مقارنة عدة دوال رابطة لتقدير دالة حسن المطابقة باستخدام المحاكاة

Estimation association function during copula by using simulation

المدرس جاسم حسن لازم

الكلية التقنية الإدارية / بغداد

المستخلص

إن دالة الرابطة هي أداة تسمح بنمذجة الدوال الحدية وتحديد التوزيع الثنائي المشترك لتلك الدوال في هذا البحث تم اختيار أربع أنواع من دوال الرابطة وهي دالة Placket ودالة Frank ودالة Clayton ودالة Gumbl ومن اجل الوصول إلى أفضل دالة رابطة تمت المقارنة بين هذه الدول وباستخدام حجوم عينات مختلفة (100,50,30,10) من خلال استخدام المحاكاة اذ تم استخدام مقياس المقارنة متوسط مربعات الخطأ MSE حيث أظهرت النتائج بان دالة Gumbl هي الأفضل من بين الدوال المستخدمة في البحث.

Abstract

The function of the Association is a tool that allows modeling functions marginal and determine the distribution of bilateral common for those countries in this study were selected four types of functions which function Plckett, frank , Clayton and function gumbel has comparative between these functions using a scale MSE and through the volumes of different samples (10,30,50,100) has been shown to be better than during the Association scale.

المبحث الاول

1-مقدمة البحث

تعد دالة الرابطة من المواضيع الحديثة وهي أداة مهمة لنمذجة التوزيعات متعددة المتغيرات وذات التطبيقات الواسعة في الحقول الاقتصادية والمالية والطبية.

ولدراسة اي ظاهره يكون هناك العديد من المتغيرات وهذه المتغيرات قد تكون مرتبطة او مستقلة , في حالة كون هذه المتغيرات مستقلة لا يوجد هناك صعوبة في إيجاد الدالة المشتركة بين هذه المتغيرات وبالتالي يمكن تقديرها واختبارها , ولكن في حالة كون هذه المتغيرات معتمدة سوف يكتنفها العديد من المشاكل وصعوبة الحسابات الرياضية لأكثر من متغير متمثلة بحالة التوزيع الثنائي , والسؤال الأهم هو ما مدى التناغم أو التوافق الذي نحصل عليه من خلال موافقة توزيعين مشتركين ؟ والجواب على هذا السؤال يكمن في إيجاد أفضل مقدر للرابطة والتي هي احد الحلول المهمة لإيجاد أفضل تناغم لدالة التوزيع المشتركة والتي هي عبارة عن مقياس لا معلمي بين المتغيرات العشوائية والذي بدا يؤدي دورا في نظرية الإحصاء الرياضي من خلال

أ- تحديد الدوال الحدية التي دوالها التراكمية

$$F_1, \ldots, F_n$$

ب- تحديد تركيبة الاعتمادية للمتغيرات العشوائية

ج- تحديد الرابطة المناسبة

2-الدراسات السابقة

أجريت العديد من الدراسات حول موضوع دوال الرابطة وذات التطبيقات الواسعة في الحقول الاقتصادية والمالية والطبية وقد وجدت العديد من عوائل الرابطة االلامعلمية التي تشترك معظمها بخصائص تتمثل في تحديد دالة الرابطة وبالتالي إيجاد التوزيعات المعلمية المشتركة , [1].

تعرف الرابطة هي أنها دالة لتوزيع متعدد المتغيرات معرفة على المجال $[0,1]^n$ وان التوزيعات الحدية الأصلية هي من التوزيع المنتظم , وهنا يمكن القول ان الرابطة هي الدوال التجميعية (التراكمية) لتوزيعات متعددة المتغيرات ومن النوع المستمر مع توزيعات أحادية لمتغيرات محولة [8] Nelsen (2006) .

وفي عام 2012 ذكر [6] Maik.ذكران هناك طريقة جديدة لتطوير شجرة الجذور وهي تطوير الى اللامعلمية المستندة الى رتبة طريقة التقدير trivariat .

في عام 2013 بين [7] Marek وعند دراسة لمحاكاة مجموعة كبيرة من الحاسوب لإيجاد ومراقبة الإبعاد المكانية أو الأنواء الجوية وقد استخدمت رابطة لإيجاد التحليل المناسب لتقدير الاعتمادية العالية بين المتغيرات المدروسة .

وفي عام 2013 قام [4] Johan عند دراسة مجموعة من المتغيرات المعتمدةs تم إيجاد مجموعة من الصيغ الرياضية لإيجاد حدود الثقة لمجوعة من دوال حسن المطابقة لتقدير association between two random variable .

