Warith Scientific Journal

استعمال بعض الطرائق الاحصائية لتقدير معلمات المعادلات التفاضلية الاعتيادية مع تطبيق عملي

The use of some statistical methods for estimating the parameters of ordinary differential equations with practical application

إسراء صمد دويح الصافي
Israa Samad Dwayyeh Al-Safi
albnfsjz587@gmail.com
جامعة كربلاء
University of Karbala

ا.م.د.مشتاق كريم عبد الرحيم
Ass.Prof.Dr.Mushtaq kareem Abd Al- Rahem
albnfsjz587@gmail.com
جامعة كربلاء
University of Karbala

المستخلص.
تستخدم نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية (Ordinary Differential Equations) (ODE) على نطاق واسع لنمذجة العمليات الديناميكية في العديد من المجالات العلمية، ولكنها عادة ما تعتمد على المعلمات التي تكون ذات أهمية حاسمة وتحتاج إلى تقديرها مباشرة من البيانات، وتعد عملية تقدير المعلمات عادة مشكلة صعبة خاصة في نماذج المعادلات اللاخطية. وفي هذه البحث تم استخدام طريقة المربعات الصغرى غير الخطية (Non Linear Least Squares) (NLS) والتي تعتبر الاكثر شيوعا في تقدير معلمات المعادلات التفاضلية الاعتيادية ومقارنتها بمقدرات طريقة تعظيم التوزيع البعدي اللاحق (Maximum A Posterior) (MAP) وباستعمال انموذجين من نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية وهي كل من (انموذج Malthus والانموذج اللوجستي) وبتوظيف اسلوب محاكاة مونتي كارلو باستعمال خمس حجوم عينات مختلفة (10، 25، 50، 100، 250) وباستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) وقد تبين أن الانموذج اللوجستي يعتبر أكثر ملائمة لهذه السلسلة من البيانات وبالتالي يمكن الاعتماد على نتائج تنبؤاته التي تكون أكثر دقة مقارنة بأنموذج Malthus .
ومن ثم تم اجراء تطبيق عملي لبيانات حقيقية متمثلة بعدد سكان العراق للفترة (1985-2018) لغرض بيان الانموذج الافضل في تمثيل هذه البيانات وباستخدام فضلى الطرائق من الجانب التجريبي حيث وجد البحث أن عدد سكان العراق سيبلغ بحدود 55 مليونا بحلول عام 2040 بناءا على التنبؤ باستعمال الانموذج اللوجستي.
الكلمات المفتاحية : نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية ,العمليات الديناميكية ,المجالات العلمية.

Abstract
Ordinary differential equations (ODE) models are widely used to model dynamic processes in many scientific fields, but they usually depend on parameters that are of critical importance in terms of dynamics and need to be estimated directly from the data. Nonlinear Equation Models. In this thesis, the method of non-linear least squares (NLS) was used, which is considered the most common in estimating the parameters of ordinary differential equations and comparing them with the capabilities of the method of maximmum a posterior (MAP) using two models of ordinary differential equations. They are both (Malthus model and logistic model) and by employing the Monte Carlo simulation method using five different sample sizes and using the mean square error (MSE) standard, the results concluded that the nonlinear least squares method was more appropriate in estimating the parameters of these models.
And then a practical application was made of real data represented by the number of Iraq's population for the period (1985-2018) for the purpose of showing the best model in representing these data and using the best methods from the experimental side. His predictions, which are more accurate compared to the Malthus model, where the message found that the population of Iraq will reach 55 million by 2040.
Keywords: Ordinary differential equation models, dynamic processes, scientific fields.

1-المقدمة

إنَ المعادلات التفاضلية (Differential Equations) ضرورية لفهم كثير من المسائل الفيزيائية والرياضية المهمة و لقد ادرك ذلك اسحاق نيوتن في القرن السابع عشر اذ استخدم المعادلات التفاضلية في دراسته لحركة الجسيمات والاجرام السماوية وتعتبر المعادلات التفاضلية من المواضيع المهمَة في الرياضيات البحتة والتطبيقية وهي الرابط بين العلوم الرياضية والهندسية والفيزيائية وغيرها، فلا تخلو مواضيع الهندسة الكهربائية والميكانيكية والإنشائية من انواع المعادلات التفاضلية .

يتم التركيز في هذا البحث على الطرائق الإحصـــائية لتقدير المعلمات في نماذج معادلات تفاضــلية عادية غير خطية (NODE) للعثور على أفضل الطرائق التي تناسب هذه النماذج. تم تقسيم البحث إلى أربع فصول، حيث تضمن الفصل الأول منهجية البحث مع المقدمة والمشكلة والهدف ومراجعة بعض البحوث والدراسات ذات الصلة. يتناول الفصل الثاني

المفاهيم الأساسية ووصفًا للمعادلات التفاضلية العادية (ODE) وطرق تصنيفها، مع عرض لنماذج NODE وطرائق تقدير معلماتها، مثل الطريقة غير الخطية لأصغر المربعات (NLS) وطريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق (MAP). يحتوي الفصل الثالث على دراسة محاكاة لطرق التقدير والنماذج المعروضة في الفصل الثاني، باستخدام طريقة محاكاة مونتي كارلو لتحديد الطريقة الأفضل باستخدام متوسط مربعات الخطأ (MSE) لحجوم عينات مختلفة. يتناول الفصل الرابع الاستنتاجات والتوصيات التي توصلت إليها الدراسة. تم تنفيذ التجارب باستخدام برنامج Mathematica 12.2.

2- منهجية البحث

2-1هدف البحث

- التعرف على الطرق الإحصائية لتقدير معلمات نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية (NODE).
- دراسة حالة خاصة وهي مسألة القيمة الأولية (IV) باستخدام طريقة المربعات الصغرى اللاخطية (NLS) وطريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق (MAP).
- المقارنة بين الطرق المذكورة باستخدام معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE).
- تقديم ومقارنة نماذج Malthus واللوجستي للتحليل.
- تطبيق النماذج على بيانات السكان في العراق للفترة (1985-2018) باستخدام الطريقة الأفضل التي تم اختيارها في التجربة.

2-2 مشكلة البحث

عند دراسة اي ظاهرة فان المشكلة الرئيسية تكمن في كيفية اتخاذ القرارات لحل هذه المشكلة عن طريق اعتماد التحليل و الانموذج المناسب. وعند استعمال نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية (ODE) لنمذجة العمليات الديناميكية في العديد من الظواهر تبرز لنا عادة مشكلة صعبة خاصة في نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية اللاخطية (Non Linear Equations Ordinary Differential) (NODE) وهي مشكلة تقدير المعلمات التي تعتبر الاساس الذي قامت من اجله هذه الدراسة .

وتعتبر ظاهرة النمو السكاني في أي بلد من الظواهر المهمة التي تبنى عليها السياسات ورسم الخطط وايجاد الحلول للمشاكل المستقبلية ولذلك اخذنا على عاتقنا دراسة عملية النمو السكاني في العراق للفترة (1985-2018) وايجاد افضل أنموذج يصف هذه العملية وكذلك أفضل طريقة لتقدير معلمات هذا الانموذج.

2-3 تمهيد:-

يرجع الفضل للنجاح الذي حققته البشرية في العصر الحديث الى الاستخدام الواسع للرياضيات في مختلف العلوم التطبيقية وبالتأكيد فإن المعادلات التفاضلية تلعب دور مهم في ذلك فبواسطة هذه المعادلات نستطيع التعبير عن التغيرات التي تحدث لأحد الأنظمة مع مرور الزمن سواء كان هذا النظام يضم متغير واحد او مجموعة من المتغيرات وقد كانت بداية استخدام المعادلات التفاضلية في العلوم الطبيعية وذلك لان قوانين الفيزياء والكيمياء تكون عادة مرتبطة بعدد محدود من المتغيرات المعروفة ومع مرور الزمن اتسع نطاق استخدام المعادلات التفاضلية ليشمل علوم اخرى مثل علم الحياة وعلم الاقتصاد والهندسة بفروعها المختلفة ولهذا تعتبر المعادلات التفاضلية من اهم العلوم الرياضية التي لا غنى عنها في مختلف العلوم التطبيقية وذلك لان الظواهر الطبيعية تتوقف على عدد متنوع من العوامل والمؤثرات الطبيعية التي تؤثر على الظاهرة، وعند بناء انموذج رياضي لظاهرة طبيعية يجب:

أولا: تحديد العوامل التي لها تأثير واضح على النظام وإهمال العوامل التي لها تأثير قليل جدا او غير واضح او غير مؤكد على النظام.

ثانيا: التعبير رياضيا عن العلاقات بين العوامل المرتبطة بالنظام ومتغيراتها المتناهية في الصغر ويؤدي ذلك الى تكوين معادلة تفاضلية أو عدة معادلات تفاضلية.

ثالثا: ايجاد الحل الرياضي للمعادلة التفاضلية أو مجموعة المعادلات التفاضلية الذي يحقق الشروط الابتدائية.

رابعا: يجب عمل المقارنة بين النتائج التي حصلنا عليها وبين النتائج الحقيقية المشاهدة التي بين ايدينا فاذا اتفقت فان الانموذج الرياضي التي تم بناءه يعتبر نموذج ناجح وغير ذلك يعتبر نموذج غير صحيح.

في هذا الفصل سيتم التطرق الى نبذة المعادلات التفاضلية و انواعها والتي هي في الواقع تعتبر نماذج رياضية لعدد من الظواهر الطبيعية ، مع التركيز على المعادلات التفاضلية الاعتيادية (Ordinary Differential Equation) ودراسة بعض انواعها لا سيما مشكلة القيمة الأولية وتحويلها الى انموذج انحدار، فضلاً عن توضيح الصيغ المعتمدة في تحديد التقديرات لمعلمات تلك المعادلات، وسيتم التطرق ايضاً الى بعض النماذج الخاصة وتقدير معلماتها كأنموذج (Malthus) والانموذج اللوجستي (Logistic).

3- المعادلة التفاضلية:-(Differential Equation) [12][1][8]

هي علاقة بين المتغير التابع والمتغير (المتغيرات) المستقل (المستقلة) تدخل فيها المشتقات أو التفاضلات وتسمى المعادلة التفاضلية عادية (Ordinary) اذا كان المتغير التابع دالة في متغير مستقل واحد وبالتالي لا تحتوي الا على مشتقات عادية. وتنقسم المعادلات التفاضلية الى قسمين:

1- المعادلة التفاضلية الاعتيادية (Ordinary Differential Equation).
2- المعادلة التفاضلية الجزئية (Partial Differential Equation).

