	-1.1029	31.246	46.576	2196.1	2168.8	3.3788

تابع لجدول (1)

n	method	r	Model-1 with $(\alpha = 1.5, \lambda = 1)$										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	R_BIAS(α)	R_BIAS(λ)	R_RMSE(α)	R_RMSE(λ)	MSE(α)	MSE(λ)	TD
100	MOM	1000	2.7876	3.6701	0.8094	14.851	-0.8584	-2.6701	1.0139	15.089	2.3123	227.47	5.5285
		2000	2.8073	3.2071	0.8548	2.2455	-0.8716	-2.2071	1.0413	3.1486	2.4395	9.9109	5.0786
		4000	2.7544	3.1601	2.6929	3.9561	-0.8363	-2.1601	1.9805	4.5074	8.8235	20.313	5.142
L-MOM	L-MOM	1000	1.8309	1.3264	0.5238	0.5504	-0.2206	-0.3264	0.4131	0.6399	0.3836	0.4091	0.7200
		2000	1.8433	1.3366	0.5433	0.5578	-0.2289	-0.3367	0.4285	0.6516	0.4129	0.4244	0.7279
		4000	1.8406	1.3322	0.5602	0.5830	-0.2270	-0.3322	0.4371	0.6710	0.4297	0.4502	0.7257
U-IPWM2	U-IPWM2	1000	1.9235	1.457	0.6903	0.7423	-0.2824	-0.4571	0.5399	0.8717	0.6554	0.7593	0.8905
		2000	1.9595	1.492	0.9419	0.9846	-0.3063	-0.4920	0.6987	1.1007	1.0978	1.211	0.9362
		4000	1.9472	1.4797	0.8490	0.9153	-0.2981	-0.4797	0.6397	1.0334	0.9206	1.068	0.9211
B-IPWM2	B-IPWM2	1000	1.8612	1.3796	0.5444	0.5741	-0.2408	-0.3796	0.4356	0.6883	0.4266	0.4734	0.7661
		2000	1.8743	1.387	0.5662	0.5792	-0.2496	-0.3870	0.4525	0.6966	0.4605	0.4851	0.7744
		4000	1.8716	1.3828	0.5861	0.6084	-0.2478	-0.3828	0.4627	0.7188	0.4816	0.5165	0.7710
U-IPWMI (pro.)	U-IPWMI (pro.)	1000	1.8309	1.3264	0.5238	0.5504	-0.2206	-0.3264	0.4131	0.6399	0.3836	0.4091	0.7200
		2000	1.8433	1.3366	0.5433	0.5579	-0.2289	-0.3367	0.4285	0.6516	0.4129	0.4244	0.7279
		4000	1.8406	1.3322	0.5602	0.5830	-0.2270	-0.3322	0.4371	0.6710	0.4297	0.4502	0.7257
B-IPWMI (pro.)	B-IPWMI (pro.)	1000	1.8612	1.3796	0.5444	0.5741	-0.2408	-0.3796	0.4356	0.6883	0.4266	0.4734	0.7661
		2000	1.8743	1.387	0.5662	0.5792	-0.2496	-0.3870	0.4525	0.6966	0.4605	0.4851	0.7745
		4000	1.8716	1.3828	0.5861	0.6084	-0.2477	-0.3828	0.4627	0.7188	0.4816	0.5165	0.7710

n	method	r	Model-1 with $(\alpha = 1.5, \lambda = 1)$										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	R_BIAS(α)	R_BIAS(λ)	R_RMSE(α)	R_RMSE(λ)	MSE(α)	MSE(λ)	TD
150	MOM	1000	2.572	2.8957	0.4909	1.1236	-0.71463	-1.8957	0.786	2.2037	1.3898	4.855	4.6104
		2000	2.5933	2.8988	0.5266	1.4438	-0.72885	-1.8988	0.8090	2.3854	1.4723	5.6891	4.6277
		4000	2.5902	2.9168	0.5464	1.5584	-0.72681	-1.9168	0.8130	2.4703	1.487	6.102	4.6436
L-MOM	L-MOM	1000	1.7332	1.2165	0.3908	0.3954	-0.15548	-0.2165	0.3034	0.4508	0.2070	0.2030	0.5395
		2000	1.7518	1.2476	0.4020	0.4141	-0.16787	-0.2476	0.3162	0.4825	0.2249	0.2327	0.5608
		4000	1.7496	1.2452	0.4074	0.4252	-0.16639	-0.2452	0.3185	0.4909	0.2282	0.2409	0.5622
U-IPWM2	U-IPWM2	1000	1.7766	1.2826	0.4420	0.4569	-0.18441	-0.2826	0.3476	0.5372	0.2717	0.2884	0.6172
		2000	1.7987	1.317	0.4946	0.4997	-0.19912	-0.3170	0.3852	0.5917	0.3337	0.3500	0.6451
		4000	1.8152	1.3363	1.5647	1.7257	-0.21014	-0.3363	1.0641	1.7581	2.5469	3.0903	0.6807
B-IPWM2	B-IPWM2	1000	1.7506	1.2464	0.3999	0.4029	-0.16708	-0.2464	0.3146	0.4723	0.2226	0.2229	0.5632
		2000	1.7696	1.2779	0.4117	0.4227	-0.17975	-0.2780	0.3281	0.5059	0.2421	0.2558	0.5863
		4000	1.7674	1.2757	0.4179	0.4347	-0.17826	-0.2757	0.3308	0.5147	0.2461	0.2649	0.5873
U-IPWMI (pro.)	U-IPWMI (pro.)	1000	1.7332	1.2165	0.3908	0.3954	-0.15548	-0.2165	0.3034	0.4508	0.2070	0.2030	0.5395
		2000	1.7518	1.2476	0.4020	0.4141	-0.16787	-0.2476	0.3162	0.4823	0.2249	0.2327	0.5608
		4000	1.7496	1.2452	0.4074	0.4252	-0.16639	-0.2452	0.3185	0.4909	0.2282	0.2409	0.5622
B-IPWMI (pro.)	B-IPWMI (pro.)	1000	1.7506	1.2464	0.3999	0.4029	-0.16708	-0.2464	0.3146	0.4723	0.2226	0.2229	0.5632
		2000	1.7696	1.2779	0.4117	0.4227	-0.17975	-0.2780	0.3281	0.5059	0.2421	0.2558	0.5863
		4000	1.7674	1.2757	0.4179	0.4347	-0.17826	-0.2757	0.3308	0.5147	0.2461	0.2649	0.5873

n	method	r	Model-1 with ($\alpha=1.5, \lambda=1$)										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	$R_BIAS(\alpha)$	$R_BIAS(\lambda)$	$R_RMSE(\alpha)$	$R_RMSE(\lambda)$	$MSE(\alpha)$	$MSE(\lambda)$	TD
250	MOM	1000	2.4195	2.6748	0.3395	0.7787	-0.6130	-1.6748	0.6535	1.847	0.9607	3.4108	4.2879
		2000	2.4561	2.6962	0.3488	0.9582	-0.6374	-1.6962	0.6785	1.9481	1.0358	3.7946	4.3336
		4000	2.4544	2.7194	0.3584	1.6191	-0.6363	-1.7194	0.6797	2.3617	1.0394	5.5769	4.3556
L-MOM	L-MOM	1000	1.6643	1.166	0.2849	0.3047	-0.1096	-0.1660	0.2193	0.347	0.1081	0.1203	0.4217
		2000	1.6937	1.1943	0.2947	0.3135	-0.1291	-0.1943	0.2351	0.3688	0.1244	0.1360	0.4579
		4000	1.6951	1.1935	0.3046	0.3191	-0.1301	-0.1935	0.2411	0.3732	0.1308	0.1393	0.4546
U-IPWM2	U-IPWM2	1000	1.6841	1.1989	0.3020	0.3277	-0.1228	-0.1989	0.2358	0.3833	0.125	0.1469	0.4565
		2000	1.7144	1.2282	0.3101	0.3330	-0.1429	-0.2282	0.2513	0.4037	0.1421	0.1629	0.4952
		4000	1.7169	1.2287	0.3263	0.3470	-0.1446	-0.2287	0.2612	0.4156	0.1535	0.1727	0.4937
B-IPWM2	B-IPWM2	1000	1.6737	1.1827	0.2884	0.3077	-0.1158	-0.1828	0.2245	0.3579	0.1133	0.1280	0.4332
		2000	1.7034	1.2114	0.2984	0.3165	-0.1356	-0.2114	0.2408	0.3806	0.1304	0.1448	0.4719
		4000	1.7048	1.2107	0.3085	0.3223	-0.1365	-0.2107	0.2468	0.3850	0.1371	0.1482	0.4681
U-IPWM1 (pro.)	U-IPWM1 (pro.)	1000	1.6643	1.166	0.2849	0.3047	-0.1096	-0.1660	0.2193	0.347	0.1081	0.1203	0.4217
		2000	1.6937	1.1943	0.2947	0.3135	-0.1291	-0.1943	0.2351	0.3688	0.1244	0.1360	0.4579
		4000	1.6951	1.1935	0.3046	0.3191	-0.1301	-0.1935	0.2411	0.3732	0.1308	0.1393	0.4546
B-IPWM1 (pro.)	B-IPWM1 (pro.)	1000	1.6737	1.1827	0.2884	0.3077	-0.1158	-0.1828	0.2245	0.3579	0.1133	0.1280	0.4332
		2000	1.7034	1.2114	0.2984	0.3165	-0.1356	-0.2114	0.2408	0.3806	0.1304	0.1448	0.4719
		4000	1.7048	1.2107	0.3085	0.3223	-0.1365	-0.2107	0.2468	0.3850	0.1371	0.1482	0.4681