وفي عام 2013 ذكر [3] Ir `en تم دراسة اختبار يسمى اختبار ربع الدائرة الايجابي من خلال اخذ مجموعة من التقدير عينات واستخدام طريقة المحاكاة للتقدير المعلمي بالاعتماد على المقدر اللامعلمي في عملية الاختبار.

3-هدف البحث

في بحثنا هذا سيتم مقارنة أربع أنواع من دوال الرابطة لتقدير دالة حسن المطابقة ولعدة قيم الى المقدر θ ولحجوم عينات مختلفة لبيان أفضلية اي من الدوال من خلال إيجاد أربعة أنواع من التوزيعات الثنائية المشتركة للتوزيع الثنائي الآسي المشترك وإجراء المقارنة من خلال إيجاد مجموع مربعات الخطأ وإعطاء قيم مختلفة لمعلمة التوزيع الأول والثاني .

المبحث الثاني -الجانب النظري

سيتم في المبحث التطرق إلى أهم نظرية في موضوع الرابطة والى الروابط المستخدمة وطرق إيجاد التوزيع الثنائي الآسي المشترك لكل رابطة وعملية إيجاد المقدرات لكل رابطة.

إن نظرية (Sklar) هي من أوسع النظريات التي جعلت من دالة الرابطة الأساس النظري للعديد من الباحثين للبحث في موضوع دالة الرابطة لدوال التوزيعات الثنائية التي تمتلك دوال حدية .

ولبيان نظرية [8][10] (Sklar's theorem) نفترض ان H دالة من المتغيرات العشوائية $X_1, X_2 ..., X_n$

وان لكل متغير X_i دالة توزيع حدية $F_1,\ldots,F_n$ فهناك n من الروابط C لكل X في $\overline{R}$

إذ إن:

$$H(x_1,\ldots,x_n) = C(F_1(x_1),\ldots,F_n(x_n)) \qquad \ldots.(1)$$

فإذا كانت الدوال التجميعية $F_1,..,F_n$ من النوع المستمر فان C دالة وحيدة (unique)

ومن اهم خصائص الرابطة لمتغيرين مشتركين (u,v) معرفين على المجال $C:I^2 \to I$ الخصائص الآتية:

1.ان لكل u, v في I يكون

$$C(u,0) = 0 = C(0,v) \qquad \ldots.(2)$$

$$C(u,1) = u \qquad and \qquad C(1,v) = v \qquad \ldots.(3)$$

2 وان لكل u_1,u_2,v_1,v_2 يكون I في

$$C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \geq 0 \qquad \ldots.(4)$$

بحيث ان $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$

إذ أن C مستمرة وثنائية التزايد (2−increasing)

1- تقدير الرابطة [1][2] Estimation of copula

هناك عدة طرق لإيجاد مقدر الرابطة فمن خلال إيجاد قيمة الارتباط يتم إيجاد علاقة رياضية ومن ثم إيجاد قيمة θ التي تمثل قيمة الرابطة او دالة حسن المطابقة او تقديرها مباشرتا من خلال مقدر الامكان الاعظم كما هي الطريقة المستخدمة في البحث .

نفترض ان yi يمثل متغير له دالة توزيع احتمالية وان لوغاريتم دالة التوزيع المشتركة هو

$$L(y_i,\theta_i,\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log f_i(y_i,\theta_i,\theta) \qquad \ldots. (5)$$

فان مقدر الإمكان الأعظم إلى θ هو $\hat{\theta}$ والى θ_i هو $\hat{\theta}_i$ ناتجة من :

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1}, \frac{\partial L}{\partial \theta_2}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial \theta_d}, \frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = \underline{0} \qquad \ldots.(6)$$

2- الروابط المستخدمة

2-1 رابطة Placket [1][8]

تمتلك رابطة Placket دالة توزيع مشتركة Cdf وحسب المعادلة

$$C(u,v)=\frac{[1+(\theta-1)(u+v)\mp\sqrt{[1+(\theta-1)(u+v)]^2-4vu\theta(\theta-1)}]}{2(\theta-1)} \qquad \theta>0$$

$$....(7)$$

ومن خلال استخدام طريقة الامكان الاعظم نحصل على دالة pdf [8]

$$c(u,v)=\frac{\theta uv\{1+(u+v)(\theta-1)-2vu(\theta-1)\}}{[(1+(u+v)((\theta-1))^2-4uv\theta(\theta-1)]^{3/2}} \qquad ....(8)$$