1-3المعادلة التفاضلية الاعتيادية (Ordinary Differential Equation) (O.D.E)
هي معادلة تحتوي على مشتقات أو تفاضليات دالة مجهولة أوعدة دوال مجهولة تعتمد على متغيرمستقل واحد.
مثال:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} - y = 3x^2$$

حيث ان:
y يمثل المتغير التابع
x يمثل المتغير المستقل

2-3 المعادلة التفاضلية الجزئية (Partial Differential Equation) (P.D.E)
هي معادلة رياضـية تحتوي على دالة مجهولة $unknown\ function$ لأكثر من متغير مسـتقل واحد مع المشـتقات الجزئية بالنسبة للمتغيرات المستقلة.
مثال:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

حيث ان:
u : يمثل المتغير التابع
x, y, z : تمثل المتغيرات المستقلة

4-صنيف المعادلة التفاضلية (Classification of Differential Equation) [8][7][1]
لتصنيف المعادلة التفاضلية يتم استخدام مفهوم رتبة المعادلة التفاضلية ودرجة المعادلة التفاضلية:
1- **رتبة المعادلة التفاضلية (Order) :** هي أعلى مشتقة أو (معامل تفاضلي) للمتغير المستقل في المعادلة التفاضلية.
2- **درجة المعادلة التفاضلية (Degree):** هي الدرجة الجبرية (الأس) للمشتقة ذات اعلى رتبة تظهر في المعادلة على ان تكون جميع المعاملات التفاضلية خالية من القوى الكسرية.
امثلة:

$$y''' - \mathrm{Sin}(x)\, y'' + 3y = 0$$

تمثل معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة ومن الدرجة الاولى.

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} - (\mathrm{Cos}x)y + 3y^2 = 0$$

تمثل معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى ومن الدرجة الاولى

1-4المعادلة التفاضلية الخطية (Linear differential equation) [1]
هي المعادلة التفاضـلية التي يكون فيها المتغير المعتمد وجميع مشـتقاته من الدرجة الأولى وغير مضـروبة ببعضـها. وفيما عدا ذالك تسـمى المعادلة التفاضـلية غير خطية. او هي المعادلة الخطية في المتغير التابع وجميع مشـتقاته أي ان كل من المتغير التابع ومشتقاته مرفوعة للأس واحد ولا توجد حواصل ضرب مشتركة فيما بينها.
ان الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية ذات الرتبة n تكتب بالشكل الآتي:

$$P_0 y^n + P_1 y^{n-1} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n y = Q(x) \qquad (1-2)$$

إذا كانت الدالة $Q(x)$ تساوي صفر فإن المعادلة تكون متجانسة (Homogeneous) . أما اذا كانت الدالة$Q(x)$ لاتساوي صفر فان المعادلة تكون غير متجانسة (Non-Homogeneous)
واذا كانت $P_0, P_1, \dots, P_n$ جميعها ثوابت فأن المعادلة $(2-1)$ تسـمى معادلة تفاضـلية اعتيادية ذات معاملات ثابتة اما اذا كان على الاقل احد هذه المعاملات متغير فتسمى المعادلة $(2-1)$ معادلة تفاضلية اعتيادية ذات معاملات متغيرة.
ومن الجدير بالذكر بأن اللا خطية لا تؤثر على رتبة المعادلة التفاضلية.

2-4حل المعادلة التفاضلية (Solve the differential equation) [8]
تسمى الدالة $y = y(x)$ حلا للمعادلة التفاضلية $F[x, y, y', y'', \dots \dots, y^n] = 0$ اذا كانت:
1- قابلة للأشتقاق n من المرات.
2- تحقق المعادلة التفاضلية، أي : $F[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots \dots, y^n(x)] = 0$
حيث ان F دالة معرفة على الفترة (a,b)
مثال :
الدالة $y(x) = c\ Sinx$ تحقق المعادلة التفاضلية $y'' + y\ = 0$ حيث c ثابت.
وذلك لأن:

$$y(x) = c\ (sin\ x)$$
$$y'(x) = c\ (cos\ x)$$
$$y''(x) = -c\ (sin\ x)$$

وبالتالي فإن

$$y''(x) + y(x) = -c(\sin x) + c(\sin x) = 0$$

4-3الحل العام للمعادلة التفاضلية (General solution) من الرتبة n:

هو حل للمعادلة التفاضلية ويحتوي على عدد من الثوابت الاختيارية بقدر رتبة المعادلة التفاضلية أو هو حل يحقق المعادلة التفاضلية ويجب أن يحتوي على عدد n من الثوابت الاختارية ويأخذ الصورة.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots . + c_n y_n$$

حيث $c_1, c_2, \ldots ., c_n$هي مجموعة n من الثوابت الاختيارية و $y_1, y_2, \ldots ., y_n$ هي n من الدوال المختلفة (المستقلة خطيا) والتي تحقق المعادلة التفاضلية.

4-4 لحل الخاص (Particular solution) للمعادلة التفاضلية :

هو حل للمعادلة التفاضلية خاليا من الثوابت الاختيارية و يمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار خاص للثوابت الاختيارية.

4-5الحل الشاذ (المنفرد) (Singular solution))للمعادلة التفاضلية :

هو حل يحقق المعادلة التفاضلية ولايمكن ان يستنتج من الحل العام وذلك بإعطاء الثوابت قيم اختيارية.

4-6 المعادلات التفاضلية الاعتيادية [12] Ordinary Differential Equations

كما تم الاشارة اليها سابقا فان المعادلة التفاضلية الاعتيادية عبارة عن تعبير رياضي يربط متغير مستقل واحد مع مشتقاته. او هي المعادلة التفاضلية التي تحتوي على متغيرين فقط احداهما متغير معتمد والاخرمتغير مستقل. وبشكل عام تكتب المعادلة التفاضلية الاعتيادية بالصورة الاتية:

$$f\left(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (2-2)$$

حيث ان :

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots, \qquad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

تنشأ المعادلات التفاضلية الاعتيادية (ODE) في كثير من الحالات عند استخدام تقنيات النمذجة الرياضية لوصف الظواهر في العلوم ، الهندسة ، والاقتصاد ، وما إلى ذلك. في معظم الحالات يكون الانموذج معقدًا للغاية بحيث لا يمكن إيجاد حل دقيق أو حتى حل تقريبي باليد وبذلك نضطر لاستعمال طرق حاسوبية فعالة وموثوقة.

قطع باحثوا الاحصاء والرياضيات شوطا كبيرا في تصنيف مشاكل (ODE) فيما يتعلق بالظروف الإضافية أو الجانبية المرتبطة بها.

4-7 المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الاولى Ordinary Differential Equations Of First Order

المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى تأخذ الشكل $y' = f(x, y)$ او $f(x, y, y') = 0$

والحل العام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الاولى هو ايجاد دالة تربط بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y وتحتوي على ثابت واحد وتحقق المعادلة التفاضلية.

1-المعادلة التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الاولى قابلة لفصل المتغيرين Ordinary Differential Equation Separable Of First Order

في العديد من الحالات يمكن وضع المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ على الشكل :

$$g(y)\frac{dy}{dx} + h(x) = 0$$

أو ما يكافئ ذلك

$$g(y)dy + h(x)dx = 0 \qquad (3-2)$$

وهنا يقال أن المعادلة (2-3) هي معادلة تفاضلية عادية قابلة لفصل المتغيرين أو معادلة قابلة للفصل (Separable Equation) وذلك لأنه يمكن فصل المتغيرx عن المتغير y تماما وبمعنى اخر يتم فصل المتغيرين اذا كان معامل تفاضل x دالة من x فقط ومعامل y دالة من y فقط.

وبأخذ التكامل للطرفين نحصل على :

$$\int g(y)\,dy + \int h(x)\,dx = A \qquad (4-2)$$

حيث أن A ثابت اختياري .

وباجراء التكامل للطرفين ينتج:

$$G(y) + G(x) = A$$

بذلك يتم الحصول على الحل العام للمعادلة التفاضلية.

5-مسألة القيمة الابتدائية (Initial Value Problem) (I.V): [12][13]

عند دراسة المعادلات التفاضلية تصادفنا في معظم الاحيان مسائل تشمل معادلة تفاضلية مصحوبة بشروط معينة، ويراد منا ان نجد الحل الذي يحقق المعادلة التفاضلية ويحقق الشروط المعطاة (المطلوب ايجاد الحل الخاص). اذا كانت الشروط المعطاة مقيدة بقيمة واحدة للمتغير المستقل فان تللك المسالة تسمى مسالة القيم الابتدائية. اما اذا كانت الشروط المعطاة لاكثر من قيمة واحدة للمتغير المستقل فان تلك المسالة تسمى مسالة القيم الحدودية.

ان الشكل العام لمسألة القيمة الابتدائية يكتب كالاتي:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & 0 \le t \le b \\ y(0) = \mathrm{c} \ \ (given) & \end{cases} \qquad (5-2)$$

حيث ان f و y عبارة عن متجهات ل m من المكونات وان y=y(t) وكذلك فان f بشكل عام دالة غير خطية من y و t.

عندما f لا يعتمد على t فان الصيغة تسمى حالة مستقلة (Independent case).

في الصيغة (2-5) نفترض ولتبسيط التدوين أن نقطة البداية لـ t تساوي 0. امتدادًا لفترة تكامل عشوائية [a ،b] لكل شيء الذي يلي يتم الحصول عليه دون صعوبة.

على سبيل المثال لنفترض أن لدينا الدالة التالية:

$$f(x) = 3x^2 - 4x$$

يتم حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$$

باستعمال التكامل

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x \quad \rightarrow y = \int (3x^2 - 4x)dx$$

$$y = x^3 - 2x^2 + c \qquad (6-2)$$

لأن الحل ينطوي على ثابت وجميع الحلول للمعادلة يمكن الحصول عليها منه، لذلك يتم تسمية هذا الحل بالحل العام. من جانب اخر اذا اردنا الحصول على الحل الذي يمر بالنقطة (1,4) فيجب علينا ايجاد الحل عند الشرط الأولي $y(1)=4$ ، فبالعودة للمعادلة (2-6) نجد:

$$y(1) = 1^3 - 2(1)^2 + c = 4$$

وبحل المعادلة اعلاه نجد أن قيمة الثابت $c = 5$ وكالاتي:

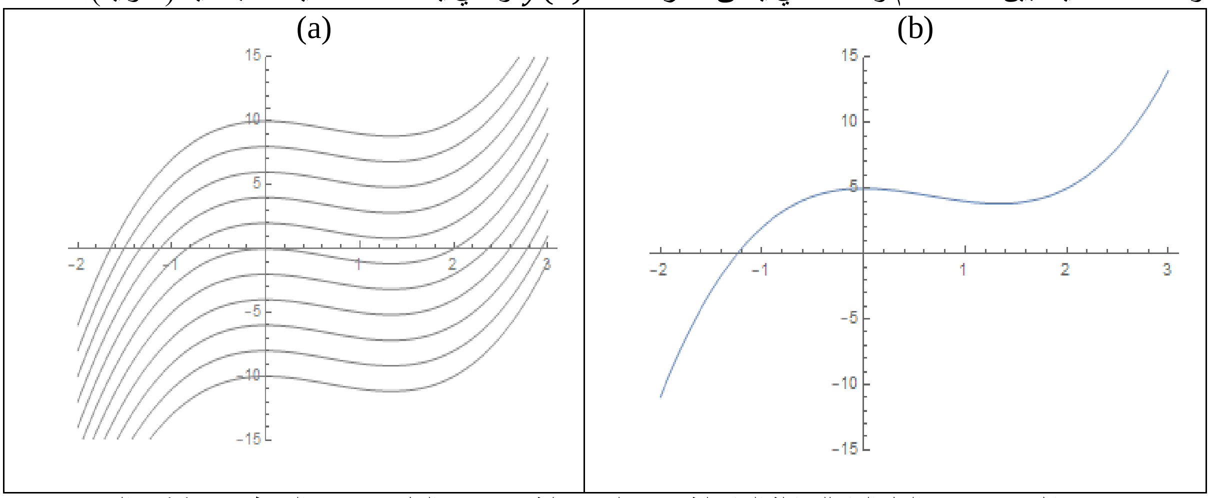
$$1 - 2 + c = 4 \rightarrow c = 4 + 1 = 5$$

وبالتالي فان حل المعادلة، $y = x^3 - 2x^2 + c$ والذي يمثل احد حلول المعادلة بحيث يحقق الشرط $y(1)=4$ هو: $y = x^3 - 2x^2 + 5$

وبذلك يمكن اعادة صياغة مسألة القيمة الابتدائية للمعادلة (2-5) والتي تحقق الشرط $y(1)=4$ كالاتي:

$$\begin{cases} y' = 3x^2 - 4x \\ y(1) = 4 \end{cases} \qquad (7-2)$$

والاشكال التالية تبين الحل العام والحل الذي يحقق الشرط $y(1)=4$ والذي يمثل مسألة القيمة الابتدائية (الاولية).