جدول (2) يبين قيم المتوسط ($\hat{\mu}$) والانحراف المعياري (\hat{SD}) للقيم المقدرة لمعلمتي الشكل و القياس للتوزيع Lomax مع قيم التحيز النسبي (R_BIAS) وجذر متوسط مربعات الخطأ النسبي (R_RMSE) ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) لكلا المعلمتين المقدرة والانحراف الكلي (TD), عندما يكون الانموذج المفترض بالمعلمتين ($\alpha = 2, \lambda = 1$) , ووفقا لطرائق التقدير المختلفة مقارنة بطريقة التقدير المقترحة (IPWM1) لكل حجم العينات, ووفقا لعدد مرات تكرار التجربة (r).

n	method	r	Model-2 with ($\alpha=2, \lambda=1$)										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	$R_BIAS(\alpha)$	$R_BIAS(\lambda)$	$R_RMSE(\alpha)$	$R_RMSE(\lambda)$	$MSE(\alpha)$	$MSE(\lambda)$	TD
15	MOM	1000	-0.8138	-0.6447	63.704	52.025	1.4069	1.6447	31.883	52.051	4062	2706.6	19.376
	L-MOM	1000	1.2511	-0.2986	47.911	31.197	0.3745	1.2986	23.958	31.224	2293.7	973.98	8.8889
	U-IPWM2	1000	2.6482	1.3552	42.266	32.265	-0.3241	-0.3552	21.135	32.267	1785	1040.1	11.842
	B-IPWM2	1000	3.2966	2.1463	30.692	21.921	-0.6483	-1.1463	15.36	21.951	942.74	481.35	7.9425
	U-IPWM1 (pro.)	1000	1.2511	-0.2986	47.911	31.197	0.3745	1.2986	23.958	31.224	2293.7	973.98	8.8889
	B-IPWM1 (pro.)	1000	3.2966	2.1463	30.692	21.921	-0.6483	-1.1463	15.36	21.951	942.74	481.35	7.9425
25	MOM	1000	6.2829	4.5204	52.786	34.454	-2.1415	-3.5204	26.48	34.633	2801.9	1198.3	14.607
	L-MOM	1000	2.8256	1.0364	44.359	32.512	-0.4128	-0.0364	22.183	32.512	1966.4	1056	7.9772
	U-IPWM2	1000	-1.010	-1.6236	44.968	42.204	1.5052	2.6236	22.535	42.285	2029.2	1786.3	10.988
	B-IPWM2	1000	2.8549	1.3687	37.983	22.526	-0.4274	-0.3687	18.996	22.529	1442	507.06	7.3128
	U-IPWM1 (pro.)	1000	2.8256	1.0364	44.359	32.512	-0.4128	-0.0364	22.183	32.512	1966.4	1056	7.9772
	B-IPWM1 (pro.)	1000	2.8549	1.3687	37.983	22.526	-0.4274	-0.3687	18.996	22.529	1442	507.06	7.3128
50	MOM	1000	4.0833	2.8428	13.167	10.013	-1.0416	-1.8428	6.6653	10.181	177.53	103.56	7.0259
	L-MOM	1000	3.0866	1.7072	6.2344	4.3649	-0.5433	-0.7072	3.1642	4.4218	40.01	19.533	1.9808
	U-IPWM2	1000	4.5122	3.3438	89.842	81.862	-1.2561	-2.3438	44.939	81.896	8069.9	6700.2	8.4863
	B-IPWM2	1000	4.1563	2.3372	28.323	15.33	-1.0781	-1.3372	14.202	15.391	806.03	236.66	3.2603
	U-IPWM1 (pro.)	1000	3.0866	1.7072	6.2344	4.364	-0.5433	-0.7072	3.1642	4.4218	40.01	19.533	1.9808
	B-IPWM1 (pro.)	1000	4.1563	2.3372	28.323	15.333	-1.0781	-1.3372	14.202	15.391	806.03	236.66	3.2603

تابع لجدول (2)

n	method	r	Model-2 with ($\alpha=2, \lambda=1$)										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	$R_BIAS(\alpha)$	$R_BIAS(\lambda)$	$R_RMSE(\alpha)$	$R_RMSE(\lambda)$	$MSE(\alpha)$	$MSE(\lambda)$	TD
100	MOM	1000	3.6695	2.4281	4.1233	2.8944	-0.8347	-1.4281	2.2242	3.2276	19.772	10.409	4.263
	L-MOM	1000	2.4628	1.3121	1.1559	0.7978	-0.2314	-0.3121	0.6225	0.8567	1.5488	0.7333	0.8121
	U-IPWM2	1000	2.7654	1.4907	15.851	11.269	-0.3827	-0.4907	7.9349	11.279	251.6	127.1	2.218
	B-IPWM2	1000	2.5267	1.3674	1.2789	0.8824	-0.2633	-0.3674	0.6916	0.9559	1.9114	0.9129	0.8711
	U-IPWMI (pro.)	1000	2.4628	1.3121	1.1559	0.7978	-0.2314	-0.3121	0.6225	0.8567	1.5488	0.7333	0.8121
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.5267	1.3674	1.2789	0.8824	-0.2633	-0.3674	0.6916	0.9559	1.9114	0.9129	0.8711
150	MOM	1000	3.1286	2.02	1.0321	0.7486	-0.5643	-1.02	0.7647	1.2652	2.338	1.6002	3.5843
	L-MOM	1000	2.2945	1.1975	0.6935	0.4896	-0.1473	-0.1975	0.3767	0.5279	0.5672	0.2785	0.5953
	U-IPWM2	1000	2.4319	1.3172	0.9216	0.6567	-0.2160	-0.3172	0.5089	0.7293	1.035	0.5315	0.7448
	B-IPWM2	1000	2.3269	1.2271	0.7179	0.5067	-0.1634	-0.2271	0.3944	0.5553	0.6217	0.3081	0.6207
	U-IPWMI (pro.)	1000	2.2945	1.1975	0.6935	0.4896	-0.1473	-0.1975	0.3767	0.5279	0.5672	0.2785	0.5953
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.3269	1.2271	0.7179	0.5067	-0.1634	-0.2271	0.3944	0.5553	0.6217	0.3081	0.6207
250	MOM	1000	2.8814	1.811	0.6272	0.447	-0.4407	-0.8110	0.5409	0.9265	1.1698	0.8582	3.2517
	L-MOM	1000	2.1877	1.1223	0.4819	0.3394	-0.0939	-0.1224	0.2586	0.3608	0.2672	0.1301	0.4502
	U-IPWM2	1000	2.2446	1.1743	0.5391	0.3861	-0.1223	-0.1743	0.296	0.4236	0.3502	0.1793	0.5035
	B-IPWM2	1000	2.2045	1.1382	0.4899	0.3452	-0.1023	-0.1382	0.2654	0.3718	0.2816	0.1381	0.4619
	U-IPWMI (pro.)	1000	2.1877	1.1223	0.4819	0.3394	-0.0939	-0.1224	0.2586	0.3608	0.2672	0.1301	0.4502
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.2045	1.1382	0.4899	0.3452	-0.1023	-0.1382	0.2654	0.3718	0.2816	0.1381	0.4619

