



مقارنة بين طريقتي تقدير دالة البقاء لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور: دراسة تطبيقية

احمد شمخي صاحب^{أ*}

امينه كريم عيسى^{ب*}

^أ قسم الإحصاء كلية الإدارة والاقتصاد، الجامعة المستنصرية

^ب قسم الإحصاء كلية الإدارة والاقتصاد، الجامعة المستنصرية

ايميل: ahmedsaheb@uomustansiriyah.edu.iq

مستخلص البحث:

يهدف هذا البحث إلى دراسة توزيع لوماكس المعكوس المبتور وتقدير دالة البقاء المرتبطة به باستخدام طريقتين إحصائيتين هما: طريقة الإمكان الأعظم (MLE)، وطريقة المربعات الصغرى (LSE). يُعد هذا التوزيع من التوزيعات الثقيلة الذيل، ويتميز بمرونته في تمثيل البيانات الموجبة ضمن نطاق محدد، مما يجعله مناسباً لتحليل بيانات البقاء. تم تنفيذ دراسة محاكاة باستخدام أحجام عينات مختلفة (50، 100، 150) لتقييم أداء الطريقتين وفق معياري متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط الخطأ المطلق (MAE). أظهرت النتائج أن طريقة LSE كانت أكثر كفاءة في العينات الصغيرة، بينما تفوقت MLE في الأحجام الكبيرة، مما يعكس الخصائص النظرية لكل منهما ويؤكد أهمية اختيار الطريقة المناسبة حسب حجم العينة وخصائص البيانات.

كلمات مفتاحية: دالة البقاء، دالة الإمكان الأعظم، دالة التقدير، توزيع لوماكس، المحاكاة، متوسط مربعات الخطأ، متوسط الخطأ المطلق

Comparison Between Two Estimation Methods of the Survival Function for the Truncated Inverse Lomax Distribution: An Applied Study

Ahmed Shamkhi Sahib^{A*}, Amina Kareem Issa^{B*}

A Department of Statistics, College of Administration and Economics, Al-Mustansiriyah University

B Department of Statistics, College of Administration and Economics, Al-Mustansiriyah University

Email: ahmedsaheb@uomustansiriyah.edu.iq

ملاحظه: البحث مستل من رسالة الماجستير

Abstract

This study aims to investigate the Truncated Inverse Lomax Distribution and estimate its associated survival function using two statistical methods: Maximum Likelihood Estimation (MLE) and Least Squares Estimation (LSE). The distribution is classified as heavy-tailed and is known for its flexibility in modeling positively skewed data within a bounded interval, making it particularly suitable for survival data analysis. A simulation study was conducted using different sample sizes (50, 100, and 150) to evaluate the performance of both estimation methods based on the Mean Squared Error (MSE) and the Mean Absolute Error (MAE) criteria. The results indicated that the LSE method was more efficient for small sample sizes, while the MLE method outperformed LSE in larger samples, reflecting the theoretical properties of each approach. These findings highlight the importance of selecting the appropriate estimation method based on the sample size and data characteristics.



Keywords: Survival function, Maximum Likelihood Function, Estimation Function, Lomax Distribution, Simulation, Mean Squared Error (MSE), Mean Absolute Error (MAE)

1. المقدمة Introduction

تُعد تحليلات البقاء من المجالات الإحصائية ذات الأهمية البالغة، لما لها من تطبيقات واسعة في المجالات الطبية، ودراسات الاعتمادية، وتحليل بيانات العمر الزمني للأفراد أو الأنظمة. وتستخدم دالة البقاء لتمثيل احتمال بقاء الفرد على قيد الحياة من لحظة بدء حدث معين (مثل الإصابة بمرض) حتى حدوث النهاية (كالوفاة أو الشفاء). في هذا البحث، نسلط الضوء على توزيع إحصائي حديث نسبياً، وهو توزيع لوماكس المعكوس المبتور، الذي يُعد امتداداً لتوزيع لوماكس المعروف بمرونته في تمثيل البيانات الموجبة الالتواء. يُعد توزيع لوماكس حالة خاصة من توزيع باريتو من النوع الثاني وقد استُخدم على نطاق واسع في النمذجة الإحصائية في المجالات الطبية والاقتصادية ونظرية صفوف الانتظار. ونظراً لأهميته، فقد تناول العديد من الباحثين تقدير معالمه باستخدام طرائق متنوعة؛ فقد استخدم Moteza وآخرون [1] الإحصاءات المرتبة المعممة في التقدير، في حين قارنت جنان عباس [2] بين طريقتي العزوم التقليدية والعزوم الموزونة في تقدير معالم التوزيع. ومن الناحية التطبيقية، كثيراً ما تكون البيانات عرضة للبتير (القطع)، وهو ما يؤثر بشكل مباشر في خصائص التوزيع، كالمتوسط، والتباين، والعزوم. وقد تناول عدد من الباحثين دراسة تأثير البتير على التوزيعات الإحصائية، من بينهم [3] Philippe الذي تناول البتير الأيسر لتوزيع جاما، و James [4] الذي درس أثر البتير على العزوم، و [5] Ulhas الذي ركّز على تقدير معلمة القياس لتوزيع جاما المبتور، يهدف هذا البحث إلى تقدير دالة البقاء لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور باستخدام طريقتي تقدير: طريقة الإمكان الأعظم (MLE)، وطريقة المربعات الصغرى (LSE)، وقد تم إجراء دراسة محاكاة لمقارنة أداء هذه الطرائق بالاعتماد على معياري متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط الخطأ المطلق (MAE)، بالإضافة إلى تطبيق عملي باستخدام بيانات حقيقية لمرضى سرطان الدم للتحقق من ملائمة التوزيع وفعالية الطرائق التقديرية المدروسة.