شكل (2-1): (a) الحل العام للمعادلة التفاضلية (2-6) لقيم مختلفة من c، (b)الحل عند تحقق الشرط $y(1) = 4$. المصدر [12]

يمكن حل العديد من المشاكل المهمة التي تنطوي على عدد السكان من خلال استخدام المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى. وتشمل المشاكل هذه تحديد عدد من الخلايا في احد انواع البكتيريا، عدد المواطنين في بلد معين..الخ. وسنركز في دراستنا هنا على حل مسألة النمو السكاني.

6-انموذج Malthus [12]

لنفترض أن المعدل الذي يتغير فيه عدد الســكان (مجتمع معين) حجمه $y(t)$ في الزمن t يتناســب مع حجم المجتمع $y(t)$،في الزمن t . رياضيا يتم تمثيل هذا البيان كمسألة القيمة الأولية الوارد ذكرها في المعادلة (2-5) ..

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad (8-2)$$

حيث أن y_0 هي الحجم الأولي (الابتدائي) للمجتمع.

1- اذا كانت $k > 0$ فان حجم المجتمع في تزايد وعندها يطلق عليه انموذج نمو (growth).

2- اذا كانت $k < 0$ فان حجم المجتمع في تناقص وعندها يطلق عليه انموذج اضمحلال او تحلل (decay).

وفي هذه الدراسة سنقتصر على الحالة الاولى التي يكون فيها $k > 0$ والتي تكون تطبيقاتها في الجوانب الحيوية.

وتجدر الاشــارة هنا الى ان الانموذج في المعادلة (2-8) عرف بهذا الاســم نسـبة الى الاقتصــادي ورجل الدين الانكليزي (Thomas R. Malthus) ويطلق عليه في بعض الاحيان اسم (أنموذج النمو الاسي).

يتم حل أنموذج Malthus (انموذج النمو الاســي) لجميع قيم k و y_0 التي تمكننا من الرجوع إلى الحل في مشــاكل أخرى دون حل المعادلة التفاضلية مرة أخرى.

ويتم ايجاد الحل من خلال تطبيق طريقة فصل المتغيرين وكما يلي:

باعادة صياغة الصيغة :

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad (9-2)$$

بالشكل:

$$\frac{dy}{y} = k\,dt \qquad (10-2)$$

وكما نلاحظ أن هذه الصيغة عبارة عن معادلة تفاضلية منفصلة المتغيرين.

باجراء عملية التكامل للطرفين :

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt \qquad (11-2)$$

$$\ln|y| = kt + C_1 \qquad (12-2)$$

$$y = C\,e^{kt} \qquad (13-2)$$

حيث ان $C = e^{C_1}$.

والذي يمثل الحل العام لانموذج Malthus.

ويمكن الحصول على الحل اعلاه مباشرة باستعمال دالة DSolve في برنامج Mathematica

وبما ان y يمثل عدد السكان فأن $y \geq 0$ وبالتالي فان $|y| = y$.

ولايجاد قيمة C نقوم بتطبيق الشرط الاولي لنحصل على:

$$\mathrm{y}(0) = y_0 = C\,e^{k*0} = C \qquad (14-2)$$

وبالتالي فأن الحل لمشكلة القيمة الاولية في المعادلة (2-8) هو:

$$y = y_0\,e^{kt} \qquad (2-15)$$

7-المعادلة اللوجستية (The Logistic Equation)[12][29][30]

المعادلة اللوجستية او (معادلة Verhulst), والتي تكون بالشكل التالي:

$$\frac{dy}{dt} = \big(r - ay(t)\big)y(t) \qquad (2-16)$$

حيث r و a ثوابت

تم التطرق هذه المعادلة لأول مرة من قبل عالم الرياضيات البلجيكي (Pierre Verhulst) لدراسـة النمو السكاني وتختلف المعادلة اللوجستية عن انموذج Malthus في ان $r - ay(t)$ ليست ثابتة.

ويمكن اعادة كتابة المعادلة اللوجستية بالشكل:

$$\frac{dy}{dt} = (r - ay)y = ry - ay^2 \qquad (17-2)$$

حيث ($-y^2$) يمثل عامل محدد.

في ظل هذه الافتراضــات او الشــروط، فانه لا يمكن للســكان النمو او الاضــمحلال خارج نطاق الســيطرة كما في انموذج Malthus .

ISSN: 2618-0278 Vol. 7No. 22 June 2025

والمعادلة اللوجستية قابلة للفصل وبالتالي يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات.وان حل هذه المعادلة مقترن بالشرط $y(0) = y_0$ وكما يلي:

$$\frac{1}{(r-ay)y}dy = dt \qquad (18-2)$$

$$\left(\frac{a}{r(r-ay)} + \frac{1}{r\,y}\right)dy = dt \qquad (19-2)$$

$$\frac{1}{r}\left(a\frac{1}{(r-ay)} + \frac{1}{y}\right)dy = dt \qquad (20-2)$$

$$\left(a\frac{1}{(r-ay)} + \frac{1}{y}\right)dy = rdt \qquad (21-2)$$

باخذ التكامل للطرفين:

$$\int (a\frac{1}{(r-ay)} + \frac{1}{y})dy = \int rdt \qquad (22-2)$$

وباجراء التكامل ينتج:

$$-\ln|r-ay| + \ln|y| = rt + C \qquad (23-2)$$

بتبسيط المعادلة وتوحيد ln كعامل مشترك:

$$\ln\left|\frac{y}{(r-ay)}\right| = rt + C \qquad (24-2)$$

$$\frac{y}{(r-ay)} = \pm e^{rt+C} = K\,e^{rt} \qquad (25-2)$$

حيث ان: $\pm e^{C} = K$

ويتم حل المعادلة اعلاه بالنسبة الى y وكما يلي:

$$y = e^{rt}k(r-ay) \qquad (26-2)$$

$$y = e^{rt}kr - ae^{rt}ky \qquad (27-2)$$

$$y + ae^{rt}ky = e^{rt}kr \qquad (28-2)$$

$$y(1+ae^{rt}k) = e^{rt}kr \qquad (29-2)$$

بقسمة الطرفين على $(1+ae^{rt}k)$

$$y = \frac{e^{rt}kr}{(1+ae^{rt}k)} \qquad (30-2)$$

والذي يمثل الحل العام للمعادلة اللوجستية.

ويمكن الحصول على الحل اعلاه مباشرة باستعمال دالة DSolve في برنامج Mathematica

ولايجاد قيمة K نقوم بتطبيق الشرط الاولي $y(0) = y_0$ في معادلة الحل العام:

$$y(0) = y_0 = \frac{e^{r*0}kr}{(1+ae^{r*0}k)} \qquad (31-2)$$

$$y_0 = \frac{kr}{1+ak} \qquad (32-2)$$

$$y_0(1+ak) = kr \rightarrow \quad kr - kay_0 = y_0$$

$$k(r - y_0 a) = y_0$$

$$K = \frac{y_0}{(r-ay_0)}$$

وبتعويض قيمة K في معادلة الحل العام (30-2) وتبسيط الحل نحصل على :

$$y = \frac{ry_0}{ay_0 + (r-ay_0)e^{-rt}} \qquad (33-2)$$

يلاحظ أنه إذا كان $r > 0$، فإن $lim_{t\to\infty}y(t) = \frac{r}{a}$ لأن $lim_{t\to\infty}e^{-rt} = 0$

وهذا ما يجعل حل المعادلة اللوجستية مختلفا عن حل انموذج Malthus،حيث ان حلول المعادلات اللوجستية هي قريبة من حدود غير صفرية محدودة عند $t \to \infty$ في حين ان نتائج انموذج Malthus إما قريبة من اللانهاية أو قريبة من الصفر عند $t \to \infty$.

ISSN: 2618-0278 Vol. 7No. 22 June 2025

8-تقدير المعلمات (Parameter Estimation)

من اجل تطبيق نماذج المعادلات التفاضـــلية نحن بحاجة لمعرفة المعلمات النموذجية. و يمكن بســـهولة تحديد قيمة بعض المعلمات، ولكن هذا ليس صحيحا بشكل عام. نلاحظ بدلا من ذلك كمية الاهتمام أو تمثيل لها كبيانات تجريبية.

ان الهدف من استعمال طرائق التقدير هوايجاد مقدرات لمعلمات الانموذج المدروس تتصف بمواصفات جيدة بحيث تؤهلها الى تكوين نموذج تقديري يمكن الاعتماد عليه في اغراض مختلفة . وتختلف طرائق التقدير في الافكار والاساليب المعتمدة في التقدير وذلك من اجل تحقيق نقطتين الاولى هي امتلاك المقدرات افضـــل المواصـــفات والثانية هو ظهور الطريقة باسلوب سهل التنفيذ .