جدول (3) يبين قيم المتوسط ($\hat{\mu}$) والانحراف المعياري (\hat{SD}) للقيم المقدرة لمعلمتي الشكل والقياس للتوزيع Lomax مع قيم التحيز النسبي (R_BIAS) وجذر متوسط مربعات الخطأ النسبي (R_RMSE) ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) لكلا المعلمتين المقدرة والانحراف الكلي (TD), عندما يكون الانموذج المفترض بالمعلمتين ($\alpha = 2.5, \lambda = 1$) , ووفقا لطرائق التقدير المختلفة مقارنة بطريقة التقدير المقترحة (IPWMI) لكل حجوم العينات, ووفقا لعدد مرات تكرار التجربة (r)

n	method	r	Model-3 with ($\alpha=2.5, \lambda=1$)										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	$R_BIAS(\alpha)$	$R_BIAS(\lambda)$	$R_RMSE(\alpha)$	$R_RMSE(\lambda)$	$MSE(\alpha)$	$MSE(\lambda)$	TD
15	MOM	1000	1.1294	0.8474	53.76	39.796	0.5482	0.1526	21.511	39.796	2889.1	1582.2	15.856
	L-MOM	1000	2.8031	1.1406	41.182	19.408	-0.1212	-0.1406	16.473	19.409	1694.3	376.33	8.0812
	U-IPWM2	1000	-4.698	-3.5028	146.53	89.14	2.8792	4.5028	58.685	89.254	21503	7958.2	13.958
	B-IPWM2	1000	2.5932	1.0467	35.925	18.592	-0.0373	-0.0467	14.37	18.593	1289.3	345.34	8.3723
	U-IPWMI (pro.)	1000	2.8031	1.1406	41.182	19.408	-0.1212	-0.1406	16.473	19.409	1694.3	376.33	8.0812
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.5932	1.0467	35.925	18.592	-0.0373	-0.0467	14.37	18.593	1289.3	345.34	8.3723
25	MOM	1000	-4.795	-4.1783	251.42	183.62	2.9178	5.1783	100.61	183.7	63204	33710	25.646
	L-MOM	1000	2.9094	1.2104	64.974	40.509	-0.1638	-0.2104	25.99	40.509	4217.6	1639.4	8.6677
	U-IPWM2	1000	3.5377	1.6696	80.509	46.403	-0.4151	-0.6696	32.206	46.408	6476.3	2151.6	12.738
	B-IPWM2	1000	0.9623	0.4069	64.144	30.762	0.6151	0.5931	25.665	30.768	4112.7	945.71	9.2802
	U-IPWMI (pro.)	1000	2.9094	1.2104	64.974	40.509	-0.1638	-0.2104	25.99	40.509	4217.6	1639.4	8.6677
	B-IPWMI (pro.)	1000	0.9623	0.4069	64.144	30.762	0.6151	0.5931	25.665	30.768	4112.7	945.71	9.2802
50	MOM	1000	1.775	0.1018	104.21	67.601	0.2900	0.8982	41.687	67.607	10850	4566.1	14.019
	L-MOM	1000	3.4183	1.6004	21.626	12.381	-0.3673	-0.6004	8.6583	12.396	468.07	153.5	3.9326
	U-IPWM2	1000	3.806	1.6711	35.694	19.731	-0.5224	-0.6711	14.287	19.742	1274.5	389.36	6.6223
	B-IPWM2	1000	3.9378	2.1161	37.488	25.807	-0.5751	-1.1161	15.006	25.831	1406	666.58	5.8587
	U-IPWMI (pro.)	1000	3.4183	1.6004	21.626	12.381	-0.3673	-0.6004	8.6583	12.396	468.07	153.5	3.9326
	B-IPWMI (pro.)	1000	3.9378	2.1161	37.488	25.807	-0.5751	-1.1161	15.006	25.831	1406	666.58	5.8587

تابع لجدول (3)

n	method	r	Model-3 with $(\alpha = 2.5, \lambda = 1)$										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	$R_BIAS(\alpha)$	$R_BIAS(\lambda)$	$R_RMSE(\alpha)$	$R_RMSE(\lambda)$	$MSE(\alpha)$	$MSE(\lambda)$	TD
100	MOM	1000	4.7271	2.291	8.9931	4.4289	-0.8908	-1.291	3.7059	4.6132	85.754	21.262	4.59
	L-MOM	1000	3.2944	1.4161	5.8373	3.1451	-0.3178	-0.4161	2.3565	3.1725	34.671	10.055	1.385
	U-IPWM2	1000	2.2776	0.8035	55.151	31.032	0.0890	0.1965	22.061	31.033	3038.6	962.06	5.1707
	B-IPWM2	1000	2.1572	0.8586	38.129	19.305	0.1371	0.1414	15.252	19.306	1452.5	372.33	2.4269
	U-IPWMI (pro.)	1000	3.2944	1.4161	5.8373	3.1451	-0.3178	-0.4161	2.3565	3.1725	34.671	10.055	1.385
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.1572	0.8586	38.129	19.305	0.1371	0.1414	15.252	19.306	1452.5	372.33	2.4269
	150	MOM	1000	3.8073	1.8003	4.7994	2.2706	-0.5229	-0.8003	1.9897	2.4076	24.72	5.7912
L-MOM		1000	2.9745	1.2402	1.2635	0.6479	-0.1898	-0.2402	0.5399	0.6910	1.8201	0.4770	0.7230
U-IPWM2		1000	3.0728	1.3169	8.7236	4.9593	-0.2291	-0.3169	3.497	4.9694	76.353	24.67	1.5132
B-IPWM2		1000	3.0339	1.2764	1.342	0.6866	-0.2136	-0.2764	0.5777	0.7402	2.0841	0.5474	0.7610
U-IPWMI (pro.)		1000	2.9745	1.2402	1.2635	0.6479	-0.1898	-0.2402	0.5399	0.6910	1.8201	0.4770	0.7230
B-IPWMI (pro.)		1000	3.0339	1.2764	1.342	0.6866	-0.2136	-0.2764	0.5777	0.7402	2.0841	0.5474	0.7610
250		MOM	1000	3.4742	1.6045	0.9968	0.5616	-0.3897	-0.6045	0.5575	0.8251	1.9416	0.6805
	L-MOM	1000	2.7718	1.1425	0.7232	0.3917	-0.1087	-0.1425	0.3090	0.4168	0.5964	0.1736	0.4997
	U-IPWM2	1000	2.9121	1.2309	0.8888	0.4959	-0.1649	-0.2309	0.3919	0.5470	0.9591	0.2990	0.6051
	B-IPWM2	1000	2.7994	1.1601	0.7396	0.4008	-0.1198	-0.1601	0.3192	0.4316	0.6361	0.1861	0.5145
	U-IPWMI (pro.)	1000	2.7718	1.1425	0.7232	0.3917	-0.1087	-0.1425	0.3090	0.4168	0.5964	0.1736	0.4997
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.7994	1.1601	0.7396	0.4008	-0.1198	-0.1601	0.3192	0.4316	0.6361	0.1861	0.5145

جدول (4) يبين قيم المتوسط ($\hat{\mu}$) والانحراف المعياري (\hat{SD}) للقيم المقدرة لمعلمتي الشكل و القياس للتوزيع Lomax مع قيم التحيز النسبي (R_BIAS) وجذر متوسط مربعات الخطاء النسبي (R_RMSE) ومتوسط مربعات الخطاء (MSE) لكلا المعلمتين المقدرة والانحراف الكلي (TD), عندما يكون الانموذج المفترض بالمعلمتين ($\alpha = 4, \lambda = 1$), ووفقا لطرائق التقدير المختلفة مقارنة بطريقة التقدير المقترحة ($IPWM1$) لكل حجم العينات, ووفقا لعدد مرات تكرار التجربة (r)

n	method	r	Model-4 with $(\alpha = 4, \lambda = 1)$										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	$R_BIAS(\alpha)$	$R_BIAS(\lambda)$	$R_RMSE(\alpha)$	$R_RMSE(\lambda)$	$MSE(\alpha)$	$MSE(\lambda)$	TD
15	MOM	1000	-5.6099	-1.7866	286.79	86.105	2.4025	2.7866	71.738	86.15	82258	7414.4	16.577
	L-MOM	1000	10.897	2.9284	157.1	47.772	-1.7243	-1.9284	39.312	47.811	24703	2283.6	9.5962
	U-IPWM2	1000	0.6406	-0.0647	25.415	7.9749	0.8398	1.0647	6.409	8.0456	656.57	64.669	5.416
	B-IPWM2	1000	3.9955	1.3177	112.36	22.975	0.0011	-0.3177	28.089	22.977	12612	527.43	9.43
	U-IPWMI (pro.)	1000	10.897	2.9284	157.1	47.772	-1.7243	-1.9284	39.312	47.811	24703	2283.6	9.5962
	B-IPWMI (pro.)	1000	3.9955	1.3177	112.36	22.975	0.0011	-0.3177	28.089	22.977	12612	527.43	9.43
	25	MOM	1000	-24.06	-9.9054	891.13	348.17	7.0145	10.905	222.89	348.34	7.941e ⁵	1.2122e ⁵
L-MOM		1000	3.436	0.8075	52.687	13.523	0.1410	0.1925	13.172	13.524	2773.5	182.73	6.3062
U-IPWM2		1000	-3.40	-1.2812	86.788	24.884	1.8511	2.2812	21.776	24.989	7579.4	623.82	8.7832
B-IPWM2		1000	3.112	0.6625	84.294	27.316	0.2221	0.3375	21.075	27.318	7099.2	745.52	9.4493
U-IPWMI (pro.)		1000	3.436	0.8075	52.687	13.523	0.1410	0.1925	13.172	13.524	2773.5	182.73	6.3062
B-IPWMI (pro.)		1000	3.112	0.6625	84.294	27.316	0.2221	0.3375	21.075	27.318	7099.2	745.52	9.4493
50		MOM	1000	10.74	2.846	206.59	62.76	-1.6848	-1.846	51.675	62.787	42682	3938.3
	L-MOM	1000	-3.58	-1.4014	228.6	72.193	1.8942	2.4014	57.182	72.233	52265	5212.4	10.746
	U-IPWM2	1000	0.082	0.0404	79.31	23.508	0.9796	0.9596	19.852	23.527	6299.2	552.98	8.6737
	B-IPWM2	1000	1.02	-0.3589	139.1	40.742	0.745	1.3589	34.784	40.765	19339	1660.1	10.328
	U-IPWMI (pro.)	1000	-3.58	-1.4014	228.6	72.193	1.8942	2.4014	57.182	72.233	52265	5212.4	10.746
	B-IPWMI (pro.)	1000	1.02	-0.3589	139.1	40.742	0.745	1.3589	34.784	40.765	19339	1660.1	10.328