2. الجانب النظري The theoretical aspect

1.2. دالة البقاء survival function

هي دالة احتمالية غير متزايدة ولا يختلف مفهومها الرياضي عن دالة المعولية إلا أنها تستعمل في الجوانب الطبية والحياتية، ومن أبرز سمات تحليل البقاء هو عدم اكتمال البيانات بسبب الرقابة (Censoring) أو البتير (Truncation). يتمثل الفرق بينهما في أن الرقابة تحدث بشكل غير مقصود بسبب عدم توفر المعلومات الكاملة، بينما البتير يتم بشكل متعمد نتيجة لاختيار عينة ضمن نطاق محدد. فهي احتمال بقاء الكائن حياً بعد الزمن t ويرمز لها بالرمز $S(t)$ وصيغتها الرياضية هي:

$$S(t) = P_r(T > t) = \int_t^{t_{\max}} f(t) dt \quad \dots (1)$$

$$S(t) = \Pr(T > t) \quad \dots (2)$$

اذ ان:

t : يمثل زمن البقاء والذي يكون أكبر أو يساوي صفر ($t \geq 0$).

$S(t)$: تمثل دالة البقاء

T متغير عشوائي يشير إلى وقت البقاء حتى حدوث الموت

ان دالة البقاء هي دالة متممة لدالة الكثافة التجميعية (Cumulative Distribution Function) ولتكن $F(t)$ فان:



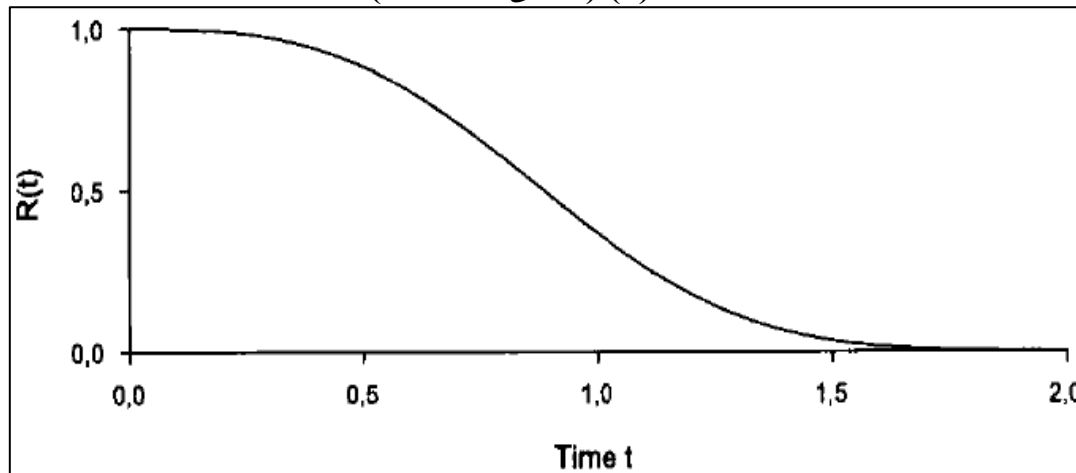
$$F(t) = \Pr(T \leq t) \dots (3)$$

وان

$$S(t) = 1 - \Pr(T \leq t) \dots (4)$$

$$S(t) = 1 - F(t) \dots (5)$$

الشكل (1) (منحنى دالة البقاء)



يمثل منحنى دالة البقاء اذ يمثل المحور الافقي الوقت (t) والمحور العمودي يمثل قيمه دالة البقاء، الشكل أعلاه يبين العلاقة العكسية ما بين دالة البقاء والزمن^[6] وتكون دالة البقاء موجبة مستمرة ومتناقصة لجميع قيم (x) خلال الفترة (t, 0) وإن قيمتها بين الصفر والواحد.

$$S(\infty) = 0$$

$$S(0) = 1$$

3. توزيع لوماكس المعكوس المبتور (TILD) (Truncated Inverse Lomax Distributio) يعتبر توزيع لوماكس المعكوس (ILD) (Inverse Lomax Distribution) أحد التوزيعات الاحتمالية المهمة في تحليل بيانات البقاء والموثوقية، ويتميز هذا التوزيع بكونه ثقيل الذيل (Heavy-Tailed Distribution) مما يجعله مناسباً لوصف الظواهر التي تتضمن فترات حياة طويلة، مثل أعمار الأجهزة والأنظمة البيولوجية وغيرها، عند تطبيق البتر (Truncation) على هذا التوزيع، نحصل على توزيع لوماكس المعكوس المبتور (TILD)، وهو إصدار معدل من توزيع لوماكس المعكوس (ILD) حيث يتم تقييد نطاق القيم ضمن حدود معينة [a, b]، هذا التوزيع مفيد في الحالات التي تكون فيها البيانات داخل نطاق معين، كما هو الحال في دراسات البقاء وتحليل الموثوقية. إذا كان x متغيراً عشوائياً مستمراً يتبع توزيع لوماكس المعكوس (ILD)، وكانت دالة الكثافة الاحتمالية (PDF) ودالة التوزيع التراكمي (CDF) معطاة بالشكل التالي على التوالي:

$$f_t(x, \alpha, \beta \mid a < x \leq b) = \frac{f(x, \alpha, \beta)}{F(b) - F(a)} \dots (6)$$

$$a \leq x \leq b \quad a, b \in \mathcal{R}^+$$

$$F_t(x, \alpha, \beta \mid a < x \leq b) = \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} \dots (7)$$

$$a \leq x \leq b \quad a, b \in \mathcal{R}^+$$

حيث:



α : هو معامل الشكل (Shape Parameter) β : هو معامل المقياس (Scale Parameter) a, b : حدود البتر
في هذه الحالة، إذا تم بتر التوزيع بحيث يكون $a \leq x \leq b$ فإن دالة الكثافة الاحتمالية (PDF) لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور (DTILD) ستصبح:

$$f_{dt}(x) = \frac{\frac{\alpha\beta}{x^2} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{-(1+\beta)}}{\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\beta} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\beta}}, \quad a \leq x \leq b \quad \dots (8)$$

f_{dt} : تمثل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور من الجهتين [7]