نموذج المعادلات (2-5) يمكن التعبير عنها في الأشكال التالية من النظم الديناميكية :

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \theta), \quad y(0) = y_0 \qquad (34-2)$$

حيث ان t يمثل المتغير المستقل (الزمن) وان y يمثل متجه الحالة للانموذج

$$\frac{dy}{dt} = [\frac{dy_1}{dt}, \dots\dots\dots, \frac{dy_N}{dt}]^T \qquad (35-2)$$

$$y = [y_1, \dots\dots, y_N]$$

$$f = [f_1, \dots\dots f_N]$$

N تمثل عدد مفردات العينة

$\theta = [\theta_1, \dots\dots \theta_P]$ هو متجه المعلمات المجهولة في الانموذج

y_0 تمثل القيمة الابتدائية (الاولية)

ولتحديد قيم المعلمات θ ، متغير الحالة $y(t)$ مشاهدة في Lأي $t_1, \dots\dots t_T$ نجد ان:

$$Y(t_i) = X(t_i) + e_i \qquad (36-2)$$

1-8 طريقة المربعات الصغرى اللاخطية (NLS) [18][20][25]

تعد طريقة المربعات الصغرى اللاخطية من اهم الطرق في تقدير معلمات النماذج اللاخطية

نفترض ان لدينا الانموذج غير الخطي الاتي:

$$Y_i = f(t_i, \theta) + e_i \qquad (37-2)$$

حيث ان: Y_i يمثل متغير الاستجابة (المعتمد)

f تمثل دالة من t_i, θ

e_i متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 0 وتباين ثابت σ^2 وبالتالي فان $E(e_i) = 0$

وباستعمال طريقة المربعات الصغرى اللاخطية يمكن تصغير المقدار الاتي:

$$S(\hat{\theta}) = [y - f(t_i, \hat{\theta})]' \, [y - f(t_i, \hat{\theta})] \qquad (38-2)$$

وباستعمال طريقة كاوس نيوتن (**Gauss–Newton**) فان $\theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}, \dots\dots, \theta_{P0})'$ تمثل القيم الأولية للمعلمات وبعد تقريب هذه السلسلة باستعمال مفكوك تايلر بحذف الحدود التي لا تحتوي على المشتقات الجزئية من الدرجة الاعلى نحصل على :

$$f(t_i, \theta) = f(t_i, \theta_0) + \sum_{j=1}^{P} \left[\frac{\partial f(t_i, \theta)}{\partial \theta_j}\right] \theta = \theta_0(\theta_j - \theta_{j0}) \qquad (39-2)$$

حيث ان θ_0 تمثل القيم الاولية لـ (θ)

اذا كانت

$$Y^* = \underline{D}^{(0)} \underline{B}^{(0)} + e \qquad (40-2)$$

اذ ان :

$$Y^* = \underline{Y} - f^{(0)} = \begin{bmatrix} Y_1 - f_1{}^{(0)} \\ Y_2 - f_2{}^{(0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_P - f_P{}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} D_{11}{}^{(0)} & D_{12}{}^{(0)} & \cdots D_{1P}{}^{(0)} \\ D_{21}{}^{(0)} & D_{22}{}^{(0)} & \cdots D_{2P}{}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \cdots \quad \vdots \\ D_{n1}{}^{(0)} & D_{n2}{}^{(0)} & \dots D_{nP}{}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$D_{ij}^{(0)} = \left[\frac{\partial f(t_i,\theta)}{\partial \theta_j}\right] \theta = \theta_0$$

ويمكن تقدير معلمات $\underline{B}^{(0)}$ للمعادلة (2-40) باستعمال طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية من خلال الصيغة:

$$\underline{\hat{B}}^{(0)} = (D'^{(0)}D^{(0)})^{-1}D'^{(0)}\underline{Y^*}$$

حيث ان

$$\underline{B}^{(0)} = \theta - \theta_0$$

وان القيم التقديرية لـ $B^{(0)}$ تكون

$$\underline{\hat{B}}^{(0)} = \hat{\theta} - \theta_0$$

ومن المعادلة اعلاه يمكن الحصول على قيمة $\hat{\theta}_1$ التي تمثل القيم التقديرية المعدلة لـــ θ عند التكرار الاول ويتم وضعها بدل القيمة التقديرية الاولى θ_0 ويتم تكرار العمليات نفسها على مجموعة ثانية من التقديرات المعدلة $\hat{\theta}_2$ وهكذا.

ان التقديرات المعدلة بشكل عام يمكن اعادة كتابتها وكمتجه بالشكل :

$$\hat{\theta}_{r+1} - \hat{\theta}_r + \underline{B}^{(r)}$$

وتستمر عمليات التكرار حتى نصل الى التقارب بين التقديران المتعاقبان r و $r+1$ بحيث ان

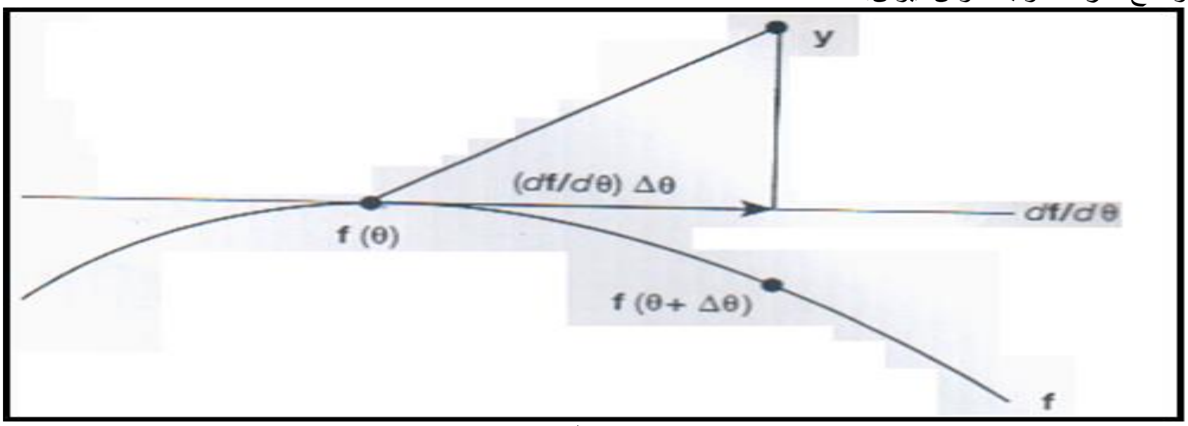
$$|\hat{\theta}_{r+1} - \hat{\theta}_r| < \gamma|$$

حيث γ مقدار صغير جدا مع ملاحظة $S(\theta)$ لكل دورة من دورات التكرار والتوقف حسب الصيغة التالية:

$$S(\hat{\theta}_{r+1}) \cong S(\hat{\theta}_r) \qquad (41-2)$$

2-8 خوارزمية كاوس نيوتن Gauss –Newton Algorithm [27][24]

تعد طريقة كاوس نيوتن الافضل من بين الطرق الاخرى في تصغير مقدار مربع انحرافات قيم المشاهدات . لذلك تستخدم هذه الطريقة في الحصول على مقدرات المربعات الصغرى، وتعد مقياس دقيق ومناسب لكل من السببين الآتيين.
الاول لانه يشترط مجال طبيعي في الجانب النظري للانحدار الخطي والانحدار اللاخطي والثاني لان اغلب طرق الانحدار اللاخطية تعتمد صيغ معدلة لطريقة كاوس نيوتن فضلاً عن بساطة وسهولة الطريقة في حل مشاكل عدة. والشكل (2-2) يوضح فكرة اسلوب كاوس نيوتن.



شكل (2-2) يوضح مجال المتغير في اسلوب كاوس نيوتن [24]

اذ أن f يمثل مجال متجهات الاستجابة . نبدأ بنقطة ثابتة θ مع ثبوت النقطة $f(\theta)$ على مجال الدالة. وان مستوي المماس موضح في النقطة $f(\theta)$ من خلال $\frac{df}{d\theta}$ لكون اعمدة $\frac{df}{d\theta}$ تمثل امتداد الى مستوي المماس.

يمكن تمثيل الطريقة من خلال $y - f(\theta)$ على المستوي المماس للمتجه $\left(\frac{df}{d\theta}\right)\Delta\theta$. لتصغير المقدار الاتي:

$$Q_\theta(\Delta\theta) = \left|y - f(\theta) - \frac{df}{d\theta}\Delta\theta\right|^2 \qquad (42-2)$$

بافتراض اعمدة $\frac{df}{d\theta}$ مستقلة خطياً وان:

$$\Delta\theta = \left[\frac{df^T}{d\theta} * \frac{df}{d\theta}\right]^{-1} \frac{df^T}{d\theta}\left(y - f(\theta)\right) \qquad (43-2)$$

وعملية التعويض المتعاقب تبدأ من خلال استبدال θ بالحد $\theta + \Delta\theta$ للحصول على نقطة جديدة $f(\theta + \Delta\theta)$ واقعة على مجال f .

وحسب تعريف الدالة $Q_\theta(\Delta\theta)$ يمكن حل مشكلة التقدير بطريقة المربعات الصغرى في كل خطوة والحصول على تقارب $Q(\theta + \Delta\theta)$ وذلك باستبدال $f(\theta + \Delta\theta)$ في الصيغة (42-2) الى $Q(\theta + \Delta\theta)$ وحسب متسلسلة تايلر يكون $f(\theta + \Delta\theta) \doteq f(\theta) + \frac{df}{d\theta}\Delta\theta$

3-8 طريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق Maximum A Posterior Method (MAP) [19]

تعد هذه الطريقة احدى الطرق البيزية في تقدير المعلمات من حيث الاهتمام بمقياس المنوال للتوزيع اللاحق أكثر من المتوسط، بالرغم من زيادة قيمة التباين في هذه الطريقة مقارنة بطريقة بيز الا انها تعد أسهل من حيث حلها لمقدرات معلمات متعددة في النماذج اللاخطية وذلك لعدم ظهور التوزيع اللاحق فضلاً عن سهولة حل التكاملات العددية لمعادلات من الدرجات العليا.

نفترض ان لدينا الانموذج التالي:

$$f(t_i) = Y_i - e_i \qquad (44-2)$$

حيث $f(t_i)$ تمثل قيم المشاهدات التي تتوزع توزيعا طبيعيا مستقلا

$$f(t_i) \sim IN(0, \sigma^2{}_e)$$

Independent Normal distribution :IN

فان صيغة التوزيع اللاحق تكون

$$P(\theta|Y) = L(\theta)g(\theta)$$

حيث θ تمثل متجه معلمات ذات بعد *m x 1*

Y يمثل متجه قيم الاستجابة ذو بعد *n x 1*

$L(\theta)$ يمثل دالة الامكان الاعظم والموضحة بالشكل التالي:

$$L(\theta_k) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_e\sqrt{2\pi}}\, exp\left(-\frac{e_i^2}{2{\sigma_e}^2}\right) \qquad (45-2)$$

$g(\theta)$ تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع السابق

وعلى افتراض ان $g(\theta)$ تتبع توزيع طبيعي متعدد بمتوسط μ ومصفوفة تباين وتباين مشترك $\sum$

$$g(\theta) \sim MN(\mu, \sum)$$

وبأخذ اللوغارتم الطبيعي للتوزيع اللاحق

$$\ln P(\theta|Y) = \ln\left(L(\theta)\right) + \ln\left(g(\theta)\right) \qquad (46-2)$$

اذ ان

$$(\theta) = \frac{|\sum|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp[-\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_k^n \sum_L^m \sum^{kL} (\theta_K - \theta_{K0})(\theta_1 - \theta_{L0})] \qquad (47-2)$$

وان :

$$(\theta_K) = \frac{1}{{\sigma_e}^2}\sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial f(t_i)}{\partial\theta_k} - \sum^{kL}(\theta_{L1} - \theta_{L0})$$

وان مصفوفة Hessian تكون كالاتي:

$$H(\theta_K, \theta_L) = -\frac{1}{{\sigma_e}^2}\sum_{i=1}^n [\sum_{\mathrm{k}}^m \sum_{\mathrm{L}}^m \frac{\partial f(t_i)}{\partial\theta_k}\frac{\partial f(t_i)}{\partial\theta_L} + e_i \frac{\partial^2 f(t_i)}{\partial\theta_k\partial\theta_L}$$

مصفوفة معلومات التوزيع اللاحق تكون :

$$I(\theta_K, \theta_L) = \frac{1}{{\sigma_e}^2}\sum_{i=1}^n \frac{\partial f(t_i)}{\partial\theta_k}\frac{\partial f(t_i)}{\partial\theta_L} + \sum^{kL}$$

وباستعمال برمجة العمليات الحسابية يتم الحصول على تقديرات المعلمات من خلال الصيغة التالية:

$$\hat{\theta}_{r+1} = \hat{\theta}_r - I^{-1}G_r \qquad (48-2)$$

4-8- معيار متوسط مربعات الخطأ (Mean Square Error Criteria)

متوسط مربعات الخطأ (MSE) بالنسبة للمعلمات

$$MSE[\theta] = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}(\hat{\theta}_i - \theta)^2 \qquad (49-2)$$

إذ أن:

θ : تمثل القيم الافتراضية للمعلمات

$\hat{\theta}_i$: تمثل القيم المقدرة للمعلمات حسب الطريقة المستعملة.