تابع لجدول (4)

n	method	r	Model-4 with $(\alpha=4, \lambda=1)$										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	R_BIAS(α)	R_BIAS(λ)	R_RMSE(α)	R_RMSE(λ)	MSE($\hat{\alpha}$)	MSE($\hat{\lambda}$)	TD
100	MOM	1000	-19.898	-8.2357	846.17	320.29	5.9746	9.2357	211.63	320.42	7.1586e ⁺⁵	1.0257e ⁺⁵	23.138
	L-MOM	1000	5.833	1.6105	46.873	14.495	-0.45825	-0.6105	11.727	14.508	2198.3	210.26	3.9705
	U-IPWM2	1000	-23.90	-7.0217	830.68	236.92	6.9757	8.0217	207.79	237.06	6.9012e ⁺⁵	56141	23.445
	B-IPWM2	1000	7.3927	1.9589	42.366	12.003	-0.8482	-0.9589	10.625	12.042	1804.6	144.86	4.1098
	U-IPWMI (pro.)	1000	5.833	1.6105	46.873	14.495	-0.4583	-0.6105	11.727	14.508	2198.3	210.26	3.9705
	B-IPWMI (pro.)	1000	7.393	1.9589	42.366	12.003	-0.8482	-0.9589	10.625	12.042	1804.6	144.86	4.1098
150	MOM	1000	7.609	2.1104	33.322	10.272	-0.9022	-1.1104	8.3793	10.331	1122.3	106.63	5.2618
	L-MOM	1000	4.398	1.1197	33.737	9.7601	-0.0994	-0.1197	8.4348	9.7609	1137.2	95.18	2.2061
	U-IPWM2	1000	-15.52	-4.9318	618.33	187.82	4.8788	5.9318	154.66	187.92	3.823e ⁺⁵	35277	14.322
	B-IPWM2	1000	4.851	1.2569	22.211	6.4341	-0.2127	-0.2569	5.5568	6.4392	493.56	41.422	2.0882
	U-IPWMI (pro.)	1000	4.398	1.1197	33.737	9.7601	-0.0994	-0.1197	8.4348	9.7609	1137.2	95.18	2.2061
	B-IPWMI (pro.)	1000	4.851	1.256	22.211	6.4341	-0.2127	-0.2569	5.5568	6.4392	493.56	41.422	2.0882
250	MOM	1000	5.992	1.6093	7.4671	2.0507	-0.4981	-0.6093	1.9321	2.1392	59.671	4.5722	3.2563
	L-MOM	1000	6.091	1.7952	87.027	28.884	-0.5229	-0.7952	21.763	28.895	7570.4	834.07	2.9557
	U-IPWM2	1000	18.33	5.1574	291.35	83.123	-3.5828	-4.1574	72.925	83.227	85004	6919.8	9.303
	B-IPWM2	1000	4.416	1.1182	14.63	4.6834	-0.1039	-0.1182	3.6589	4.6849	213.99	21.926	1.2523
	U-IPWMI (pro.)	1000	6.091	1.7952	87.027	28.884	-0.5229	-0.7952	21.763	28.895	7570.4	834.07	2.9557
	B-IPWMI (pro.)	1000	4.416	1.1182	14.63	4.6834	-0.1039	-0.1182	3.6589	4.6849	213.99	21.926	1.2523

جدول (5) يبين قيم المتوسط ($\hat{\mu}$) والانحراف المعياري (\hat{SD}) للقيم المقدرة لمعلمتي الشكل و القياس للتوزيع Lomax مع قيم التحيز النسبي (R_BIAS) وجذر متوسط مربعات الخطاء النسبي (R_RMSE) ومتوسط مربعات الخطاء (MSE) لكلا المعلمتين المقدرة والانحراف الكلي (TD)، عندما يكون الانموذج المفترض بالمعلمتين $(\alpha = 1.5, \lambda = 2)$ ، وفقا لطرائق التقدير المختلفة مقارنة بطريقة التقدير المقترحة (IPWMI) لكل حجوم العينات، ووفقا لعدد مرات تكرار التجربة (r).

n	method	r	Model-5 with $(\alpha=1.5, \lambda=2)$										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	R_BIAS(α)	R_BIAS(λ)	R_RMSE(α)	R_RMSE(λ)	MSE($\hat{\alpha}$)	MSE($\hat{\lambda}$)	TD
15	MOM	1000	3.513	8.5039	32.943	71.571	-1.3423	-3.2519	22.003	35.933	1088.2	5159.6	20.211
	L-MOM	1000	2.209	3.4812	14.397	30.637	-0.4725	-0.7406	9.6094	15.337	207.56	939.9	5.8714
	U-IPWM2	1000	9.893	16.685	258.07	431.93	-5.5953	-7.3423	172.14	216.09	66602	1.8659e ⁺⁵	24.325
	B-IPWM2	1000	2.553	5.1574	14.471	30.132	-0.7019	-1.5787	9.6731	15.148	210.32	916.99	7.2764
	U-IPWMI (pro.)	1000	2.209	3.4812	14.397	30.637	-0.4725	-0.7406	9.6094	15.337	207.56	939.9	5.8714
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.553	5.1574	14.471	30.132	-0.7019	-1.5787	9.6731	15.148	210.32	916.99	7.2764
25	MOM	1000	3.037	6.5604	40.402	92.676	-1.0243	-2.2802	26.954	46.394	1633.1	8601.1	16.291
	L-MOM	1000	4.796	8.9562	32.136	79.537	-2.1972	-3.4781	21.536	39.92	1042.5	6368.3	7.2725
	U-IPWM2	1000	2.728	4.6196	27.198	49.871	-0.8185	-1.3098	18.151	24.97	740.52	2491.5	7.7557
	B-IPWM2	1000	2.072	2.7405	29.38	64.426	-0.3812	-0.3703	19.591	32.215	862.67	4147.1	7.1354
	U-IPWMI (pro.)	1000	4.796	8.9562	32.136	79.537	-2.1972	-3.4781	21.536	39.92	1042.5	6368.3	7.2725
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.072	2.7405	29.38	64.426	-0.3812	-0.3703	19.591	32.215	862.67	4147.1	7.1354
50	MOM	1000	2.193	5.949	42.661	74.823	-0.4619	-1.9745	28.445	37.464	1818.7	5608.5	10.359
	L-MOM	1000	2.185	3.340	2.877	5.7518	-0.4564	-0.6699	1.9715	2.9529	8.7374	34.845	1.508
	U-IPWM2	1000	1.580	2.058	32.171	75.625	-0.0530	-0.0290	21.448	37.813	1034	5713.5	5.0824
	B-IPWM2	1000	1.589	2.1951	21.562	44.009	-0.0593	-0.0976	14.375	22.004	464.48	1934.9	2.732
	U-IPWMI (pro.)	1000	2.185	3.3398	2.877	5.7518	-0.4564	-0.6699	1.9715	2.9529	8.7374	34.845	1.508
	B-IPWMI (pro.)	1000	1.589	2.1951	21.562	44.009	-0.0593	-0.0976	14.375	22.004	464.48	1934.9	2.732