ودالة التوزيع التراكمي (CDF) لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور (DTILD) ستصبح:

$$F_{dt}(x) = \frac{\left(1 + \frac{\beta}{x}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}}{\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}} \quad a \leq x \leq b \quad \dots (9)$$

F_{dt} : تمثل دالة التوزيع التراكمي لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور من الجهتين
(dt) Doubly Truncated: وتمثل التوزيع المبتور من الجهتين (التوزيع مبتور من الجهتين)
يشير الرمز dt إلى ان التوزيع خضع للبتر من الجهتين، (DTILD): توزيع لوماكس المعكوس المبتور
من الجهتين حيث تقتصر الدراسة على الفترة المحددة بين a و b [8].

4. دالة البقاء لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور (TILD)

تعرف دالة البقاء (Survival Function) بأنها الاحتمال المرتبط باستمرار وجود وحدة معينة (مثل جهاز، أو مريض في دراسة طبية) بعد فترة زمنية معينة t، أي أنها تعبر عن احتمالية عدم وقوع الحدث محل الدراسة حتى اللحظة t، ويتم تعريفها رياضياً على النحو الآتي:

$$S_{dt}(t) = \frac{\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{t}\right)^{-\alpha}}{\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}} \quad a \leq t \leq b \quad \dots (10)$$

حيث ان:

$S_{dt}(t)$: تمثل دالة البقاء لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور من الجهتين [9]

5. طرائق التقدير Estimation Methods

1-5. طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Estimation (MLE)

مقدر الإمكان الأعظم هو الذي يجعل لوغاريتم دالة الإمكان في نهايتها العظمى ويُعرف التقدير باستعمال هذه الطريقة بأنه قيم المعلمات التي تجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى، تعتمد هذه الطريقة على تعظيم دالة الإمكان (Likelihood Function) للحصول على تقديرات لمعلمات التوزيع. يتم ذلك من خلال:

- حساب دالة الإمكان بناءً على العينة المسحوبة من التوزيع.
- أخذ اللوغاريتم الطبيعي لدالة الإمكان (log-likelihood function). حل المعادلات باستخدام الطرق العددية مثل طريقة نيوتن – رافسون [10]، عند توفر عينة عشوائية $X_1, X_2, \dots, X_n$ مستقلة ومتطابقة التوزيع (iid) مأخوذة من توزيع لوماكس المعكوس المبتور (TILD)، فإن دالة الإمكان تُعطى بالصيغة:



$$L(x, \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\frac{\alpha\beta}{x^2} \left(1 + \frac{\beta}{x}\right)^{-(1+\alpha)}}{\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}} \right] \quad \dots (11)$$

لحساب التقديرات بطريقة الإمكان الأعظم، نأخذ اللوغاريتم الطبيعي لدالة الإمكان، لتسهيل عملية الاشتقاق وتحويل الضرب الى جمع فنحصل على دالة الإمكان اللوغاريتمية (Log-Likelihood Function):

$$\begin{aligned} \log L(x, \alpha, \beta) &= n \log \alpha + n \log \beta - 2 \sum_{i=1}^n \log x_i - (1 + \alpha) \\ &\quad - \log \left[\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha} \right] \quad \dots (12) \end{aligned}$$

لإيجاد القيم المثلى لـ α و β ، نقوم باشتقاق دالة اللوغاريتم الطبيعي للإمكان الأعظم بالنسبة لكل من المعلمتين α و β ثم مساواة المشتقات بالصفر: اشتقاق دالة اللوغاريتم الطبيعي للإمكان بالنسبة لـ α

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \log \left(1 + \frac{\beta}{x_i}\right) + \frac{n}{\left[\left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha}\right]} \\ &\quad \times \left[\left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha} \log \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} \log \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha} \right] \\ &= 0 \quad \dots (13) \end{aligned}$$

اشتقاق دالة اللوغاريتم الطبيعي للإمكان بالنسبة لـ β [11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \frac{(1 + \alpha)}{x_i + \beta} \\ &\quad + \frac{n\alpha \left[\frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-(\alpha+1)} - \frac{1}{b} \left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-(\alpha+1)} \right]}{\left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha}} \quad (14) \end{aligned}$$

2-5. طريقة المربعات الصغرى ((Least Squares Estimation)) (LSE)

تعد طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية من الطرائق المهمة في عملية التقدير اذ تتميز بخصائص عدة مما يجعلها من أفضل الطرائق وأوسعها استخداماً وتستند هذه الطريقة إلى تصغير مجموع مربعات الأخطاء، الصيغة المستخدمة هنا تعتمد على تحويل التوزيع إلى شكل خطي يمكن تقديره باستخدام الانحدار الخطي. [12]



$$S(x, \alpha, \beta, a, b) = \sum_{i=1}^n [F_{dt}(x_i, \alpha, \beta) - E(F_{dt}(x_i, \alpha, \beta))]^2 \quad (15)$$

$$E(F_{dt}(x_{i:n}, \alpha, \beta)) = \left(\frac{i}{n+1}\right)$$

$$V(F_{dt}(x_{i:n}, \alpha, \beta)) = \frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2(n+2)} \quad \dots (16)$$

$$(x, \alpha, \beta, a, b) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\left(1 + \frac{\beta}{x_i}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}}{\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}} - \frac{i}{n+1} \right]^2 \quad \dots (17)$$