ومن خلال تطبيق المعادلة (6)نحصل على المقدر

$$L=\log\pi_{i=1}^{n}c(u,v) \qquad (9)$$

$$L=n\log\theta+\sum\log(uv)+\sum\log\{(\theta-1)(u+v-2vu)+1\}-$$
$$3/2\sum\log\{[\,1+(u+v)(\theta-1)]^2-4uv\,\theta(\theta-1)\} \qquad ....(10)$$

ومن المعادلة أعلاه نحصل على

$$3\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{(u+v)^2-4vu}{[1+(u+v)(\theta-1)]^2-4\theta(\theta-1)vu}$$
$$-3\sum_{i=1}^{n}\frac{(u+v)-(v+u)^2+2uv}{[1+(u+v)(\theta-1)]^2-4\theta(\theta-1)vu}+\frac{n}{\theta}$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(u+v)-2vu}{\{(\theta-1)(u+v-2uv)+1\}}=0$$

وبالتعويض عن قيمة u,v بما يساويها بحث ان

$$u=\left(1-\exp\frac{x}{\theta_1}\right)$$
$$v=\left(1-\exp\frac{y}{\theta_2}\right)$$

نحصل على المقدر

$$3\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{((1-\exp x/\theta_1)+(1-\exp y/\theta_2))^2-4(1-\exp y/\theta_2)(1-\exp x/\theta_1)}{[1+(1-\exp y/\theta_2+(1-\exp x/\theta_1))(\theta-1)]^2-4\theta(\theta-1)(1-\exp x/\theta_1)1-\exp y/\theta_2}$$

$$-3\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-\exp y/\theta_2+(1-\exp x/\theta_1))-((1-\exp x/\theta_1)+1-\exp y/\theta_2)^2+21-\exp y/\theta_2(1-\exp x/\theta_1)}{[1+(1-\exp y/\theta_2+(1-\exp x/\theta_1))(\theta-1)]^2-4\theta(\theta-1)(1-\exp x/\theta_1)(1-\exp y/\theta_2)}+\frac{n}{\theta}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{((1-\exp y/\theta_2)+(1-\exp x/\theta_1))-2(1-\exp x/\theta_1)(1-\exp y/\theta_2)}{\{(\theta-1)(1-\exp y/\theta_2)+(1-\exp x/\theta_1)-2(1-\exp y/\theta_2)(1-\exp x/\theta_1))+1\}}=0 \qquad ...(11)$$

2-2رابطة Clayton [5]

ان دالة التوزيع المشتركة c.d.f لرابطة Clayton هو

$$C_\theta=(u^{-\theta}+v^{-\theta})^{-\frac{1}{\theta}} \qquad ...(12)$$

ومن المعادالة (5)نستطيع ايجاد دالة p.d.f

$$C_\theta(u,v)=(1+\theta)(u+v)^{-\theta-1}(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-2-\frac{1}{\theta}} \dots\dots..(13)$$

ومن خلال المعادلة (9) نستطيع ايجاد مقدر الرابطة

$$=\frac{\mathrm{n}}{1+\theta}$$

$$-\sum\log\big((1-\exp x/\theta_1)\,(1-\exp y/\theta_2)\big)$$

$$-\left[2+\frac{1}{\theta}\sum\frac{-(1-\exp x/\theta_1)^{-\theta}log(1-\exp x/\theta_1)-(1-\exp y/\theta_2)v^{-\theta}log(1-\exp y/\theta_2)}{\left((1-\exp x/\theta_1)^{-\theta}+(1-\exp y/\theta_2)^{-\theta}-1\right)}-\frac{\sum\log(((1-\exp x/\theta_1)^{-\theta}+(1-\exp y/\theta_2)^{-\theta}-1)}{\theta^2}\right] \qquad ...(14)$$

$$\theta>0$$

2-3 رابطة Frank [10][1]

تكون دالة التوزيع المشتركة c.d.f لرابطة Frank كما في المعادلة 15

$$C_\theta(u,v)=-\frac{1}{\theta}log\left(1+\frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{(e^{-\theta}-1)}\right) \qquad ...(15)$$