تابع لجدول (5)

n	method	r	Model-5 with $(\alpha = 1.5, \lambda = 2)$										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	$R_BIAS(\alpha)$	$R_BIAS(\lambda)$	$R_RMSE(\alpha)$	$R_RMSE(\lambda)$	$MSE(\alpha)$	$MSE(\lambda)$	TD
100	MOM	1000	2.733	6.2805	0.6966	3.034	-0.8223	-2.1402	0.9443	2.6233	2.006	27.518	4.9625
	L-MOM	1000	1.8049	2.5916	0.5066	1.07	-0.2032	-0.2958	0.3942	0.6113	0.3493	1.4938	0.6725
	U-IPWM2	1000	1.8879	2.8362	0.6413	1.4026	-0.2586	-0.4181	0.4997	0.8165	0.5614	2.6646	0.8265
	B-IPWM2	1000	1.8343	2.6892	0.5283	1.1115	-0.2229	-0.3446	0.4168	0.6539	0.3905	1.7093	0.7153
	U-IPWMI (pro.)	1000	1.8049	2.5916	0.5066	1.07	-0.2032	-0.2958	0.3942	0.6113	0.3493	1.4938	0.6725
	B-IPWMI (pro.)	1000	1.8343	2.6892	0.5283	1.1115	-0.2229	-0.3446	0.4168	0.6539	0.3905	1.709	0.7153
150	MOM	1000	2.5826	5.8042	0.5110	2.2013	-0.7218	-1.9021	0.7981	2.1976	1.433	19.313	4.6239
	L-MOM	1000	1.7442	2.4921	0.3914	0.8222	-0.1628	-0.2461	0.3075	0.4791	0.2127	0.9175	0.5572
	U-IPWM2	1000	1.7919	2.6362	0.4639	0.9680	-0.1946	-0.3181	0.3654	0.5792	0.3002	1.3409	0.6440
	B-IPWM2	1000	1.7618	2.5528	0.4006	0.8388	-0.1746	-0.2764	0.3190	0.5023	0.2289	1.0085	0.5826
	U-IPWMI (pro.)	1000	1.7442	2.4921	0.3914	0.8222	-0.1628	-0.2461	0.3075	0.4791	0.2127	0.9175	0.5572
	B-IPWMI (pro.)	1000	1.7618	2.5528	0.4006	0.8388	-0.1746	-0.2764	0.3190	0.5023	0.2289	1.0085	0.5826
250	MOM	1000	2.4295	5.2813	0.3244	2.074	-0.6196	-1.6406	0.6563	1.9409	0.9690	15.064	4.2603
	L-MOM	1000	1.6778	2.3394	0.2843	0.5864	-0.1185	-0.1697	0.2235	0.3388	0.1123	0.4588	0.4147
	U-IPWM2	1000	1.6965	2.4012	0.2992	0.6248	-0.1310	-0.2006	0.2386	0.3713	0.1280	0.5510	0.4473
	B-IPWM2	1000	1.6873	2.3729	0.2878	0.5923	-0.1248	-0.1865	0.2289	0.3499	0.1178	0.4895	0.4277
	U-IPWMI (pro.)	1000	1.6778	2.3394	0.2843	0.5864	-0.1185	-0.1697	0.2235	0.3388	0.1123	0.4588	0.4147
	B-IPWMI (pro.)	1000	1.6873	2.3729	0.2878	0.5923	-0.1248	-0.1865	0.2289	0.3499	0.1178	0.4895	0.4277

جدول (6) يبين قيم المتوسط ($\hat{\mu}$) والانحراف المعياري (\hat{SD}) للقيم المقدرة لمعلمتي الشكل و القياس للتوزيع Lomax مع قيم التحيز النسبي (R_BIAS) وجذر متوسط مربعات الخفاء النسبي (R_RMSE) ومتوسط مربعات الخفاء (MSE) لكلا المعلمتين المقدرة والانحراف الكلي (TD), عندما يكون الانموذج المقترض بالمعلمتين ($\alpha = 2, \lambda = 2$), وفقا لطرائق التقدير المختلفة مقارنة بطريقة التقدير المقترحة (IPWMI) لكل حجوم العينات, ووفقا لعدد مرات تكرار التجربة (r).

n	method	r	Model-6 with $(\alpha = 2, \lambda = 2)$										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	$R_BIAS(\alpha)$	$R_BIAS(\lambda)$	$R_RMSE(\alpha)$	$R_RMSE(\lambda)$	$MSE(\alpha)$	$MSE(\lambda)$	TD
15	MOM	1000	1.5494	1.8962	49.531	72.52	0.2253	0.0519	24.766	36.26	2451.1	5253.9	17.451
	L-MOM	1000	1.9079	1.0953	24.163	52.162	0.0461	0.4523	12.081	26.085	583.25	2718.9	7.2541
	U-IPWM2	1000	-1.047	-4.6234	67.818	166.19	1.5237	3.3117	33.943	83.161	4603.9	27635	13.221
	B-IPWM2	1000	2.3927	2.2809	26.328	46.621	-0.1963	-0.1405	13.165	23.311	692.62	2171.5	8.2312
	U-IPWMI (pro.)	1000	1.9079	1.0953	24.163	52.162	0.0461	0.4523	12.081	26.085	583.25	2718.9	7.2541
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.3927	2.2809	26.328	46.621	-0.1963	-0.1405	13.165	23.311	692.62	2171.5	8.2312
25	MOM	1000	3.8602	5.1037	42.539	62.354	-0.9301	-1.5518	21.29	31.215	1811.2	3893.7	13.651
	L-MOM	1000	-5.039	-6.3856	201.02	234.5	3.5194	4.1928	100.57	117.32	40416	55003	12.822
	U-IPWM2	1000	2.1458	2.4107	22.262	35.936	-0.0729	-0.2053	11.131	17.969	495.11	1290.3	7.7857
	B-IPWM2	1000	2.0649	2.4342	20.91	28.271	-0.0325	-0.2171	10.455	14.137	436.78	798.63	5.3206
	U-IPWMI (pro.)	1000	-5.039	-6.3856	201.02	234.5	3.5194	4.1928	100.57	117.32	40416	55003	12.822
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.0649	2.4342	20.91	28.271	-0.0325	-0.2171	10.455	14.137	436.78	798.63	5.3206
50	MOM	1000	5.308	7.4249	14.539	20.504	-1.654	-2.7124	7.4555	10.605	222.13	449.42	7.851
	L-MOM	1000	2.308	2.2823	15.123	23.043	-0.1541	-0.1412	7.5632	11.522	228.58	530.51	2.8281
	U-IPWM2	1000	5.843	7.7091	50.477	79.059	-1.9216	-2.8545	25.311	39.633	2560.1	6276.7	8.4687
	B-IPWM2	1000	2.696	2.9349	21.893	30.128	-0.3481	-0.4674	10.952	15.071	479.32	907.67	3.2612
	U-IPWMI (pro.)	1000	2.308	2.2823	15.123	23.043	-0.1541	-0.1412	7.5632	11.522	228.58	530.51	2.8281
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.696	2.9349	21.893	30.128	-0.3481	-0.4674	10.952	15.071	479.32	907.67	3.2612

تابع لجدول (6)

n	method	r	Model-6 with $(\alpha=2, \lambda=2)$										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	R_BIAS(α)	R_BIAS(λ)	R_RMSE(α)	R_RMSE(λ)	MSE(α)	MSE(λ)	TD
100	MOM	1000	3.5006	4.6594	3.5942	4.3961	-0.7501	-1.3297	1.9475	2.5689	15.158	26.378	4.2372
	L-MOM	1000	2.4219	2.5955	2.3201	2.7538	-0.2110	-0.2978	1.1791	1.4087	5.5554	7.9307	0.8837
	U-IPWM2	1000	2.7109	3.0679	3.3638	4.7645	-0.3555	-0.5339	1.7191	2.4413	11.809	23.818	1.4158
	B-IPWM2	1000	2.5132	2.7383	2.2733	2.9155	-0.2566	-0.3692	1.1653	1.5038	5.4262	9.0368	0.9394
	U-IPWMI (pro.)	1000	2.4219	2.5955	2.3201	2.7538	-0.2110	-0.2978	1.1791	1.4087	5.5554	7.9307	0.8837
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.5132	2.7383	2.2733	2.9155	-0.2566	-0.3692	1.1653	1.5038	5.4262	9.0368	0.9394
150	MOM	1000	3.157	4.0743	1.0119	1.5077	-0.5785	-1.0371	0.7685	1.2822	2.3615	6.5735	3.6157
	L-MOM	1000	2.3134	2.4187	0.7214	1.0554	-0.1567	-0.2093	0.3933	0.5677	0.6182	1.288	0.6338
	U-IPWM2	1000	2.4602	2.6717	0.9468	1.3927	-0.2301	-0.3359	0.5264	0.7731	1.1074	2.3888	0.7944
	B-IPWM2	1000	2.3465	2.479	0.7460	1.092	-0.1732	-0.2395	0.4113	0.5962	0.6760	1.4208	0.6604
	U-IPWMI (pro.)	1000	2.3134	2.4187	0.7214	1.0554	-0.1567	-0.2093	0.3933	0.5677	0.6182	1.288	0.6338
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.3465	2.479	0.7460	1.092	-0.1732	-0.2395	0.4113	0.5962	0.6760	1.4208	0.6604
250	MOM	1000	2.9439	3.718	0.7098	1.054	-0.4719	-0.8590	0.5905	1.0078	1.3942	4.0614	3.3309
	L-MOM	1000	2.226	2.3032	0.5095	0.7065	-0.1130	-0.1516	0.2787	0.3844	0.3104	0.5906	0.4522
	U-IPWM2	1000	2.288	2.4147	0.5883	0.8279	-0.1440	-0.2074	0.3275	0.4630	0.4286	0.8568	0.5146
	B-IPWM2	1000	2.2434	2.3358	0.5188	0.7197	-0.1217	-0.1679	0.2865	0.3971	0.3281	0.6302	0.4655
	U-IPWMI (pro.)	1000	2.226	2.3032	0.5095	0.7065	-0.1130	-0.1516	0.2787	0.3844	0.3104	0.5906	0.4522
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.2434	2.3358	0.5188	0.7197	-0.1217	-0.1679	0.2865	0.3971	0.3281	0.6302	0.4655