لحساب التقديرات المثلى، نأخذ المشتقة الجزئية لـ $S(x, \alpha, \beta, a, b)$ بالنسبة إلى كل من (α, β) ثم نساويها بالصفر [13]:

$$\begin{aligned} \frac{dS(\alpha, \beta, a, b)}{d\alpha} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\left(1 + \frac{\beta}{x_i}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}}{\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}} - \frac{i}{n+1} \right]^2 P_{\alpha} \\ &= 0 \quad \dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dS(\alpha, \beta, a, b)}{d\beta} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\left(1 + \frac{\beta}{x_i}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}}{\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}} - \frac{i}{n+1} \right]^2 P_{\beta} \\ &= 0 \quad \dots (19) \end{aligned}$$

6. مقاييس المقارنة Comparison scales

بعد إيجاد المقدرات في المرحلة الثالثة، يتم في هذه المرحلة المقارنة ما بين طرائق التقدير وذلك باستعمال معايير المقارنة واختيار الطريقة الافضل باستعمال المعايير الإحصائية الآتية

1-متوسط مربعات الخطأ (MSE) حسب الصيغة التالية:

$$MSE(S(t)) = \frac{1}{R} * \sum_{i=1}^R (S(t_i) - \hat{S}(t_i))^2 \quad \dots (20)$$

2-متوسط الخطأ المطلق (MAE) وحسب الصيغة الآتية



هو مقياس إحصائي يُستخدم لتقييم دقة التقديرات التي يتم الحصول عليها من طرائق التقدير، حيث يقيس متوسط مقدار الفروقات المطلقة بين التقديرات والمعلمة الحقيقية ثم حساب المتوسط لهذه الانحرافات.

$$MAE = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n |\theta_i - \theta_i| \quad .. (21)$$

7. المحاكاة simulation

عملية المحاكاة هي تشبيه تقريبي للنظام في الواقع الحقيقي وتمثيله بصورة طبق الاصل دون اخذ النظام نفسه اي يمكننا القول بأن المحاكاة هي عملية تقليد لظاهرة حقيقية في وجود مجموعة من المعادلات الحسابية – الرياضية – ضمن برامج الكمبيوتر المتقدمة من أجل الدراسة والتقييم، فهي أسلوب رقمي لإنجاز بعض التجارب على الحاسب الالكتروني من خلال عمليات رياضية ومنطقية لوصف هيكلية وسلوك النظام الحقيقي ضمن مدة زمنية معينة.

1.7 مراحل تجارب المحاكاة (Stages of Simulation experiments)

المرحلة الاولى:

أ. تحديد القيم الافتراضية (Initial values determination). تعد هذه المرحلة من أهم المراحل التي تعتمد عليها بقية المراحل وقد تم اختيار القيم الافتراضية تجريبياً عبر اجراء تجارب عدة واختبار القيم التي استقرت عندها التقديرات واعطت أفضل النتائج وحسب الخطوات الآتية:

وقد تم اختيار ثلاثة أحجام مختلفة من العينات وهي (n=50, 100, 150).

- 1- تم اختيار أوقات البقاء لتقدير دالتي البقاء والخطورة (t=1,2,...,4)
- 2- تم تكرار التجربة (r=500) وذلك لزيادة الحصول على الدقة والتجانس المطلوب

ب- تحديد قيم المعلمات الافتراضية (values Determination Parameters). تم اختيار قيم افتراضية لمعلمتي الشكل ومعلمة القياس لتوزيع (لوماكس المعكوس المبتور) وكما في الجدول (1) ادناه:

جدول (1) القيم الافتراضية للمعلمات (α, β) لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور

Model	α	β
1	0.5	1
2	1	3
3	3	5

المرحلة الثانية: توليد البيانات (Data Generation)

تم توليد البيانات العشوائية من التوزيع المستهدف (لوماكس المعكوس المبتور) باستخدام الطريقة العكسية لدالة التوزيع التراكمي (Inverse Transform Method)، وذلك ضمن الفترة المقطوعة المحددة [a=0.7, b=5]، وكالاتي:

1- توليد أرقام عشوائية U_i تتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة (0,1)

$$U_i \sim U(0,1) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$



U_i : يمثل متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع المنتظم يتم توليده باستعمال برنامج R على وفق الصيغة الآتية:

$$U = [0 \leq p \leq 1], p \sim \text{UniformDistribution}$$

2- تحويل البيانات المولدة ($i = 1, \dots, n$) في الخطوة رقم (1) والتي تتبع التوزيع المنتظم المستمر الى بيانات تتبع توزيع لوماكس المعكوس المبتور، باستعمال طريقة التحويل المعكوس وهو اخذ معكوس دالة التوزيع التراكمي $F(t)^{-1}$ للتوزيع المقترح وفق الصيغة الآتية:
إذا كانت $F(x)$ دالة التوزيع التراكمي لتوزيع معين، فإننا نستطيع توليد القيم العشوائية X عبر العلاقة:

$$x = F^{-1}U$$

بما أن الدراسة تعتمد على توزيع لوماكس المعكوس المبتور على الفترة المحددة $[a=0.7, b=5]$ يتم توليد القيم العشوائية وفق دالة التوزيع التراكمي المعكوسة الخاصة بالتوزيع المبتور كما يأتي:

$$x_i = \left[\frac{1}{\beta} \left(\frac{1 - u(1 - F(b)) - F(a)}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} \right]^{-1} \dots (22)$$

8. تحليل نتائج تجربة المحاكاة Analysis of Simulation Result

تم عرض نتائج مقدرات المعلمات لطريقتي التقدير وتحليل عملية المحاكاة بغية الوصول الى أفضل طريقة للتقدير عن طريق اعتماد المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط الخطأ المطلق (MAE) لغرض المقارنة بين طريقتي التقدير.