R: تمثل عدد تكرارات التجربة والمساوية الى (1000).

5-8اختيار الأنموذج الأفضل Choosing the Best model

بعد التعرف على خصائص السلسلة الزمنية والانموذجات التي تلائم بياناتها وكذلك تقدير معلمات هذه الانموذجات. تأتي مرحلة اختيار الأنموذج الأفضل من بين الانموذجات قيد الدراسة. وهنالك عدة معايير لاختيار الأنموذج الأفضل ومنها معيار معلومات أكايكي (Akaike's Information Criterion) (AIC) ومعيار معلومات اكايكي المصحح (Corrected Akaike's Information Criterion) (AICc) ومعيار معلومات بيز (Bayesian Information criterion) (BIC). والتي تستعمل للمقارنة بين النماذج واختيار أفضل انموذج يعطي أصغر قيمة لهذه المعايير، وتستند هذه المعايير على الإحصاءات التي تخص البواقي Residuals والتي تنتج من مطابقة الأنموذج (Fitted model) ويكون الأنموذج بصورة عامة غير متحيز(Unbiased) [11]

6-8 معيار معلومات اكايكي Akanke's Information Criterion [10][11]

يعد معيار معلومات اكايكي أحد الأدوات لقياس ملائمة الأنموذج الاحصائي ب P من المعلمات. ويرمز له بالرمز (AIC). ويعبر عنه بالمعادلة الآتية:

$$AIC(P) = -2\,In[Maximum\ Likelihood] + 2P$$

OR

$$AIC(P) = -2In\frac{RSS}{n} + 2P$$

حيث ان:

RSS: تمثل مجموع مربعات الانحدار

P: تمثل عدد معلمات الأنموذج.

n: تمثل عدد المشاهدات.

وان دالة Log_Likelihood هي كالآتي.

$$Ln\ L = -\frac{n}{2}Ln(2\pi\hat{\sigma}_a{}^2) - \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\ S(\underline{\varphi})$$

حيث ان:

$$S(\underline{\varphi}) = \sum_{t=-P}^{n}[E(a_t/\varphi, Z]^2$$

وعند تعظيم المعادلة اعلاه نحصل على الصيغة التقريبية لمعيار أكايكي (AIC).

$$AIC \simeq n\,Ln\hat{\sigma}_a{}^2 + n(1 + Ln(2\pi)) + 2P \qquad (50\text{-}2)$$

ان الحد الثاني للمعادلة (3-1) يكون ثابتا (Constant) فيتقلص معيار أكايكي AIC ويصبح بالشكل الآتي.

$$AIC(P) = n\,Ln\hat{\sigma}_a^2 + 2P \qquad (51\text{-}2)$$

فأن الرتبة المثالية للأنموذج يتم اختيارها عن طريق القيمة P والتي تقابل اقل قيمة للمعيار. وان الأنموذج الذي يعطي اقل قيمة لمعيارAIC هو الأنموذج الأفضل. يمثل الحد الأول للصيغة (2-44) مدى المطابقة وذلك بأخذ اقل تباين له. ويمثل الحد الثاني عدد المعلمات للأنموذج المطابق.

ويمكن كتابة معيار AIC بالصيغة المعيارية وذلك عن طريق قسمة معيار AIC على حجم العينة n ويرمز له بالرمز NAIC. ويعبر عنه بالصيغة الآتية.

$$\mathrm{NAIC(P)} = \mathrm{AIC(p)} / \mathrm{n} \qquad (52\text{-}2)$$

وان الأنموذج الذي يقابل اقل قيمة لمعيار AIC هو الأنموذج الأفضل.[11]

7-8 معيارمعلومات اكايكي المصحح Corrected Akanke's Information Criterion [10][11]

في عام 1989 توصل الباحثان Hurvich و Tsai الى معياراً جديداً يدعى بمعيار معلومات اكايكي المصحح (Corrected Akaike Information Criterion) ويرمز له بالرمز (AIC_c) ويعبر عنه بالصيغة الآتية.

$$AIC_c = nLn\hat{\sigma}_a^2 + n\,\frac{1+\frac{P}{n}}{1-\frac{P+2}{n}} \qquad (53\text{-}2)$$

وان الفائدة من استعمال معيار AIC_c هو لتصحيح التحيز الذي يظهره المعيار السابق [11] [10].

8-8 معيار معلومة بيز Bayesian Information criterion [11] [10].

وهو أحد معايير تحديد رتبة الأنموذج ويرمز له بالرمز (BIC) ان معيار معلومات بيز يعطي مقدر متسق (Consistence Estimate) للرتبة الحقيقية على عكس معيار اكايكي AIC الذي يعطي غالبا مقدر ذو رتبة اعلى من الرتبة الحقيقية. ويأخذ الصيغة الآتية:

$$BIC(P) = n\,Ln(\hat{\sigma}_a^2) - (n-P)Ln\left(1-\frac{P}{n}\right)P\,Ln(n) + P\,Ln\left[\frac{1}{P}\left(\frac{\sigma_z^2}{\hat{\sigma}_a^2}-1\right)\right] \qquad (54\text{-}2)$$

وعند اهمال بعض الحدود والتبسيط فان الصيغة اعلاه تصبح بالشكل

$$BIC(P) = n\,Ln(\hat{\sigma}_a^2) + P\,Ln(n) \qquad (55\text{-}2)$$

إذ ان:

n: تمثل حجم العينة المستخدمة

RSS: تمثل مجموع مربعات الانحدار

$\hat{\sigma}_a^2$ تمثل مقدر الإمكان الأعظم ل σ_a^2.

P: تمثل عدد المعلمات في الأنموذج.

σ_z^2: تمثل تباين العينة.

وان الأنموذج الذي يقابل اقل قيمة لمعيار (BIC) هو الأنموذج الأفضل.

9- المحاكاة Simulation:-

يعد اسلوب المحاكاة من الاساليب العلمية الرصينة التي تقوم على اعطاء صورة طبق الاصل لظاهرة حقيقية ليتسنى الاستفادة من هذه الصورة في دراسة خواص تلك الظاهرة ومميزاتها. وتُعد طريقة (مونت كارلو) (Monte Carlo) من بين أهم طرائق المحاكاة وافضلها وأكثرها استعمالا في تحليل المشكلات المعقدة.

حيث توظف نماذج تحتوي على عدد من الحالات الافتراضية حتى تكون نتائج التحليل اكثر شمولية، ونظرا للتطور والتقدم الحاصل في مجال الحاسبات الالكترونية فقد تطورت اساليب المحاكاة بما يتماشى مع الواقع العملي. و يمكن ان يُعتمد أسلوب المحاكاة في اثبات صحة طريقة معينة يكون من الصعب اثبات صحتها نظرياً.

ويمكن تلخيص مراحل بناء تجربة المحاكاة بثلاثة مراحل اساسية وكالاتي:

اولا: توليد البيانات Generation of the data :-

وقد تم توليد البيانات بموجب الخطوات الآتية بعد تثبيت حجم العينة المراد توليدها وشكل الأنموذج المطلوب.اذ يتم حل نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية الوارد ذكرها في الفصل الثاني بطريقة فصل المتغيرات ومن ثم نبدأ مرحلة توليد البيانات

1-المتغيرات المستقلة Independent variables :-

عند توليد المتغيرات المستقلة (التوضيحية) يجب ان يؤخذ بنظر الاعتبار طبيعة كل متغير والظاهرة التي يمثلها ذلك المتغير فهناك ظواهر لا تقبل الكميات السالبة أو الاعداد العشرية أو يستبعد عن متغيراتها انها تأخذ قيماً معينة من أجل ان تكون البيانات المولدة تطابق الواقع الذي تُحاكيه .

2- الاخطاء العشوائية Random errors :-

يتم توليد الاخطاء العشوائية على اساس الغاية المرجوة من البيانات حيث يمكن توفير اي مشكلة في البيانات وفي هذه البحث تم توليد الاخطاء العشوائية التي تتوزع طبيعيا بمتوسط صفر وتباين معين σ^2 أي ان:

$$e_i \sim N(0, \sigma^2)$$

وسوف يتم استعمال ثلاث مستويات من التباين تضاف للمتغير وهي (0.1, 0.3, 0.5)

المرحلة الثالثة:

3- متغيرالاستجابة (التابع) Dependent Variable :-

يتم توليد متغير الاستجابة بعد تعويض بيانات المتغيرات التوضيحية المولدة في الفقرة اولاً و بيانات الاخطاء العشوائية المولدة في الفقرة ثانياً بالانموذج المراد محاكاتهِ وبأفتراض قيم للمعالم تكون هذه القيم بمثابة قيم معالم المجتمع المراد تقديرها والوصول اليها . ولكن افتراض قيم معالم الانموذج يجب ان يكون ضمن الاطار المنطقي لمفهوم هذه القيم كي لا تخرج التجربة عن واقعيتها ولكي لا تسخر نتائج المحاكاة حسب رغبة الباحث

لقد تضمنت تجارب المحاكاة المراحل والخطوات التالية لتقدير معلمات نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية وتطبيق طرائق التقدير المستعملة في هذه البحث والتي يتم من خلالها تحقيق الهدف المرجو ببيان أفضل طريقة تقدير لهذه النماذج والتي تم فيها اعتماد نتائج برنامج (Mathematica 21.2).

حيث تم اختيار القيم الافتراضية للمعلمات ولكل انموذج على حدة بافتراض معلومية القيم الابتدائية $y(0)=y_0$ وبقيم مختلفة وكما في الجداول (3-1) و (3-2) حيث يتم وضع كل تجربة عند مستويات التباين $\sigma^2 = (0.1, 0.3, 0.5)$ وباستعمال

حجوم عينات مختلفة n=(10,25,50,100,250) وتكرار كل تجربة 1000 مرة من اجل الوصول الى مستوى افضل من التجانس.