جدول (7) يبين قيم المتوسط ($\hat{\mu}$) والانحراف المعياري (\hat{SD}) للقيم المقدرة لمعلمتي الشكل و القياس للتوزيع Lomax مع قيم التحيز النسبي (R_BIAS) وجذر متوسط مربعات الخطأ النسبي (R_RMSE) ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) لكلا المعلمتين المقدرة والانحراف الكلي (TD)، عندما يكون الانموذج المفترض بالمعلمتين ($\alpha = 2.5, \lambda = 2$)، وفقا لطرائق التقدير المختلفة مقارنة بطريقة التقدير المقترحة (IPWMI) لكل حجوم العينات، ووفقا لعدد مرات تكرار التجربة (r)

n	method	r	Model-7 with $(\alpha=2.5, \lambda=2)$										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	R_BIAS(α)	R_BIAS(λ)	R_RMSE(α)	R_RMSE(λ)	MSE(α)	MSE(λ)	TD
15	MOM	1000	5.6163	4.817	116.71	110.26	-1.2465	-1.4085	46.7	55.147	13617	12153	19.639
	L-MOM	1000	1.9847	1.3167	33.448	46.148	0.20613	0.3416	13.381	23.077	1117.9	2128	6.4792
	U-IPWM2	1000	0.1957	-0.2195	44.652	44.152	0.9217	1.1097	17.885	22.104	1997.1	1952.4	8.8192
	B-IPWM2	1000	2.3854	2.6682	152.89	132.05	0.0458	-0.3341	61.157	66.027	23353	17421	12.668
	U-IPWMI (pro.)	1000	1.9847	1.3167	33.448	46.148	0.2061	0.3416	13.381	23.077	1117.9	2128	6.4792
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.3854	2.6682	152.89	132.05	0.0458	-0.3341	61.157	66.027	23353	17421	12.668
25	MOM	1000	18.605	21.168	361.93	417.31	-6.4421	-9.5841	144.91	208.87	1.3112e ⁺⁵	1.7434e ⁺⁵	32.904
	L-MOM	1000	0.7349	-0.4368	69.122	78.792	0.7060	1.2184	27.658	39.415	4776.2	6208	7.9081
	U-IPWM2	1000	1.8623	1.8229	46.103	52.112	0.2551	0.0886	18.443	26.056	2123.7	2713	9.6913
	B-IPWM2	1000	2.6954	2.3509	35.522	39.639	-0.0782	-0.1754	14.209	19.82	1260.6	1569.8	8.3063
	U-IPWMI (pro.)	1000	0.7349	-0.4368	69.122	78.792	0.7060	1.2184	27.658	39.415	4776.2	6208	7.9081
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.6954	2.3509	35.522	39.639	-0.0782	-0.1754	14.209	19.82	1260.6	1569.8	8.3063
50	MOM	1000	22.508	27.286	526.94	677.15	-8.0032	-12.643	210.93	338.81	2.7779e ⁺⁵	4.5871e ⁺⁵	25.84
	L-MOM	1000	4.4135	3.0346	79.975	70.368	-0.7654	-0.5173	31.999	35.188	6393.3	4947.8	6.3775
	U-IPWM2	1000	2.5015	2.444	36.705	41.2	-0.0006	-0.2220	14.682	20.601	1345.9	1695.9	7.1673
	B-IPWM2	1000	2.5703	2.0775	37.949	43.368	-0.0281	-0.0388	15.18	21.684	1438.7	1878.9	5.4877
	U-IPWMI (pro.)	1000	4.4135	3.0346	79.975	70.368	-0.7654	-0.5173	31.999	35.188	6393.3	4947.8	6.3775
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.5703	2.0775	37.949	43.368	-0.0281	-0.0388	15.18	21.684	1438.7	1878.9	5.4877

تابع لجدول (7)

n	method	r	Model-7 with $(\alpha = 2.5, \lambda = 2)$										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	$R_BIAS(\alpha)$	$R_BIAS(\lambda)$	$R_RMSE(\alpha)$	$R_RMSE(\lambda)$	$MSE(\alpha)$	$MSE(\lambda)$	TD
100	MOM	1000	4.5656	4.3936	9.1153	11.076	-0.8262	-1.1968	3.7386	5.6657	87.272	128.28	4.5471
	L-MOM	1000	3.2393	2.789	6.7942	7.2709	-0.2957	-0.3945	2.7337	3.6568	46.662	53.435	1.2929
	U-IPWM2	1000	2.2821	1.8832	21.153	23.485	0.0872	0.0584	8.4618	11.743	447.06	551.03	3.5713
	B-IPWM2	1000	2.8509	2.3858	11.816	12.734	-0.1404	-0.1929	4.7287	6.3701	139.61	162.15	1.5121
	U-IPWMI (pro.)	1000	3.2393	2.789	6.7942	7.2709	-0.2957	-0.3945	2.7337	3.6568	46.662	53.435	1.2929
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.8509	2.3858	11.816	12.734	-0.1404	-0.1929	4.7287	6.3701	139.61	162.15	1.5121
150	MOM	1000	3.8694	3.6342	2.0743	2.1463	-0.5478	-0.8171	0.9942	1.3488	6.1736	7.2727	3.3738
	L-MOM	1000	2.6605	2.1777	6.5004	6.2788	-0.0642	-0.0889	2.6009	3.1407	42.238	39.416	0.9069
	U-IPWM2	1000	3.0024	2.5826	4.6607	4.6304	-0.2010	-0.2913	1.8751	2.3335	21.953	21.759	1.0861
	B-IPWM2	1000	2.8293	2.3548	3.7469	3.6358	-0.1317	-0.1774	1.5045	1.8265	14.133	13.332	0.8435
	U-IPWMI (pro.)	1000	2.6605	2.1777	6.5004	6.2788	-0.0642	-0.0889	2.6009	3.1407	42.238	39.416	0.9069
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.8293	2.3548	3.7469	3.6358	-0.1317	-0.1774	1.5045	1.8265	14.133	13.332	0.8435
250	MOM	1000	3.4152	3.1173	1.01	1.0667	-0.3661	-0.5587	0.5452	0.7724	1.8566	2.3852	2.9367
	L-MOM	1000	2.7489	2.2463	0.7363	0.7787	-0.0996	-0.1232	0.3108	0.4084	0.6033	0.6664	0.4903
	U-IPWM2	1000	2.8882	2.42	0.9584	1.0548	-0.1553	-0.2100	0.4136	0.5677	1.0684	1.2879	0.5916
	B-IPWM2	1000	2.7761	2.281	0.7532	0.797	-0.1105	-0.1405	0.3209	0.4226	0.6431	0.7136	0.5033
	U-IPWMI (pro.)	1000	2.7489	2.2463	0.7361	0.7787	-0.0996	-0.1232	0.3108	0.4084	0.6033	0.6664	0.4903
	B-IPWMI (pro.)	1000	2.7761	2.281	0.7532	0.797	-0.1105	-0.1405	0.3209	0.4226	0.6431	0.7136	0.5033

جدول (8) يبين قيم المتوسط ($\hat{\mu}$) والانحراف المعياري (\hat{SD}) للقيم المقدرة لمعلمتي الشكل و القياس للتوزيع Lomax مع قيم التحيز النسبي (R_BIAS) وجذر متوسط مربعات الخطأ النسبي (R_RMSE) ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) لكلا المعلمتين المقدرة والانحراف الكلي (TD), عندما يكون الانموذج المفترض بالمعلمتين ($\alpha = 4, \lambda = 2$), وفقا لطرائق التقدير المختلفة مقارنة بطريقة التقدير المقترحة (IPWMI) لكل حجم العينات, ووفقا لعدد مرات تكرار التجربة (r).