1. عند حجم عينة 50:

جدول (2) نتائج طرائق تقدير توزيع لوماكس المعكوس المبتور لطريقتي التقدير (MLE, LSE) عند حجم عينة 50

alpha	beta		MLE	LSE	best
0.5	1.1	alpha	0.35252	0.62806	lse
		MSE	0.8021	0.5233	
		MAE	0.97201	0.6823	
		beta	0.926624	1.065247	lse
		MSE	0.89583	0.6008	
		MAE	0.92404	0.6478	
0.5	5	alpha	0.567262	0.530526	lse
		MSE	1.08238	1.0022	
		MAE	0.98904	0.9065	
		beta	5.114134	5.066597	lse
		MSE	0.83577	0.6722	
		MAE	0.96018	0.7565	
		beta	1.15403	1.041532	lse
		MSE	0.82628	0.5553	
		MAE	1.05183	0.8214	
1.1	3	alpha	0.944136	1.188717	



		MSE	0.8398	0.6315	lse
		MAE	1.14764	1.1369	
1.1	5	alpha	1.048928	0.662738	lse
		MSE	0.93977	0.8639	
		MAE	1.12372	1.0929	
		beta	5.016559	4.762136	mle
		MSE	0.87503	0.9466	
		MAE	0.92729	0.6714	
3	1.1	alpha	2.954903	3.13062	lse
		MSE	0.82329	0.6432	
		MAE	1.1648	1.182	
3	3	alpha	2.862811	3.133718	lse
		MSE	0.96512	0.6514	
		MAE	0.95849	0.711	
		beta	2.967285	3.01318	lse
		MSE	0.85956	0.5925	
		MAE	1.00048	1.0375	
3	5	alpha	2.933975	3.175103	lse
		MSE	0.92443	0.6933	
		MAE	1.12229	0.8458	

2. عند حجم عينة 100

جدول (3) نتائج طرائق تقدير توزيع لوماكس المعكوس المبتور لطريقتي التقدير (MLE, LSE) عند حجم عينة 100

alpha	beta		MLE	LSE	best
0.5	1.1	alpha	0.481355	0.319335	MLE
		MSE	0.4309	0.7594	
		MAE	0.5657	0.8221	
		beta	1.096475	1.165416	MLE
		MSE	0.4275	0.827	
		MAE	0.5001	0.9817	
0.5	3	alpha	0.522849	0.371748	MLE
		MSE	0.4398	0.7134	
		MAE	0.4917	0.8509	
		beta	3.069161	3.012287	MLE
		MSE	0.5124	1.0332	
		MAE	0.4024	0.8153	
0.5	5	alpha	0.438285	0.443787	MLE
		MSE	0.5797	1.1782	
		MAE	0.5016	0.7234	
		beta	5.045585	4.763518	



		MSE	0.4695	0.8482	
		MAE	0.5889	0.8263	
1.1	1.1	alpha	1.108426	1.300829	MLE
		MSE	0.4068	0.794	
		MAE	0.4529	1.0091	
		beta	1.121813	1.184939	MLE
		MSE	0.4197	0.9051	
		MAE	0.4011	0.6561	
1.1	3	alpha	1.016863	0.913566	MLE
		MSE	0.4506	0.6799	
		MAE	0.4274	0.9509	
		beta	2.969339	3.007152	MLE
		MSE	0.4811	0.8815	
		MAE	0.4353	0.9088	
1.1	5	alpha	1.117026	0.96965	MLE
		MSE	0.4106	0.7172	
		MAE	0.5142	1.0649	
		beta	5.102739	4.779075	MLE
		MSE	0.5079	0.792	
		MAE	0.5909	0.9937	
3	1.1	alpha	3.000526	2.780664	MLE
		MSE	0.4552	1.0209	
		MAE	0.4957	0.9677	
		beta	1.066947	0.980093	MLE
		MSE	0.4245	0.9211	
		MAE	0.5421	0.8627	
3	3	alpha	2.9813	2.650296	MLE
		MSE	0.4727	0.8972	
		MAE	0.5144	0.9072	
		beta	2.959853	3.012912	MLE
		MSE	0.583	0.8394	
		MAE	0.5908	1.1697	
3	5	alpha	2.996388	2.949649	MLE
		MSE	0.4639	0.7633	
		MAE	0.5649	0.8603	
		beta	5.067301	5.162312	MLE
		MSE	0.5919	0.8399	
		MAE	0.5255	0.9141	

3. عند حجم عينة 150



جدول (4) نتائج طرائق تقدير توزيع لوماكس المعكوس المبتور لطريقتي التقدير (MLE, LSE,) عند حجم عينة 150

alpha	beta		MLE	LSE	best
0.5	1.1	alpha	0.490699	0.438203	MLE
		MSE	0.5521	1.1242	
		MAE	0.4354	0.8836	
		beta	1.002085	1.413921	MLE
		MSE	0.4248	0.831	
		MAE	0.4273	0.8256	
0.1	3	alpha	0.532522	0.259596	MLE
		MSE	0.4223	0.8489	
		MAE	0.4181	0.7877	
		beta	2.947096	2.99591	MLE
		MSE	0.4905	0.9744	
		MAE	0.5119	0.7957	
0.5	5	alpha	0.500018	0.571517	MLE
		MSE	0.4862	1.0118	
		MAE	0.5811	1.0425	
		beta	4.936724	4.841332	MLE
		MSE	0.4467	0.6765	
		MAE	0.5036	0.8244	
1.1	1.1	alpha	1.020276	1.227976	MLE
		MSE	0.4176	0.86	
		MAE	0.451	0.7183	
		beta	1.191971	1.051656	MLE
		MSE	0.4001	0.9465	
		MAE	0.4011	0.7466	
1.1	3	alpha	1.173615	1.109684	MLE
		MSE	0.5044	0.9925	
		MAE	0.4049	0.8251	
		beta	3.035838	2.997902	MLE
		MSE	0.4377	0.8311	
		MAE	0.4736	0.9986	
1.1	5	alpha	1.074511	1.129799	MLE
		MSE	0.4885	0.8691	
		MAE	0.5543	1.0832	
		beta	5.020593	4.934413	MLE
		MSE	0.4139	0.9456	
		MAE	0.5074	0.8584	
3	1.1	alpha	2.938211	2.886089	MLE
		MSE	0.5377	1.0859	