جدول (3-1) القيم الافتراضية للمعلمة والقيمة الابتدائية والنماذج المفترضة في تجربة المحاكاة لأنموذج Malthus. كما في المعادلة (2-15)

Model	y_0	k
1	1	0.03
2	1	0.1
3	2	0.03
4	2	0.1
5	3.5	0.05
6	3.5	0.1
انموذج Malthu		
Model	y_0	k
1	1	0.03
2	1	0.1
3	2	0.03
4	2	0.1
5	3.5	0.05
6	3.5	0.1

جدول (3-2) القيم الافتراضية للمعلمة والقيمة الابتدائية والنماذج المفترضة في تجربة المحاكاة للأنموذج اللوجستي.كما في المعادلة (2-33)

الانموذج اللوجستي			
Model	y_0	r	a
1	2	0.1	5
2	2	50.	25
3	1	30.0	2
4	1	0.5	10
5	0.2	20.	4
6	0.2	0.1	2

ولغرض الوصول للمقدر الافضل من خلال المفاضلة بين طرائق التقدير المدروسة، فقد جرى الاعتماد بشكل عام على معيار متوسط مربعات الخطأ MSE وكما في المعادلة (2-45)

9-1مناقشة نتائج تجربة المحاكاة:

يتم عرض نتائج تجارب المحاكاة وتحليلها لتقدير معلمات نماذج المعادلة التفاضلية الاعتيادية المتمثلة بمسألة القيمة الاولية و لكل من طريقتي التقدير المبينة في الجانب النظري ولكل انموذج على حدة وكما يتم توظيحه في الجداول (3-3) الى(3-16) وكالآتي:

9-2 انموذج Malthus

جدول (3-3) القيم المقدرة لمعلمة أنموذج Malthus ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الاول

Model 1 (k=0.03)							
σ^2	N	I.V	NLS		MAP		Best
			k	MSE(k)	k	MSE(k)	
0.1	10	$y_0=1$	0.07129	0.21392	0.02617	0.40125	NLS
	25		0.00502	0.01323	0.00825	0.02659	NLS
	50		0.02484	0.00035	0.03331	0.00373	NLS
	100		0.02831	0.00047	0.02707	0.00051	NLS

	250		0.02813	0.00003	0.03008	0.00003	MAP
0.3	10		-0.23469	3.10449	0.42046	2.79029	MAP
	25		0.06285	0.24222	0.07097	0.25479	NLS
	50		0.03121	0.03487	0.02885	0.04080	NLS
	100		0.01909	0.00548	0.03432	0.00527	MAP
	250		0.02899	0.00028	0.02675	0.00026	MAP
0.5	10		0.10560	5.94347	0.19094	6.34336	NLS
	25		0.04076	0.54271	0.07375	0.46999	MAP
	50		0.03543	0.07625	0.05062	0.06950	MAP
	100		0.05235	0.01020	0.02241	0.00939	MAP
	250		0.02143	0.00065	0.02029	0.00074	NLS

جدول (3-4) القيم المقدرة لمعلمة أنموذج Malthus ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الثاني

(k=0.1)2Model							
σ^2	N	I.V	NLS		MAP		Best(k)
			k	MSE(k)	k	MSE(k)	
0.1	10	y0=1	0.05142	0.41871	0.02342	0.42677	NLS
	25		0.11542	0.02803	0.10434	0.03432	NLS
	50		0.10022	0.00387	0.09846	0.00454	NLS
	100		0.09645	0.00051	0.10008	0.00045	MAP
	250		0.09482	0.00006	0.09493	0.00005	MAP
0.3	10		0.14715	2.68117	0.08577	3.80097	NLS
	25		0.14798	0.22776	0.10083	0.26769	NLS
	50		0.09537	0.03804	0.08136	0.03512	MAP
	100		0.09492	0.00356	0.09038	0.00397	NLS
	250		0.08599	0.00002	0.09053	0.00039	NLS
0.5	10		0.04379	9.91814	0.21465	7.76064	MAP
	25		0.13366	0.56130	0.12834	0.48919	MAP

	50		0.06890	0.06602	0.09050	0.06645	NLS
	100		0.08032	0.00760	0.08910	0.00887	NLS
	250		0.07790	0.00107	0.07728	0.00110	NLS

جدول (3-5) القيم المقدرة لمعلمة أنموذج Malthus ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الثالث

Model 3 (k=0.03)							
σ^2	N	I.V	NLS		MAP		Best(k)
			k	MSE(k)	k	MSE(k)	
0.1	10	y0=2	0.07026	0.12121	0.03156	0.12495	NLS
	25		0.03159	0.00837	0.03038	0.00690	MAP
	50		0.02900	0.00055	0.02695	0.00094	NLS
	100		0.02854	0.00004	0.02930	0.00013	NLS
	250		0.02956	0.00001	0.03011	0.00001	NLS
0.3	10		0.11840	1.00349	0.03914	0.71949	MAP
	25		0.07216	0.08640	0.01677	0.06277	MAP
	50		0.03202	0.00860	0.04007	0.00994	NLS
	100		0.02654	0.00138	0.03350	0.00147	NLS
	250		0.02578	0.00008	0.02849	0.00008	MAP
0.5	10		0.13276	2.17987	0.04187	2.85874	NLS
	25		0.05513	0.15286	0.00315	0.21071	NLS
	50		0.02284	0.01092	0.01390	0.01815	NLS
	100		0.02166	0.00159	0.02692	0.00320	NLS
	250		0.02673	0.00015	0.02614	0.00019	NLS

جدول (3-6) القيم المقدرة لمعلمة أنموذج Malthus ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الرابع

Model 4 (k=0.1)							
σ^2	N	I.V	NLS		MAP		Best(k)
			k	MSE(k)	k	MSE(k)	
0.1	10	y0=2	0.08297	0.14069	0.04192	0.13490	MAP
	25		0.08515	0.00971	0.10176	0.00693	MAP
	50		0.10231	0.00096	0.10263	0.00133	NLS
	100		0.09847	0.00014	0.09830	0.00016	NLS
	250		0.09762	0.00001	0.09781	0.00001	MAP
0.3	10		0.14014	1.26081	0.13818	0.79744	MAP
	25		0.09472	0.06352	0.07398	0.05068	MAP
	50		0.08985	0.00043	0.09096	0.00898	NLS
	100		0.09423	0.00107	0.09499	0.00104	MAP
	250		0.09280	0.00011	0.09370	0.00012	NLS
0.5	10		0.13205	2.39407	0.06818	2.20437	MAP
	25		0.10221	0.16300	0.10570	0.18212	NLS
	50		0.09716	0.02085	0.10621	0.02221	NLS
	100		0.09520	0.00244	0.09281	0.00315	NLS
	250		0.09131	0.00024	0.09002	0.00025	NLS

جدول (3-7) القيم المقدرة لمعلمة أنموذج Malthus ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الخامس

Model 5 (k=0.05)							
σ^2	N	I.V	NLS		MAP		Best(k)
			k	MSE(k)	k	MSE(k)	
0.1	10	y0=3.5	0.04495	0.04588	0.05628	0.03976	MAP
	25		0.04785	0.00315	0.04888	0.00278	MAP
	50		0.04820	0.00033	0.05073	0.00050	NLS
	100		0.04817	0.00005	0.04905	0.00004	MAP
	250		0.04933	0.00004	0.04911	0.00003	MAP
0.3	10		0.03821	0.34430	0.01931	0.24621	MAP
	25		0.02400	0.02944	0.04383	0.03132	NLS
	50		0.04965	0.00320	0.04446	0.00324	NLS
	100		0.04754	0.00034	0.04876	0.00041	NLS
	250		0.04776	0.00002	0.04840	0.00003	NLS
0.5	10		0.05007	0.82207	0.10855	0.79942	MAP
	25		0.05996	0.07120	0.02610	0.05818	MAP
	50		0.03537	0.00717	0.03735	0.00767	NLS
	100		0.04823	0.00106	0.04804	0.00084	MAP
	250		0.04710	0.00006	0.04764	0.00005	MAP

جدول (3-8) القيم المقدرة لمعلمة أنموذج Malthus ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج السادس

Model 6 (k=0.1)							
σ^2	N	I.V	NLS		MAP		Best(k)
			k	MSE(k)	k	MSE(k)	
0.1	10	y0=3.5	0.08038	0.03246	0.10994	0.03557	NLS
	25		0.09348	0.00299	0.09715	0.00271	MAP
	50		0.10033	0.00034	0.10134	0.00028	MAP
	100		0.09914	0.00004	0.09959	0.00005	NLS
	250		0.09858	0.00000	0.09859	0.00001	NLS
0.3	10		0.14525	0.32693	0.17898	0.33167	NLS
	25		0.12583	0.02284	0.10671	0.02174	MAP
	50		0.10333	0.00344	0.09405	0.00334	MAP
	100		0.09276	0.00050	0.09272	0.00039	MAP
	250		0.09533	0.00002	0.09607	0.00004	NLS
0.5	10		0.08375	0.73483	0.12757	0.77796	NLS
	25		0.05656	0.06159	0.08447	0.06586	NLS
	50		0.08765	0.01027	0.09616	0.01062	NLS
	100		0.09571	0.00110	0.09164	0.00125	NLS
	250		0.09332	0.00010	0.09418	0.00009	MAP

جدول (3-9) عدد مرات ونسب الافضلية حسب حجوم العينات و مستويات التشويش لكلا طريقتي التقدير لأنموذج Malthus.

σ^2	n	NLS	MAP
0.1	10	4	2
	25	2	4
	50	5	1
	100	4	2
	250	2	4
عدد مرات الافضلية		11	19
0.3	10	2	4
	25	3	3
	50	4	2
	100	3	3
	250	4	2
عدد مرات الافضلية		13	17
0.5	10	3	3
	25	3	3
	50	5	1
	100	4	2
	250	4	2
عدد مرات الافضلية		17	13
SUM			
	10	9	9
	25	8	10
	50	14	4
	100	11	7
	250	10	8
عدد مرات الافضلية		52	38
نسبة الافضلية		%58	%42

يتضح من الجدول (3-9) ما يأتي:

1- تفوق طريقة NLS على طريقة MAPبعد مرات الافضلية في تقدير معلمة انموذج Malthus.

2- عند مستوى تشويش 0.1 تفوقت طريقة MAP على طريقة NLS عند حجوم العينات (25,250) في حين تفوقت طريقة NLS حجوم عينات (10, 50,100).

3- عند مستوى تشويش 0.3 تفوقت طريقة MAP على طريقة NLS عند حجم عينة (10) وتفوقت طريقة NLS عند حجوم العينات (,250,50) حين تساوت الطريقتين عند حجوم عينات (25, 100).

ISSN: 2618-0278 Vol. 7No. 22 June 2025

4- عند مستوى تشويش 0.5 تفوقت طريقة NLS على طريقة MAP عند حجوم العينات (50,100,250) في حين تساوت الطريقتين عند حجوم عينات (10,25).

5- عند حجم عينة 10 تساوت عدد مرات افضلية الطريقتين في تقدير معلمة انموذج Malthus.

6- عند حجم عينة 25 تفوقت طريقة MAP على طريقة NLS في تقدير معلمة انموذج Malthus.