ومن المعادلة 5 نستطيع ايجاد دالة p.d.f

$$f_\theta(u,v)=\frac{-\theta(e^{-\theta}-1)(e^{-\theta(u+v)})}{[(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)+(e^{-\theta}-1)]^2} \qquad ...(16)$$

$$\theta\in(-\infty,\infty)$$

وباستخدام دالة الامكان الاعظم نحصل على

$$\sum \log(u+v) - 2\sum \frac{e^{-\theta}+e^{\theta u}(u)+e^{\theta v}(v)-e^{-\theta u-\theta v}(u+v)}{\left[1-e^{-\theta}-(1-e^{\theta u})(1-e^{\theta v})\right]^2} + \frac{-n}{\theta}-\frac{e^{-\theta}}{(1-e^{-\theta})} = 0 \dots (17)$$

وبالتعويض عن قيمة u,v بما يساويها نحصل على المقدر بدلالة متغيرات التوليد ولترتيب المعادلة اعلاه تم التعويض عن اجزائها بالرموز وكالتالي

$$A = \log\left((1-\exp x/\theta_1) + (1-\exp y/\theta_2)\right)$$

$$B = e^{-\theta} + e^{\theta(1-\exp x/\theta_1)}\left((1-\exp x/\theta_1)\right) + e^{\theta(1-\exp y/\theta_2)}\left((1-\exp y/\theta_2)\right)$$

$$C = e^{-\theta(1-\exp x/\theta_1)-\theta(1-\exp y/\theta_2)}\left((1-\exp x/\theta_1) + (1-\exp y/\theta_2)\right)$$

$$D = \left[1 - e^{-\theta} - (1 - e^{\theta(1-\exp x/\theta_1)})(1 - e^{\theta(1-\exp y/\theta_2)})\right]$$

$$E=\frac{-n}{\theta}-\frac{e^{-\theta}}{(1-e^{-\theta})}$$

نحصل على

$$\sum A - 2\sum \frac{B-C}{D^2} + E = 0 \dots (17)$$

2-4 مقدر Gumbl [2][1]

دالة التوزيع المشتركةc.d.f لرابطة Gumbl هي

$$C_\theta(u,v) = \exp\left[-\left(u^{-\theta}+v^{-\theta}\right)\right]^{-\frac{1}{\theta}} \quad \dots (18)$$

ومن العادلة (5) نستطيع إيجاد دالة p.d.f

$$f_\theta(u,v) = (u,v)\frac{(uv)^{-\theta-1}}{(u^\theta+v^\theta)^{2-\frac{1}{\theta}}}\left[\left(u^\theta+v^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}+\theta-1\right] \quad \dots (19)$$

ومن المعادلة (9) نحصل على المقدر

$$0 = \sum \log(uv) + \sum \frac{u^\theta logu + v^\theta logv + 1}{(u^\theta+v^\theta)+(\theta-1)} - \left\{\left(2-\frac{1}{\theta}\right)\sum \frac{u^\theta logu + v^\theta logv}{(u^\theta+v^\theta)} + \sum \log\left(u^\theta+v^\theta\right)\left(\frac{1}{\theta^2}\right)\right\}$$

$$\theta > 0 \dots\dots\dots (20)$$

المبحث الثالث –الجانب التجريبي

لغرض إجراء الجانب التطبيقي للمقدرات التي تم الحصول عليها في الجانب النظري يتطلب اجراء عملية التوليد للمتغيرات المدروسة ولغرض إجراء عملية المحاكاة يتطلب القيام بالخطوات التالية:

1–توليد قيمة x,y باستخدام دالة التوزيع c.d.f للتوزيع الآسي للمتغير x وكما يلي:

$$F(x)=1-\exp(-\frac{x}{\theta 1})$$

$$u=1-\exp(-\frac{x}{\theta 1})$$

$$X=-\log(1-u) \qquad \ldots.(21)$$

وبنفس الطريقة وباستخدام طريقة التحويل العكسي للمتغير y

$$F(y)=1-\exp(-\frac{y}{\theta 2})$$

$$v=1-\exp(-\frac{y}{\theta 2})$$

$$Y=-\log(1-v) \qquad \ldots.(22)$$

بعد توليد البيانات نحصل على قيم (x,y) والتي تخص التوزيع الثنائي الآسي المشترك .

2–نقوم بعملية إيجاد قيم المقدرات للروابط المختارة من خلال المحاكاة وذلك بتطبيق الصيغ بالمعادلات (11,14,17,20) والتي تم الحصول عليها في الجانب النظري.

3–تحديد قيم افتراضية الى $\theta = (1.5,2.5,3)$.