		MAE	0.4263	0.9624	MLE
		beta	1.051619	1.178587	
		MSE	0.5368	0.7886	
		MAE	0.5881	0.814	
3	3	alpha	2.974108	2.991773	MLE
		MSE	0.5806	0.894	
		MAE	0.4613	0.9459	
		beta	3.025045	2.907671	MLE
		MSE	0.4387	0.939	
		MAE	0.528	0.9711	
3	5	alpha	3.037248	3.159782	MLE
		MSE	0.5306	0.9448	
		MAE	0.5031	0.9816	
		beta	5.035374	4.892057	MLE
		MSE	0.5619	1.0077	
		MAE	0.4737	0.7592	

9. نتائج مقدرات دالة البقاء لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور

1- عند حجم عينة 50

جدول (5) مقدرات دالة البقاء لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور عند حجم عينة 50

α	β	t	Survival		
			true	MLE	LSE
0.5	1.1	1	0.7641	0.7450	0.7710
	1.1	1.5	0.5175	0.4916	0.5266
	1.1	2	0.3625	0.3388	0.3707
	1.1	2.5	0.2556	0.2363	0.2622
	1.1	3	0.1773	0.1626	0.1823
	1.1	3.5	0.1174	0.1070	0.1209
	3	1	0.8171	0.8042	0.8258
	3	1.5	0.5996	0.5799	0.6127
	3	2	0.4446	0.4251	0.4574
	3	2.5	0.3272	0.3103	0.3382
	3	3	0.2347	0.2211	0.2434
	3	3.5	0.1596	0.1496	0.1660
	5	1	0.8379	0.8455	0.8415
	5	1.5	0.6357	0.6481	0.6415
	5	2	0.4839	0.4970	0.4901
	5	2.5	0.3638	0.3758	0.3694
	5	3	0.2656	0.2756	0.2703



	5	3.5	0.1834	0.1910	0.1870
1.1	1.1	1	0.8036	0.8133	0.7873
	1.1	1.5	0.5726	0.5871	0.5484
	1.1	2	0.4137	0.4278	0.3904
	1.1	2.5	0.2979	0.3099	0.2782
	1.1	3	0.2098	0.2192	0.1944
	1.1	3.5	0.1405	0.1473	0.1294
	3	1	0.8682	0.8536	0.8787
	3	1.5	0.6825	0.6574	0.7014
	3	2	0.5304	0.5035	0.5514
	3	2.5	0.4041	0.3793	0.4239
	3	3	0.2976	0.2769	0.3145
	3	3.5	0.2067	0.1910	0.2198
	5	1	0.8917	0.8878	0.8521
	5	1.5	0.7282	0.7212	0.6587
	5	2	0.5844	0.5764	0.5078
	5	2.5	0.4575	0.4498	0.3853
	5	3	0.3449	0.3383	0.2834
	5	3.5	0.2445	0.2393	0.1968
3	1.1	1	0.9000	0.9034	0.8862
	1.1	1.5	0.7292	0.7360	0.7022
	1.1	2	0.5736	0.5817	0.5428
	1.1	2.5	0.4387	0.4466	0.4095
	1.1	3	0.3231	0.3299	0.2984
	1.1	3.5	0.2241	0.2293	0.2051
	3	1	0.9627	0.9583	0.9664
	3	1.5	0.8725	0.8617	0.8818
	3	2	0.7589	0.7440	0.7719
	3	2.5	0.6329	0.6164	0.6474
	3	3	0.5019	0.4861	0.5160
	3	3.5	0.3708	0.3574	0.3829
	5	1	0.9774	0.9768	0.9807
	5	1.5	0.9152	0.9137	0.9244
	5	2	0.8256	0.8236	0.8399
	5	2.5	0.7143	0.7121	0.7316
	5	3	0.5868	0.5848	0.6049
	5	3.5	0.4481	0.4465	0.4646

2. عند حجم عينة 100

جدول (6) مقدرات دوال البقاء والخطورة لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور عند حجم عينة 100

α	β	t
----------	---------	---



			Survival		
			true	MLE	LSE
0.5	1.1	1	0.7641	0.7627	0.7544
	1.1	1.5	0.5175	0.5155	0.5048
	1.1	2	0.3625	0.3607	0.3512
	1.1	2.5	0.2556	0.2542	0.2466
	1.1	3	0.1773	0.1762	0.1705
	1.1	3.5	0.1174	0.1166	0.1126
	3	1	0.8171	0.8203	0.8050
	3	1.5	0.5996	0.6046	0.5813
	3	2	0.4446	0.4498	0.4265
	3	2.5	0.3272	0.3318	0.3115
	3	3	0.2347	0.2384	0.2222
	3	3.5	0.1596	0.1624	0.1504
	5	1	0.8379	0.8319	0.8304
	5	1.5	0.6357	0.6260	0.6234
	5	2	0.4839	0.4739	0.4709
	5	2.5	0.3638	0.3549	0.3520
	5	3	0.2656	0.2583	0.2558
	5	3.5	0.1834	0.1779	0.1759
1.1	1.1	1	0.8036	0.8131	0.8216
	1.1	1.5	0.5726	0.5869	0.5996
	1.1	2	0.4137	0.4277	0.4400
	1.1	2.5	0.2979	0.3098	0.3203
	1.1	3	0.2098	0.2192	0.2274
	1.1	3.5	0.1405	0.1473	0.1533
	3	1	0.8682	0.8613	0.8536
	3	1.5	0.6825	0.6705	0.6578
	3	2	0.5304	0.5175	0.5042
	3	2.5	0.4041	0.3922	0.3802
	3	3	0.2976	0.2877	0.2778
	3	3.5	0.2067	0.1992	0.1918
	5	1	0.8917	0.8938	0.8795
	5	1.5	0.7282	0.7323	0.7058
	5	2	0.5844	0.5891	0.5589
	5	2.5	0.4575	0.4621	0.4329
	5	3	0.3449	0.3490	0.3236
	5	3.5	0.2445	0.2478	0.2277
3	1.1	1	0.9000	0.8974	0.8808
	1.1	1.5	0.7292	0.7240	0.6936
	1.1	2	0.5736	0.5677	0.5343
	1.1	2.5	0.4387	0.4331	0.4023