n	method	r	Model-8 with $(\alpha = 4, \lambda = 2)$										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	$R_BIAS(\alpha)$	$R_BIAS(\lambda)$	$R_RMSE(\alpha)$	$R_RMSE(\lambda)$	$MSE(\alpha)$	$MSE(\lambda)$	TD
15	MOM	1000	4.1366	2.588	181.53	133.74	-0.0342	-0.294	45.382	6.868	32920	17868	16.248
	L-MOM	1000	10.5	8.8865	376.86	347.91	-1.6249	-3.4433	94.229	173.99	1.4192e ⁺⁵	1.2097e ⁺⁵	18.971
	U-IPWM2	1000	-22.74	-19.34	701.04	575.36	6.6847	10.67	175.39	287.88	4.9168e ⁺⁵	3.3117e ⁺⁵	20.887
	B-IPWM2	1000	3.8824	1.1447	108.31	64.343	0.0294	0.4277	27.078	32.175	11719	4136.7	10.22
	U-IPWMI (pro.)	1000	10.5	8.8865	376.86	347.91	-1.6249	-3.4433	94.229	173.99	1.4192e ⁺⁵	1.2097e ⁺⁵	18.971
	B-IPWMI (pro.)	1000	3.8824	1.1447	108.31	64.343	0.0294	0.4277	27.078	32.175	11719	4136.7	10.22
25	MOM	1000	2.7678	2.7638	209	128.3	0.3080	-0.3819	52.25	64.149	43637	16444	17.87
	L-MOM	1000	1.98	0.6591	70.44	48.987	0.505	0.6704	17.617	24.503	4960.9	2399.2	8.0379
	U-IPWM2	1000	6.7575	5.2796	280.05	234.29	-0.6894	-1.6398	70.016	117.16	78358	54846	15.559
	B-IPWM2	1000	3.7202	2.1055	85.742	64.617	0.0699	-0.0528	21.436	32.309	7344.5	4171.2	10.191
	U-IPWMI (pro.)	1000	1.98	0.6591	70.44	48.987	0.505	0.6704	17.617	24.503	4960.9	2399.2	8.0379
	B-IPWMI (pro.)	1000	3.7202	2.1055	85.742	64.617	0.0699	-0.0528	21.436	32.309	7344.5	4171.2	10.191
50	MOM	1000	20.333	9.8906	590.13	332.95	-4.0833	-3.9453	147.59	166.52	3.4817e ⁺⁵	1.1081e ⁺⁵	27.471
	L-MOM	1000	1.2795	0.7843	83.152	44.412	0.6801	0.6079	20.799	22.214	6914.8	1971.9	6.6235
	U-IPWM2	1000	-0.98	-0.8217	70.12	42.724	1.2449	1.4108	17.574	21.408	4936.6	1831.5	8.1498
	B-IPWM2	1000	4.1871	2.7928	82.882	47.887	-0.0468	-0.3964	20.72	23.947	6862.6	2291.5	6.928
	U-IPWMI (pro.)	1000	1.2795	0.7843	83.152	44.412	0.6801	0.6079	20.799	22.214	6914.8	1971.9	6.6235
	B-IPWMI (pro.)	1000	4.1871	2.7928	82.882	47.887	-0.0468	-0.3964	20.72	23.947	6862.6	2291.5	6.928

تابع لجدول (8)

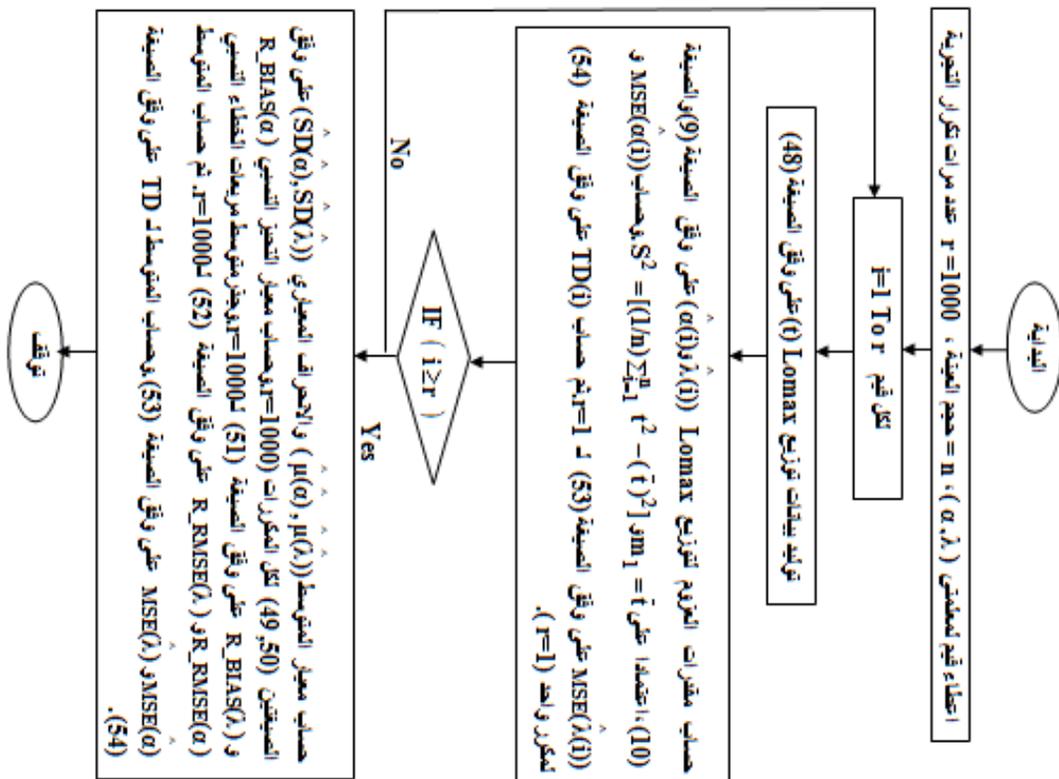
n	method	r	Model-8 with $(\alpha = 4, \lambda = 2)$										
			$\hat{\mu}(\alpha)$	$\hat{\mu}(\lambda)$	$\hat{SD}(\alpha)$	$\hat{SD}(\lambda)$	$R_BIAS(\alpha)$	$R_BIAS(\lambda)$	$R_RMSE(\alpha)$	$R_RMSE(\lambda)$	$MSE(\hat{\alpha})$	$MSE(\hat{\lambda})$	TD
100	MOM	1000	-26.685	-17.254	809.71	516.61	7.6712	9.6271	202.57	258.48	$6.5591e^{+5}$	$2.6699e^{+5}$	26.253
	L-MOM	1000	3.7051	1.678	39.014	27.163	0.0737	0.161	9.7539	13.582	1520.7	737.17	3.4192
	U-IPWM2	1000	-22.18	-14.362	620.28	395.82	6.5449	8.1809	155.21	198.08	$3.8505e^{+5}$	$1.5679e^{+5}$	19.646
	B-IPWM2	1000	4.8453	2.5338	22.038	12.913	-0.2113	-0.2669	5.5135	6.4618	485.89	166.85	2.8772
	U-IPWMI (pro.)	1000	3.7051	1.678	39.014	27.163	0.0737	0.161	9.7539	13.582	1520.7	737.17	3.4192
	B-IPWMI (pro.)	1000	4.8453	2.5338	22.038	12.913	-0.2113	-0.2669	5.5135	6.4618	485.89	166.85	2.8772
150	MOM	1000	7.2265	4.1175	48.011	30.023	-0.8066	-1.0588	12.03	15.049	2313.2	904.96	5.6975
	L-MOM	1000	4.445	2.2689	19.794	12.219	-0.1113	-0.1344	4.9497	6.1108	391.6	149.22	2.2419
	U-IPWM2	1000	8.4466	4.7447	90.031	54.554	-1.1117	-1.3724	22.535	27.312	8117.2	2980.7	6.3279
	B-IPWM2	1000	4.0163	2.0009	48.264	29.748	-0.0041	-0.0004	12.066	14.874	2327.1	884.09	2.8731
	U-IPWMI (pro.)	1000	4.445	2.2689	19.794	12.219	-0.1113	-0.1344	4.9497	6.1108	391.6	149.22	2.2419
	B-IPWMI (pro.)	1000	4.0163	2.0009	48.264	29.748	-0.0041	-0.0004	12.066	14.874	2327.1	884.09	2.8731
250	MOM	1000	5.6313	3.0178	4.7203	2.7272	-0.4078	-0.5089	1.2486	1.4555	24.92	8.4663	3.0315
	L-MOM	1000	8.403	4.6988	84.317	51.964	-1.1007	-1.3494	21.108	26.017	7121.6	2704.9	2.832
	U-IPWM2	1000	5.3828	2.8533	9.5546	5.9839	-0.3457	-0.4267	2.4135	3.0222	93.112	36.5	1.3953
	B-IPWM2	1000	3.978	1.9753	17.216	10.598	0.0055	0.0124	4.3039	5.299	296.09	112.2	1.1856
	U-IPWMI (pro.)	1000	8.403	4.6988	84.317	51.964	-1.1007	-1.3494	21.108	26.017	7121.6	2704.9	2.832
	B-IPWMI (pro.)	1000	3.978	1.9753	17.216	10.598	0.0055	0.0124	4.3039	5.299	296.09	112.2	1.1856

الملحق 2

الخوارزمية رقم (1): لحساب المعايير التي تمثل خصائص مقدرات العزوم لمعلمتي توزيع Lomax.