4– تم اختيار حجوم عينات n=(10,30,50,100)

1–جداول البحث

جدول رقم (1)يبين نتائج التقدير لمتوسط مربعات الخطأ(MSE) لعينة حجم (n=10)

θ	θ_1	θ_2	frank	Clayton	Placket	Gumbl	الأفضل
1.5	1	2	6.1870	21.3840	20.7097	0.1302	Gumbl
2.5	1	2	4.8162	53.0602	23.6842	1.7502	Gumbl
3	1	2	4.3861	68.8262	31.6530	3.1542	Gumbl
θ	θ_1	θ_2	frank	Clayton	Placket	Gumbl	
1.5	2	3	11.0028	21.4016	25.6974	0.1287	Gumbl
2.5	2	3	7.9189	52.9829	23.9595	14.1379	frank
3	2	3	11.6400	68.8118	27.6592	25.5903	frank

من خلال الجدول رقم 1 وعند حجم عينة (n=10) وعند القيم الافتراضية(θ_1=1,θ_2=2, θ=1.5) تبين ان رابطة Gumbl تمتلك اقل مجموع مربعات الخطأ وكذلك عند القيم الافتراضية(θ_1=2,θ_2=3, θ=1.5) تبين ان رابطة Gumbl تمتلك اقل مجموع مربعات الخطأ ومن الملاحظ ان عند حجم عينة(n=10) ولجميع الحالات رابطة Gumbl هي الأفضل عدا حالة القيم الافتراضية (θ_1=2,θ_2=3, θ=2.5,3) وعند رابطة Frank هي الأقل لمجموع مربعات الخطأ.

جدول رقم (2) يبين نتائج التقدير لمتوسط مربعات الخطأ(MSE) لعينة حجم (n=30)

θ	θ_1	θ_2	frank	Clayton	Placket	Gumbl	الأفضل
1.5	1	2	5.1910	21.3348	2.6463	0.0682	Gumbl
2.5	1	2	4.4631	53.0004	4.1038	1.7282	Gumbl
3	1	2	4.2931	68.7654	6.2043	3.3399	Gumbl
θ	θ_1	θ_2	frank	Clayton	Placket	Gumbl	
1.5	2	3	10.7168	21.3466	1.7301	0.1254	Gumbl
2.5	2	3	7.1132	52.9688	3.7373	1.8892	Gumbl
3	2	3	7.5722	68.7867	4.6787	3.5363	Gumbl

من خلال الجدول رقم 2 وعند حجم عينة (n=30) ولجميع القيم الافتراضية(θ_1=1,2,θ_2=3,2, θ=2.5,3,1.5) تبين ان رابطة Gumbl تمتلك اقل مجموع مربعات الخطأ .

جدول رقم (3)يبين نتائج التقدير لمتوسط مربعات الخطأ(MSE) لعينة حجم (n=50)

θ	θ_1	θ_2	frank	Clayton	Placket	Gumbl	الأفضل
1.5	1	2	5.0889	21.3235	1.5927	0.0689	Gumbl
2.5	1	2	4.4190	52.9640	2.2150	1.7255	Gumbl
3	1	2	3.0537	68.7532	5.1966	3.2998	frank
θ	θ_1	θ_2	frank	Clayton	Placket	Gumbl	
1.5	2	3	10.3667	21.3121	1.2271	0.1562	Gumbl
2.5	2	3	6.1531	52.9675	3.5265	1.9071	Gumbl
3	2	3	7.2435	68.7745	3.8645	3.5354	Gumbl

من خلال الجدول رقم 3 وعند حجم عينة (n=50) وعند القيم الافتراضية(θ_1=1,θ_2=2, θ=1.5) تبين ان رابطة Gumbl تمتلك اقل مجموع مربعات الخطأ ,عدا حالة القيم الافتراضية (θ_1=1,θ2 =2, θ=3) وعند رابطة Frank هي الاقل لمجموع مربعات الخطأ.