7- تفوقت طريقة NLS على طريقة MAP في تقدير معلمة انموذج Malthus عند حجوم العينات (50,100,250)

3-9الانموذج اللوجستي Logistic model

جدول (3-10) القيم المقدرة لمعلمات الانموذج اللوجستي ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الاول

Model 1 (r=0.1 , a=5)											
σ^2	n	I.V	NLS				MAP				Best
			r	MSE(r)	a	MSE(a)	R	MSE(r)	a	MSE(a)	
0.1	10	y0=2	0.25917	0.02804	3.03968	3.90287	0.26621	0.02957	3.00862	4.02248	NLS
	25		0.11815	0.00035	4.57024	0.19994	0.11823	0.00036	4.57139	0.20644	NLS
	50		0.10589	0.00004	4.95522	0.00258	0.10589	0.00004	4.95925	0.00213	MAP
	100		0.10279	0.00001	5.03790	0.00146	0.10273	0.00001	5.03340	0.00117	MAP
	250		0.10203	0.00000	5.04852	0.00236	0.10193	0.00000	5.04843	0.00235	MAP
0.3	10		0.45092	0.13941	2.88231	4.50327	0.57576	0.31306	2.88587	4.53515	NLS
	25		0.15316	0.00300	4.23622	0.61152	0.15755	0.00345	4.15448	0.74570	NLS
	50		0.11685	0.00019	4.93439	0.00699	0.11609	0.00027	4.94377	0.00979	NLS
	100		0.10828	0.00007	5.10427	0.01108	0.10854	0.00007	5.10569	0.01130	NLS
	250		0.10602	0.00004	5.14279	0.02044	0.10643	0.00004	5.14054	0.02981	NLS
0.5	10		0.75624	1.17939	3.10674	3.72865	1.23270	4.42187	3.15457	4.20146	NLS
	25		0.20499	0.01176	3.91692	1.21187	0.18903	0.00846	4.03279	0.97879	MAP
	50		0.13120	0.00100	4.85536	0.02723	0.12944	0.00091	4.89190	0.01788	MAP
	100		0.11289	0.00018	5.19446	0.03879	0.11383	0.00020	5.18106	0.03451	NLS
	250		0.11030	0.00011	5.23781	0.05677	0.11125	0.00013	5.23863	0.05714	NLS

جدول (3-11) القيم المقدرة لمعلمات الانموذج اللوجستي ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الثاني

Model 2 (r=0.5 , a=25)											
σ^2	n	I.V	NLS				MAP				Best
			r	MSE(r)	a	MSE(a)	r	MSE(r)	a	MSE(a)	
0.1	10	y0=2	0.50598	0.00004	24.42170	0.45104	0.50751	0.00006	24.21570	0.70936	NLS
	25		0.50144	0.00000	25.02590	0.00077	0.50142	0.00001	25.02760	0.00094	NLS
	50		0.50114	0.00000	25.04550	0.00211	0.50110	0.00000	25.04830	0.00237	NLS
	100		0.50118	0.00000	25.04810	0.00233	0.50103	0.00000	25.04870	0.00237	NLS
	250		0.50101	0.00000	25.04990	0.00249	0.50101	0.00000	25.04960	0.00546	NLS
0.3	10		0.51655	0.00031	23.60580	2.77925	0.51627	0.00033	23.62940	2.89547	NLS
	25		0.50408	0.00002	25.09280	0.00993	0.50424	0.00002	25.09030	0.01028	NLS
	50		0.50328	0.00001	25.14280	0.02072	0.50289	0.00001	25.14680	0.00204	MAP
	100		0.50298	0.00001	25.15080	0.02278	0.50332	0.00001	25.14590	0.03137	NLS
	250		0.50315	0.00001	25.14480	0.02098	0.50247	0.00002	25.15210	0.02316	NLS
0.5	10		0.53312	0.00133	22.15760	10.98050	0.54087	0.00181	21.58880	13.10210	NLS
	25		0.50625	0.00006	25.17470	0.03351	0.50753	0.00006	25.12130	0.01683	MAP
	50		0.50529	0.00006	25.23620	0.05645	0.50615	0.00004	25.21780	0.04823	MAP
	100		0.50548	0.00003	25.24490	0.06018	0.50526	0.00003	25.24620	0.02103	MAP
	250		0.50475	0.00004	25.24870	0.06196	0.50553	0.00003	25.24820	0.06164	MAP

جدول (3-12) القيم المقدرة لمعلمات الانموذج اللوجستي ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الثالث

Model 3 (r=0.03 , a=2)											
σ^2	n	I.V	NLS				MAP				Best
			r	MSE(r)	a	MSE(a)	r	MSE(r)	a	MSE(a)	
0.1	10	y0=1	0.75350	0.59258	1.12597	0.76442	0.73529	0.64119	1.13526	0.94898	NLS
	25		0.18893	0.02786	1.25228	0.56067	0.17756	0.02620	1.27279	0.53133	MAP

	50		0.06677	0.00139	1.53738	0.21587	0.07061	0.00174	1.52439	0.22959	NLS
	100		0.04107	0.00012	1.84618	0.02397	0.04039	0.00011	1.86276	0.01930	MAP
	250		0.06032	0.00092	1.70924	0.08454	0.06022	0.00091	1.70768	0.04546	MAP
0.3	10		5.98259	68.02120	1.20320	0.63654	5.09798	70.15420	1.20352	0.73556	NLS
	25		2.72484	23.20420	1.29138	0.50354	1.31153	1.93848	1.27146	0.23106	MAP
	50		0.17759	0.02689	1.46177	0.29299	0.16131	0.02171	1.46485	0.28826	MAP
	100		0.06225	0.00107	1.80527	0.03906	0.06706	0.00187	1.78534	0.05568	NLS
	250		0.06736	0.00140	1.80898	0.03651	0.06672	0.00135	1.80788	0.02695	MAP
0.5	10		7.25640	90.61840	1.32780	0.45541	9.40016	126.27000	1.32229	0.48850	NLS
	25		4.11971	58.30660	1.38687	0.37857	4.54330	61.80170	1.34497	0.42960	NLS
	50		0.40423	0.54673	1.57657	0.18624	0.38257	0.19727	1.52760	0.02268	MAP
	100		0.08874	0.00389	1.81446	0.04008	0.08974	0.00377	1.82166	0.03473	MAP
	250		0.07601	0.00212	1.90540	0.00905	0.07347	0.00189	1.90549	0.00901	MAP

جدول (3-13) القيم المقدرة لمعلمات الانموذج اللوجستي ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الرابع

Model 4 (r=0.5 , a=10)											
σ^2	n	I.V	NLS				MAP				Best
			r	MSE(r)	a	MSE(a)	r	MSE(r)	a	MSE(a)	
0.1	10	y0=1	0.51617	0.00030	9.54702	0.28467	0.51366	0.00022	9.56918	0.23292	MAP
	25		0.50388	0.00002	10.02810	0.00092	0.50327	0.00001	10.03110	0.00010	MAP
	50		0.50306	0.00001	10.04380	0.00194	0.50290	0.00001	10.04640	0.00219	NLS
	100		0.50311	0.00001	10.04900	0.00241	0.50263	0.00001	10.04860	0.00238	MAP
	250		0.50244	0.00000	10.04930	0.00243	0.50259	0.00001	10.05000	0.00250	NLS
0.3	10		0.54012	0.00093	9.17589	1.02016	0.54042	0.00178	8.98470	1.17127	NLS
	25		0.51101	0.00013	10.08770	0.00940	0.50999	0.00011	10.12150	0.00656	MAP

	50		0.50743	0.00006	10.14950	0.02255	0.51017	0.00011	10.13590	0.05868	NLS
	100		0.50890	0.00008	10.14520	0.02114	0.50887	0.00008	10.14500	0.02107	MAP
	250		0.50699	0.00006	10.15060	0.02271	0.50768	0.00007	10.14960	0.04241	NLS
0.5	10		0.57677	0.00617	8.40694	2.69543	0.57869	0.00634	8.31223	2.94844	NLS
	25		0.51992	0.00041	10.14680	0.02352	0.51977	0.00042	10.14550	0.02514	NLS
	50		0.51388	0.00022	10.23440	0.05591	0.51374	0.00021	10.23420	0.05500	MAP
	100		0.51344	0.00019	10.24680	0.06123	0.51401	0.00021	10.24300	0.07938	NLS
	250		0.51376	0.00010	10.24930	0.06216	0.51269	0.00017	10.25080	0.06293	NLS

جدول (14-3) القيم المقدرة لمعلمات الانموذج اللوجستي ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الخامس

Model 5 (r=0.2 , a=4)											
σ^2	n	I.V	NLS				MAP				Best
			r	MSE(r)	a	MSE(a)	r	MSE(r)	a	MSE(a)	
0.1	10	y0=0.2	0.41526	0.05064	0.77556	10.43320	0.49166	0.08951	0.64728	11.24840	NLS
	25		0.22017	0.00043	3.07392	0.91847	0.22419	0.00059	2.87066	1.28500	NLS
	50		0.20456	0.00002	3.97844	0.00090	0.20455	0.00002	3.98464	0.00043	MAP
	100		0.20266	0.00001	4.04460	0.00203	0.20304	0.00001	4.04104	0.00470	NLS
	250		0.20241	0.00001	4.04777	0.00229	0.20234	0.00001	4.04967	0.00047	MAP
0.3	10		0.78421	0.44696	0.77069	10.45500	0.96047	0.79024	0.66831	11.11240	NLS
	25		0.26807	0.00468	2.27081	3.00777	0.26574	0.00450	2.31222	2.93424	MAP
	50		0.21285	0.00017	3.98765	0.00275	0.21418	0.00021	3.94927	0.00639	NLS
	100		0.20782	0.00006	4.13998	0.01976	0.20819	0.00007	4.13279	0.03777	NLS
	250		0.20688	0.00005	4.14627	0.02141	0.20679	0.00005	4.14720	0.01171	MAP
0.5	10		4.36988	3.94770	0.67268	1.07810	4.63945	4.67100	0.99939	2.69050	NLS
	25		0.30576	0.01184	2.09039	3.71263	0.31040	0.01266	2.05263	3.82648	NLS

	50		0.22343	0.00056	3.96779	0.00373	0.22096	0.00047	3.99485	0.00354	MAP
	100		0.21299	0.00017	4.21656	0.04736	0.21545	0.00024	4.21097	0.05481	NLS
	250		0.21252	0.00016	4.23690	0.05617	0.21176	0.00015	4.24406	0.02964	MAP

جدول (3-15) القيم المقدرة لمعلمات الانموذج اللوجستي ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج السادس

Model 6 (r=0.1 , a=2)											
σ^2	n	I.V	NLS				MAP				Best
			r	MSE(r)	a	MSE(a)	r	MSE(r)	a	MSE(a)	
0.1	10	y0=0.5	0.48952	0.19238	0.82342	1.39334	0.35032	0.07063	0.87462	1.27477	MAP
	25		0.14321	0.00212	1.52863	0.26326	0.15494	0.00315	1.39079	0.37656	NLS
	50		0.11241	0.00016	1.92801	0.00654	0.11338	0.00019	1.91036	0.00987	NLS
	100		0.10555	0.00003	2.02985	0.00093	0.10558	0.00003	2.03011	0.00098	NLS
	250		0.10409	0.00002	2.04677	0.00219	0.10373	0.00001	2.04743	0.00026	MAP
0.3	10		1.44087	2.41408	0.85399	1.32195	2.95966	20.92270	0.85545	1.32746	NLS
	25		0.27871	0.03392	1.22584	0.60288	0.27320	0.03181	1.20865	0.23342	MAP
	50		0.14496	0.00213	1.82156	0.03557	0.14452	0.00202	1.80952	0.01846	MAP
	100		0.11737	0.00031	2.09569	0.00942	0.11671	0.00029	2.10242	0.00120	MAP
	250		0.11267	0.00017	2.14293	0.02047	0.11177	0.00014	2.14212	0.02022	MAP
0.5	10		4.77963	66.39100	0.89983	1.21721	4.83910	49.23130	0.94748	1.11627	MAP
	25		0.42479	0.13361	1.27906	0.53730	0.77373	1.38443	1.18679	0.66826	NLS
	50		0.16696	0.00473	1.87178	0.02342	0.16770	0.00481	1.85502	0.03305	NLS
	100		0.12782	0.00081	2.17206	0.03031	0.12873	0.00084	2.16816	0.05847	NLS
	250		0.11969	0.00040	2.24431	0.05984	0.11862	0.00036	2.23919	0.05725	MAP

جدول (16-3) عدد مرات ونسب الافضلية حسب حجوم العينات و مستويات التشويش لكلا طريقتي التقدير للأنموذج اللوجستي.