	1.1	3	0.3231	0.3183	0.2927
	1.1	3.5	0.2241	0.2204	0.2010
	3	1	0.9627	0.9617	0.9521
	3	1.5	0.8725	0.8698	0.8471
	3	2	0.7589	0.7551	0.7247
	3	2.5	0.6329	0.6285	0.5958
	3	3	0.5019	0.4976	0.4668
	3	3.5	0.3708	0.3671	0.3413
	5	1	0.9774	0.9776	0.9771
	5	1.5	0.9152	0.9159	0.9144
	5	2	0.8256	0.8268	0.8246
	5	2.5	0.7143	0.7157	0.7132
	5	3	0.5868	0.5884	0.5860
	5	3.5	0.4481	0.4497	0.4475

3. عند حجم عينة 150

جدول (7) مقدرات دوال البقاء والخطورة لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور عند حجم عينة 150

α	β	t	Survival		
			true	MLE	LSE
0.5	1.1	1	0.7641	0.7583	0.7735
	1.1	1.5	0.5175	0.5092	0.5315
	1.1	2	0.3625	0.3548	0.3761
	1.1	2.5	0.2556	0.2492	0.2672
	1.1	3	0.1773	0.1724	0.1864
	1.1	3.5	0.1174	0.1139	0.1240
	3	1	0.8171	0.8193	0.7936
	3	1.5	0.5996	0.6029	0.5644
	3	2	0.4446	0.4478	0.4101
	3	2.5	0.3272	0.3300	0.2974
	3	3	0.2347	0.2369	0.2110
	3	3.5	0.1596	0.1612	0.1422
	5	1	0.8379	0.8375	0.8439
	5	1.5	0.6357	0.6349	0.6452
	5	2	0.4839	0.4830	0.4937
	5	2.5	0.3638	0.3629	0.3726
	5	3	0.2656	0.2649	0.2728
	5	3.5	0.1834	0.1828	0.1888
1.1	1.1	1	0.8036	0.8107	0.8082
	1.1	1.5	0.5726	0.5834	0.5789



	1.1	2	0.4137	0.4244	0.4195
	1.1	2.5	0.2979	0.3071	0.3027
	1.1	3	0.2098	0.2171	0.2134
	1.1	3.5	0.1405	0.1458	0.1431
	3	1	0.8682	0.8744	0.8689
	3	1.5	0.6825	0.6932	0.6837
	3	2	0.5304	0.5421	0.5317
	3	2.5	0.4041	0.4149	0.4052
	3	3	0.2976	0.3067	0.2986
	3	3.5	0.2067	0.2137	0.2075
	5	1	0.8917	0.8898	0.8934
	5	1.5	0.7282	0.7249	0.7314
	5	2	0.5844	0.5807	0.5879
	5	2.5	0.4575	0.4539	0.4608
	5	3	0.3449	0.3418	0.3477
	5	3.5	0.2445	0.2421	0.2467
3	1.1	1	0.9000	0.8936	0.9015
	1.1	1.5	0.7292	0.7170	0.7326
	1.1	2	0.5736	0.5600	0.5779
	1.1	2.5	0.4387	0.4259	0.4431
	1.1	3	0.3231	0.3123	0.3270
	1.1	3.5	0.2241	0.2158	0.2271
	3	1	0.9627	0.9623	0.9613
	3	1.5	0.8725	0.8716	0.8686
	3	2	0.7589	0.7577	0.7533
	3	2.5	0.6329	0.6317	0.6264
	3	3	0.5019	0.5008	0.4955
	3	3.5	0.3708	0.3699	0.3652
	5	1	0.9774	0.9783	0.9801
	5	1.5	0.9152	0.9178	0.9227
	5	2	0.8256	0.8297	0.8370
	5	2.5	0.7143	0.7192	0.7279
	5	3	0.5868	0.5920	0.6009
	5	3.5	0.4481	0.4529	0.4608

10. مناقشة النتائج Discussion of results

نلاحظ من الجداول أعلاه عند حجوم العينات ($n = 50, 100, 150$) الاتي:

- 1- تبين من خلال جدول (3-2) أن طريقة المربعات الصغرى LSE تفوقت بشكل شبه مؤكد على طريقة الإمكان الأعظم كونها غير كفوءة في حجوم العينات الصغيرة من خلال قيمة معيار MSE ومعيار MAE لكل من α و β .