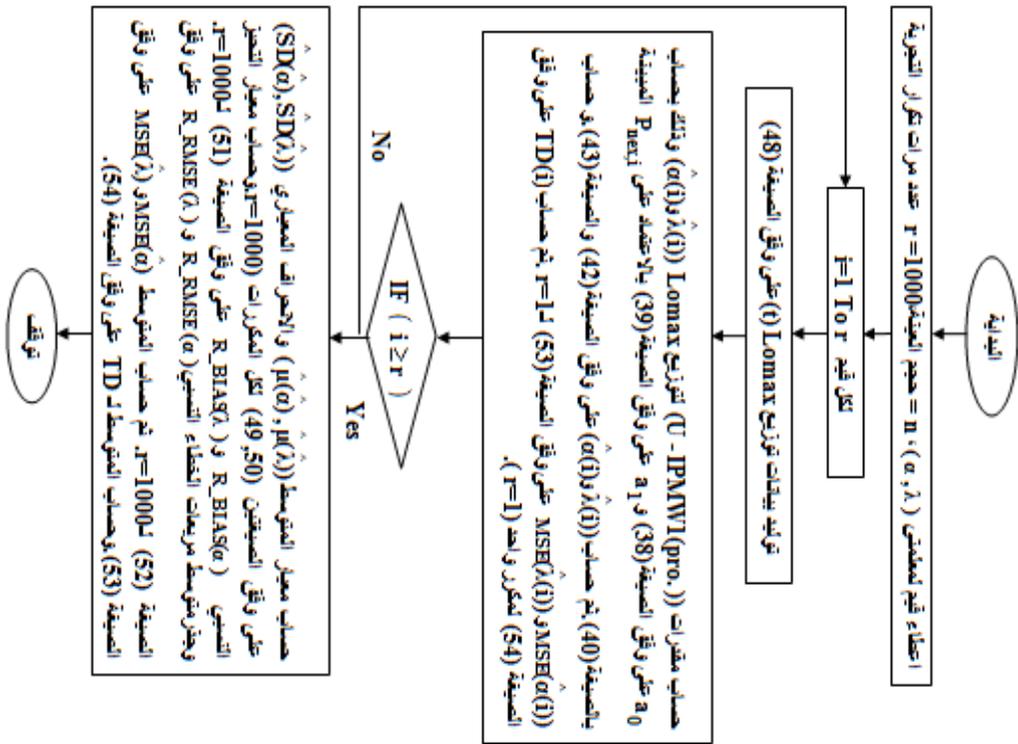
الخوارزمية رقم (2):

لحساب المعايير التي تمثل خصائص مقدرات العزوم- L لمعلمتي توزيع Lomax

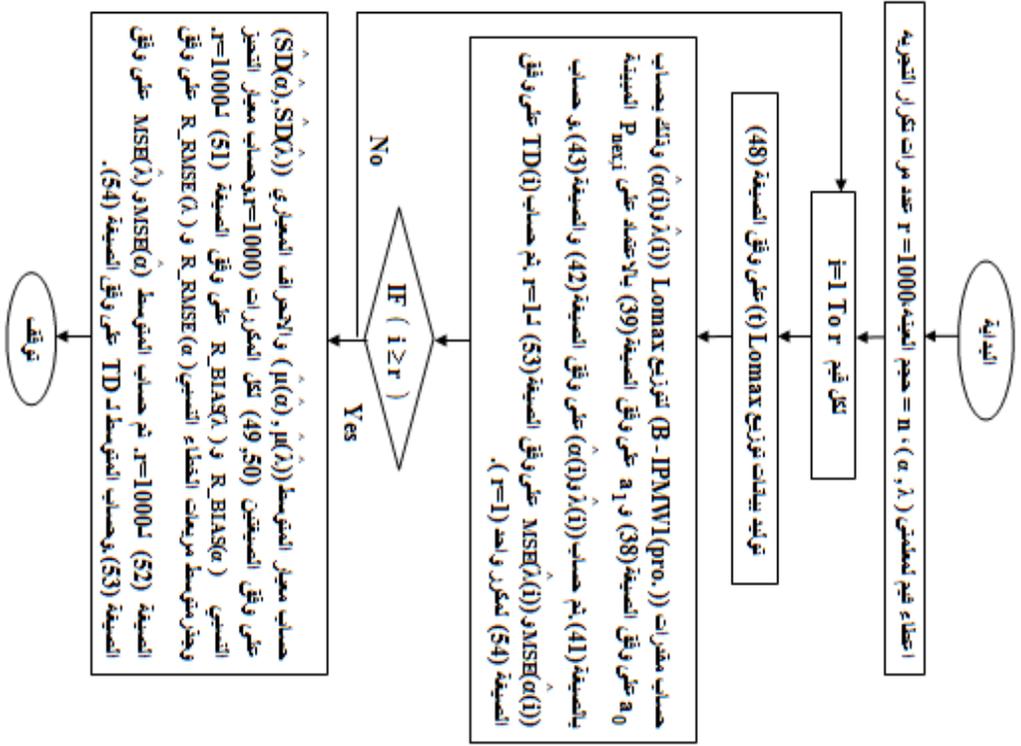


r=1000
على وفق
على وفق

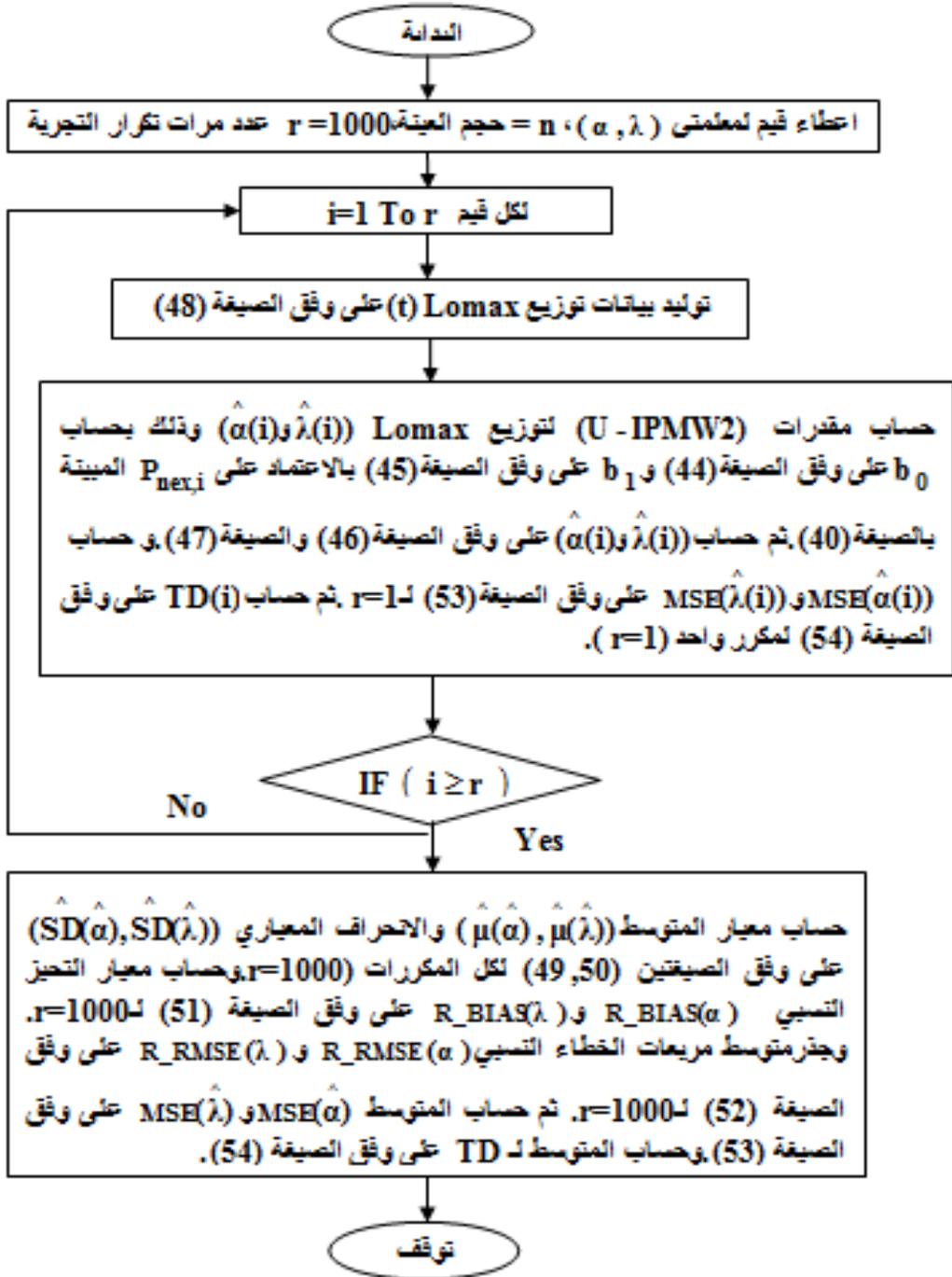
الخوارزمية رقم (3): لحساب المعايير التي تمثل خصائص مقدرات العزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الاول المقترح استعمالها الغير متحيزة (U-IPMW1) لمعلمتي توزيع Lomax.



الخوارزمية رقم (4): لحساب المعايير التي تمثل خصائص مقدرات العزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الاول المقترح استعمالها المتحيزة (B-IPMW1) لمعلمتي توزيع Lomax.



الخوارزمية رقم (5): لحساب المعايير التي تمثل خصائص مقدرات العزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الثاني الغير متحيزة (U-IPMW2) لمعلمتي توزيع Lomax.



الخوارزمية رقم (6): لحساب المعايير التي تمثل خصائص مقدرات العزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الثاني الغير متحيزة (B-IPMW2) لمعلمتي توزيع Lomax.