σ^2	n	NLS	MAP
0.1	10	4	2
	25	4	2
	50	4	2
	100	3	3
	250	2	4
عدد مرات الافضلية		17	13
0.3	10	6	0
	25	2	4
	50	3	3
	100	4	2
	250	3	3
عدد مرات الافضلية		18	12
0.5	10	5	1
	25	4	2
	50	1	5
	100	4	2
	250	2	4
عدد مرات الافضلية		16	14
SUM			
	10	15	3
	25	10	8
	50	8	10
	100	11	7
	250	7	11
عدد مرات الافضلية		51	39
نسبة الافضلية		%57	%34

يتضح من جدول (16-3) ما يأتي :

1- تفوق طريقة NLS على طريقة MAP بعد مرات الافضلية في تقدير معلمات الانموذج اللوجستي.

2- عند مستوى تشويش 0.1 تفوقت طريقة NLS عند حجوم العينات (10,25,50) وتفوقت طريقة MAP عند حجم العينة 250 في حين تساوت الطريقتين عند حجم العينة (100).

3- عند مستوى تشويش 0.3 تفوقت طريقة NLS عند حجوم العينات (10,100) وتفوقت طريقة MAP عند حجم العينة 25 في حين تساوت الطريقتين عند حجم العينة (50,250).

-4 عند مستوى تشويش 0.5 تفوقت طريقة NLS عند حجوم العينات (10,25,100) وتفوقت طريقة MAP عند حجم العينة (250,50,) .

-5 تفوقت طريقة NLS بعدد مرات الافضـــلية على طريقة MAP عند حجوم العينات (10,25,100) في تقدير معلمات الانموذج اللوجستي.

-6 تفوقت طريقة MAP بعدد مرات الافضـلية على طريقة NLS عند حجوم العينات (50,250) في تقدير معلمات الانموذج اللوجستي.

الاستنتاجات

يمكن تلخيص اهم ماتوصلت اليه البحث من استنتاجات في ضوء الجانب النظري والتطبيقي على النحو الاتي -:

-1 هنالك تقارب كبير في مقدرات الطرائق المستعملة في الجانب التجريبي لتقدير معلمات المعادلات التفاضلية الاعتيادية مع تفوق لطريقة (NLS) في عدد مرات ونسبة الافضلية.

-2 تزداد قيمة MSE لكل معلمة من معلمات نماذج المعادلات التفاضلية المستعملة في هذه البحث بزيادة مستوى تشويش البيانات.

-3 ان الانموذج اللوجستي اكثر ملائمة لبيانات النمو السكاني في العراق مقارنة بأنموذج النمو الاسي وللفترة (1985-2018) ويتم ملاحظة ذلك من خلال مقارنة قيم المعايير الاحصائية (AIC, AICc, BIC)

-4 هنالك تقارب بين القيم الحقيقية لبيانات النمو السكاني في العراق والقيم المقدرة ولكلا الانموذجين كما هو موضح في الجانب التطبيقي.

-5 ملائمة الانموذج اللوجستي (المعادلة اللوجستية لبيانات السكان في العراق بشكل اكبر من انموذج النمو الاسي نموذج Malthus).

التوصيات

في ضوء الاستنتاجات التي تم التوصل اليها قامت الباحثة بوضع عدة توصيات وكالآتي.

-1 استعمال طرائق تقدير اخرى مثل الخوارزميات الجينية والشبكات العصبية ومقارنتها مع الطرائق المستعملة في هذه البحث.

-2 دراسة أنموذجات اخرى من نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية.

-3 نوصي وزارة التخطيط والجهات المعنية بالاعتماد على نتائج القيم التنبؤية للأنموذج اللوجستي للتنبؤ ببيانات النمو السكاني في العراق ووضع الخطط المستقبلية على ضوء هذه البيانات.

-4 تعميم هذه الدراسة الى دراسات مشابهة على مستوى بيانات كل محافظة والأخذ بالنتائج والأفادة منها في وضع الخطط المستقبلية.

اولا: المصادر العربية

-1Bouqfa, Ismail, Al-Hanadwa, Ayesh, “Ordinary Differential Equations Solutions and Applications,” University of Science and Technology, Yemen.

-2Central Bureau of Statistics, Ministry of Planning and Development Cooperation, Statistical Collection for the year 2018

-3Hussein, Wafa Jaafar, (2018), “Estimating fixed and time-varying parameters in nonlinear differential equation models with a practical application,” doctoral thesis, College of Instrumentation and Economics, University of Baghdad.

-4Khadija Abdullah Yahmed, (2009), “The Importance of Statistical Indicators in Human Development,” research submitted to the Second Arab Statistical Conference, No Development Without Statistics, held in Libya for the period from 2-4 November.

-5Khawaja, Dr. Khaled Zuhdi. “Population projections by age and gender,” Arab Institute for Training and Statistical Research, Baghdad.

-6Al-Rubaie Muhammad Uraibi Yasser, (2011). “The impact of government health spending on sustainable human development in Iraq,” Master’s thesis, College of Administration and Economics, Al-Mustansiriya University.

-7Rawhi, Ibrahim Al-Khatib, (2012), “Introduction to Differential Equations”, first edition, Dar Al-Masirah.

-8Al-Zarkani, Jawad Kazem, (2015), “Applications of Differential Equations”, Wasit University, College of Education.

-9Al-Shalaqani, Dr. Mustafa. “Methods of demographic analysis”, Cairo University Press, Kuwait.(1985) ,

-10Aziz, Maysoon Mal Allah, Abdullah, Asma Abdel Moneim, (2005), “Building a dynamic system for time series with few parameters,” Iraqi Journal of Statistical Sciences, No. 8, pp.(165-140) .

-11Al-Nasser, Abdel Majeed Hamza, Jumaa, Ahlam Ahmed (2007) “Comparison between methods for determining the rank of the natural autoregressive model using generative data and data for some climate elements in Iraq,” Journal of Economic and Administrative Sciences, College of Administration and Economics, University of Baghdad, Iraq, Issue (48), pp. 251-272.

ثانيا: المصادر الاجنبية:

1- Abell, M. L., & Braselton, J. P. (2016). Differential equations with Mathematica. Academic Press.
2- Ascher, U. M., & Petzold, L. R. (1998). Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations (Vol. 61). Siam.
3- Brunel, N. (2007), "Parameter Estimation of ODE's via Nonparametric Estimators". (Report Eurandom; Vol. 200705). Eindhoven: Eurandom General.
4- Cao, J., Wang, L., and Xu, J. (2011),"Robust Estimation for Ordinary Differential Equation Models". Biometrics, 67(4), 1305–1313.
5- Ding , A. and Wu,H.(2014)," Estimation Of Ordinary Differential Equation Parameters Using Constrained Local Polynomial Regression".Statistica Sinica 24 ,1613-1631.
6- Donnet, S., & Samson, A. (2007). Estimation of parameters in incomplete data models defined by dynamical systems. Journal of Statistical Planning and Inference, 137(9), 2815-2831.
7- Draper, N. R., & Smith, H. (1998). Applied regression analysis (Vol. 326). John Wiley & Sons.[SQR1]
8- Goshu, A. T., & Koya, P. R. (2013). Derivation of inflection points of nonlinear regression curves-implications to statistics. Am. J. Theor. Appl. Stat, 2(6), 268-272.[MAP]
9- Hemker, P. W. (1972). Numerical methods for differential equations in system simulation and in parameter estimation. Analysis and Simulation of biochemical systems, 28, 59-80.[SQR3]
10- Holte, S. E. (2016). A Consistent Direct Method for Estimating Parameters in Ordinary Differential Equations Models. arXiv preprint arXiv:1601.04736.
11- Hu,T.,Yanping ,Q., and Hengjian ,C., (2015)," Robust Estimation of Constant and Time-Varying Parameters In Nonlinear Ordinary Differential Equation Models". Journal of Nonparametric Statistics, DOI: 10.1080/10485252.2015.1042377.
12- Huang, H., Handel, A., & Song, X. (2020). A Bayesian approach to estimate parameters of ordinary differential equation. Computational statistics, 35(3), 1481-1499.[A]
13- Jennrich,R.I. (1995), "An Introduction to Computational Statistics-Regression Analysis", Prentice-Hall International ,INC
14- Kak, A. (2014). Ml, map, and bayesian the holy trinity of parameter estimation and data prediction. An RVL Tutorial Presentation at Purdue University, 10.[SQR2]
15- Liang, H., and Wu, H. (2008)," Parameter Estimation for Differential Equation Models Using a Framework of Measurement Error in Regression Models". Journal of the American Statistical Association. 103:484, 1570-158 .
16- Linga, P., Al-Saifi, N., & Englezos, P. (2006). Comparison of the Luus− Jaakola optimization and Gauss− Newton methods for parameter estimation in ordinary differential equation models. Industrial & engineering chemistry research, 45(13), 4716-4725.
17- Miao, H., Dykes, C., Demeter, L. and Wu, H. (2009),"Differential Equation Modeling of HIV Viral Fitness Experiments Model Identification". Model Selection, And Multi-Model Inference. Biometrics 65 292-300.
18- Verhulst, P. F. (1847). Deuxième mèmoire sur la loi d'accroissement de la population. Nouv. Mém. Acad. R. Sci. Lett. B.-Arts Belg, 20, 142-173.
Verhulst, P. F. (1847). Recherches mathematiques sur la loi d'accroissement de la population.Nouv. mem. de l'Academie Royale des Sci. et Belles-Lettres de Bruxelles, 18:1