- 2- أظهرت النتائج في هذا المستوى تفوقاً واضحاً لطريقة الإمكان الأعظم (MLE) ، إذ سجلت أقل قيمة سواءً في معيار MSE أو MAE لكلا المعلمتين. مما يشير إلى أن أداء MLE يتحسن مع زيادة حجم العينة، مما يعكس خواصها النظرية في الكفاءة المتسقة (asymptotic efficiency).
- 3- طريقة MLE تفوقت بشكل مؤكد، إذ حافظت على أفضلية مطلقة في جميع معايير المقارنة (MAE و MSE) لكل من α و β . طريقة الإمكان الأعظم MLE أثبتت كفاءتها العالية، حيث أصبحت التقديرات قريبة جداً من القيم الحقيقية لكلا الدالتين في جميع النقاط الزمنية.
- 4- تؤكد مقارنة دالة البقاء بالنسبة لطريقته التقدير MLE توفر تمثيلاً أكثر دقة واقتراباً من القيم الحقيقية، لا سيما عند (n = 100,150)

11.الاستنتاجات Conclusions

- تشير النتائج إلى أن طريقة المربعات الصغرى (LSE) تُعدّ الأنسب لتقدير المعلمات في العينات الصغيرة عند حجم العينة (n=50)، حيث قدّمت تقديرات دقيقة وأقل متوسط مربعات خطأ (MSE) مقارنةً بطرائق (MLE) في حالات عديدة.
- أظهرت النتائج أن طريقة الإمكان الأعظم (MLE) عند حجم العينة (n = 100) أداءً متفوقاً، حيث تسجل أقل قيم لمتوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط الخطأ المطلق (MAE) لكلا المعلمتين α و β ، مقارنةً بطرائق المربعات الصغرى (LSE) والمربعات الصغرى الموزونة (WLSE). هذا الأداء المتفوق يعكس الخصائص النظرية لطريقة MLE ، مثل الكفاءة المتسقة (asymptotic efficiency) ، التي تجعلها أكثر دقة واستقراراً مع زيادة حجم العينة.
- نستنتج عند حجم العينة (n = 150) ، ان طريقة الإمكان الأعظم (MLE) أكثر استقراراً مع زيادة حجم العينة خاصةً في الحالات التي تتطلب دقة عالية في التقدير مقارنةً بطريقة المربعات الصغرى (LSE) ، حيث سجّلت (MLE) أقل قيم لمتوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط الخطأ المطلق (MAE) لكلا المعلمتين α و β ، مما يعكس كفاءتها العالية في التقدير.

12.المصادر

- 1- Ali Mirsephai a,1 , Morteza Mohammadzaheri b,*, Lei Chen b,2 , Brian O'Neill a,3, An artificial intelligence approach to inverse heat transfer modeling of anirradiative dryer, A. Mirsephai et al. / International Communications in Heat and Mass Transfer 39 (2012) 40–45
- 2- Jinan Abdul Ameer Abbas, Assessment of land sensitivity to desertification for Al Mussaib project using MEDALUS approach,2021, Caspian Journal of Environmental Sciences, Vol. 20 No. 1 pp. 177-196
- 3- Philippe FELDMANN et Nicolas BARRÉ, CARTOGRAPHIE DES ORCHIDÉES SAUVAGES DU DEPARTEMENT DE LA GUADELOUPE, Technical Report · December 1997 DOI: 10.13140/RG.2.1.4584.1762
- 4- Kang, G. and James, J., Service Quality Dimensions: An Examination of Gronroos's Service Quality Model. Managing,2004, <https://doi.org/10.1108/09604520410546806>.
- 5- Arjun Doke, DELINEATION OF THE GROUNDWATER POTENTIAL USING REMOTE SENSING AND GIS: A CASE STUDY OF ULHAS BASIN,MAHARASHTRA, INDI, Archives of Photogrammetry, Cartography



and Remote Sensing, vol. 31, pp. 49-64, ISSN 2083-2214, eISSN 2391-9477, DOI: <http://doi.org/10.2478/apcrs-2019-0004>.

6- Sinha, S.K. and Kale, B.K. (1986), "Life Testing and Reliability Estimation", Wiley Eastern Limited.

7- R. A. R. Bantan, M. Elgarhy, C. Chesneau and F. Jamal, "Estimation of entropy for inverse Lomax distribution under multiple censored data," Entropy, vol. 22, no. 6, pp. 601, 2020.

8- Yadav, A.S., Shukla, S. and Kumari, A., 2019. Statistical inference for truncated inverse Lomax distribution and its application to survival data. Annals of Data Science, to appear, DOI: 10.1007/s40745-019-00235-2.

9- Lee, E. T., and Wang, J. W. , (2003) , " Statistical Methods for Survival Data Analysis", 3rd ed. Wiley, New York Collett, D, (2003). Modeling survival data in medical research, Chapman and Hall, London.

10- Kumar D, Yadav AS, Singh SK, Singh U, Chauhan PK (2017) Transmuted inverse Lomax distribution. J Adv Comput (in press) Dey S, Raheem E, Mukherjee S (2017c) Statistical properties and different methods of estimation of transmuted Rayleigh distribution. Rev Colomb Estad 40(1):165–203.

11- Kumphon, D. and Gupta, R.d., (2011), An Extension of the Generalized Exponential Distribution, statistical methodology, vol.8, no.4, pp 695-496.

12- الصفراوي صفاء يونس وطه عمار حازم (2005) "بعض طرائق المقدرات التقليدية ومقدر بيز لمعلمات نموذج الانحدار الخطي العام". رسالة ماجستير، كلية علوم الحاسبات والرياضيات – جامعة الموصل

13- لازم. جاسم حسن (2017) "مقارنة طرائق بيز مع طرائق أخرى لتقدير معلمة القياس لتوزيع ويبيل باستخدام المحاكاة" الكلية التقنية الإدارية جامعة بغداد.

Abstract

This study aims to investigate the Truncated Inverse Lomax Distribution and estimate its associated survival function using two statistical methods: Maximum Likelihood Estimation (MLE) and Least Squares Estimation (LSE). The distribution is classified as heavy-tailed and is known for its flexibility in modeling positively skewed data within a bounded interval, making it particularly suitable for survival data analysis. A simulation study was conducted using different sample sizes (50, 100, and 150) to evaluate the performance of both estimation methods based on the Mean Squared Error (MSE) and the Mean Absolute Error (MAE) criteria. The results indicated that the LSE method was more efficient for small sample sizes, while the MLE method outperformed LSE in larger samples, reflecting the theoretical properties of each approach. These findings highlight the importance of selecting the appropriate estimation method based on the sample size and data characteristics.