جدول رقم (4)يبين نتائج التقدير لمتوسط مربعات الخطأ(MSE) لعينة حجم (n=100)

θ	θ_1	θ_2	frank	Clayton	Placket	Gumbl	الأفضل
1.5	1	2	4.4899	21.3184	0.9040	0.0690	Gumbl
2.5	1	2	3.6824	52.9559	0.4358	1.7177	Placket
3	1	2	2.8929	68.7496	4.9505	3.2974	frank
θ	θ_1	θ_2	frank	Clayton	Placket	Gumbl	
1.5	2	3	8.3769	21.2998	0.1673	0.1543	Gumbl
2.5	2	3	6.8210	52.9392	3.2710	1.9071	Gumbl
3	2	3	5.8336	68.7743	3.1747	3.5346	Placket

من خلال الجدول رقم 4 وعند حجم عينة (n=100) وعند القيم الافتراضية(θ_1=1,θ_2=2, θ=1.5) تبين ان رابطة Gumbl تمتلك اقل مجموع مربعات الخطأ وكذلك عند القيم (θ_1=1,θ_2=2, θ=2.5) تبين ان رابطة Placket اقل مجموع مربعات خطأ وكذلك عند القيم الافتراضية(θ_1=2,θ_2=3, θ=1.5) ان رابطة Gumbl تمتلك اقل مجموع مربعات الخطأ.

المبحث الرابع –الاستنتاجات والتوصيات

1- الاستنتاجات

1- حصل تقدير رابطة Gumbl على المرتبة الأولى وذلك لامتلاكها اقل متوسط مربعات الخطأ MSE من تقدير بقية الروابط لاغلب القيم الافتراضية.

2- بينت النتائج ان رابطة Frank هي الافضل بالنسبة للقيم الافتراضية

$(\theta = 2.5,3, \theta 1 = 2, \theta 2 = 3)$ ولحجم عينة 10 كما حصلت هذه الرابطة على التقدير الافضل للقيم الافتراضية $(\theta = 3, \theta 1 = 1, \theta 2 = 2)$ولحجوم العينات (100,50).

3-كما بينت النتائج ان تقدير رابطةPlacket هي الافضل بالنسبة للقيم الافتراضية

$(\theta = 2.5, \theta 1 = 1, \theta 2 = 2)$ وللقيم الافتراضية $(\theta = 3, \theta 1 = 2, \theta 2 = 3)$لحجم عينة 100.

4-من خلال النتائج اعلاه حصل تقدير رابطة Frank على المرتبة الثانية بينما جاء تقدير رابطة Placket على المرتبة الثالثة بينما حصل تقدير رابطة Clayton على المرتبة الاخيرة.

2-التوصيات

1-يوصي الباحث باستخدام رابطة Gumbl عند تقدير قيمة دالة حسن المطابقة.

2-يوصي الباحث باستخدام القيم الصغيرة الى قيم المعلمة θ عند اجراء تطبيق عملي على الرابطة

3-يوصي الباحث باستخدام قيم مقدرة لمعلمة التوزيع الاسي عند اجراء المحاكاة

المصادر

1- إيمان عبد علي (2006) استخدام نظرية الرابطة لتحليل دالة البقاء ذات المتغيرين أطروحة دكتوراه , كلية الإدارة والاقتصاد , جامعة بغداد .

2.Gijbels, I. & Mielniczuk, (1990). **Estimating the density of a copula function**. Communications in StatisticsTheory and Methods, 19(2), 445–464.

3. Ir `ene, and Dominik ,Sznajder, (2013) " **Positive quadrant dependence testing and constrained copula estimation"** The Canadian Journal of Statistics Vol. 41, No. 1, 2013, Pages 36–64

4.Johan and Nathan,(2013)**" Nonparametric estimation of the tree structure of a nested Archimedean copula**" arXiv:1304.1384v1 [stat.ME] 4 Apr 2013.

5.Lifang, Yihong and Xiaodong, (2010) **"Copula Estimation of Distribution Algorithm Sampling from Clayton Copula"**Journal of Computational Information Systems 6:7(2010) 2431-2440 http://www.Jofcis.com.

6.Maik , Jongbloed and Keilegom,(2012) **"On the identify ability of copulas in bivariate competing risks models** " arXiv:1301.2212v1 [math.ST] 10 Jan 2013

7.Marek Omelka a, No¨ el Veraverbeke b,c, Ir_ene Gijbels d,(2013**) "Bootstrapping the conditional copula** "Journal of Statistical Planning and Inference 143 (2013) 1–23

8. Nelsen, R. B. (2006),' **An Introduction to Copulas'**, Springer, New York.

9. Naoyuki Ishimura*, Yasukazu Yoshizawa (2012) **Evolution of multivariate copulas in discrete processes Procedia Economics and Finance** (2012) 186 – 192

10.R. Schefzik, T. L. Thorarinsdottir and T. **GneitingUncertainty Quanti_cation in Complex Simulation Models Using Ensemble Copula Coupling** arXiv:1302.7149v1 [stat.ME] 28 Feb 2013