

مقارنة أداء بعض طرائق التقدير لمعاملات توزيع ماكدونالد فريجت مع تطبيق عملي

A Comparison of the Performance of Some Estimation Methods for the Parameters of the McDonald Fréchet Distribution with an Empirical Application

م. د. عدنان مصطفى السنجاري

adnan_mustafa@ntu.edu.iq

الجامعة التقنية الشمالية/ الكلية التقنية الإدارية-الموصل

المستخلص

يدرس هذا البحث إحدى التوزيعات الاحتمالية التي تمتلك خمس معاملات، وهو توزيع معمم ماكدونالد لتوزيع فريجت الذي يسمى توزيع ماكدونالد فريجت McDonald Fréchet؛ إذ عرض دالة الكثافة الاحتمالية له وكذلك كل من دالة التوزيع التراكمية والبقاء والخطورة والدالة العكسية (Quantile Function)؛ فضلاً عن بعض الخواص الإحصائية مثل المتوسط والتباين والالتواء والتفلطح، كما قدرت معاملات التوزيع باستعمال طرائق تقدير مختلفة وهي طريقة الإمكان الأعظم (MLE) وطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS)، وطريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) وطريقة كرامر-فون-ميزس (CVM) وطريقة أقصى حاصل للتباين (MPS). وقد جرت المقارنة بين تلك الطرائق باستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ، وقد دلت النتائج إلى أفضلية طريقة أقصى حاصل للتباين (MPS) بشكل مجمل، يليها طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS). وقد طُبّق على بيانات حقيقية تمثلت 50 مشاهدة تمثل الوقت لحين الفشل للسيراميك الترميمي لأسنان المراجعين، وقد أظهر النتائج أن طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) أكثر ملاءمة للبيانات الحقيقية.

Abstract

In this research, we studied a five-parameter probability distribution, the McDonald-Fréchet distribution. Its probability density function, cumulative distribution function, survival function, hazard function, and quantile function were presented, in addition to some statistical properties such as mean, variance, skewness, and kurtosis. The distribution parameters were estimated using different estimation methods, namely, maximum likelihood estimation (MLE), ordinary

least squares (OLS), weighted least squares (WLS), Cramer-von-Mises (CVM), and maximum product of Spacing (MPS). A comparison was made between these methods using the mean square error (MSE) criterion. The results indicated that the Maximum Product of Spacing (MPS) method is generally superior, followed by the ordinary least squares (OLS). The study was applied to real data of 50 observations representing the time to failure of ceramic restorations for patients' teeth, and the results showed that the ordinary least squares (OLS) method is more suitable for real data.

1. المقدمة

تعدّ التوزيعات الاحتمالية من الركائز الأساسية في علوم الإحصاء الحديث سواء من الوجهة التطبيقية أو النظرية، فهي تستعمل في نمذجة العديد من الظواهر في العلوم الطبيعية والإنسانية والطبية والهندسية. وتكمن أهمية التوزيعات الاحتمالية عموماً في كونها توفر الأساس النظري والرياضي لفهم السلوك الاحتمالي للمتغيرات العشوائية، ومن ثمّ تطبيقها في الظواهر الواقعية مما للاستفادة منها لتعزيز دقة القرار وتحليل المخاطر.

ومع التطور المستمر في البيانات على أرض الواقع وتنوع أشكالها، تظهر هناك حاجة فعلية إلى توزيعات تمتاز بالمرونة علاوة على التوزيعات الكلاسيكية. على سبيل المثال أن التوزيعات التي تحتوي على معلمات أكثر تكون ذات مرونة أكثر؛ إذ تسهم هذه المعلمات الإضافية في إتاحة قدرة أفضل على تمثيل خصائص البيانات مثل الالتواء والتفلطح، مما يجعل الباحث أكثر قدرة على ملائمة التوزيع بشكل أكثر واقعية مع البيانات الحقيقية.

ونتيجة لذلك قد ظهر ما يسمى بتعميم ماكdonالد (McDonald Generalization) كتقنية مرنة لتوسيع التوزيعات الاحتمالية الكلاسيكية، إذ طبق على العديد من التوزيعات مثل التوزيع الطبيعي Normal (Cordeiro et al., 2012) وتوزيع Weibull (Hashimoto et al., 2015)، وتوزيع Exponential (Cordeiro et al., 2012)، وتوزيع Lomax (Lemonte & Cordeiro, 2011)، وتوزيع Burr (Gomes et al., 2015) وتوزيع كومبرتز (Roozegar et al., 2017)، وغيرها، وذلك لتعزيز مرونتها وتحسين تمثيلها الإحصائي للبيانات.

انطلاقاً من كل ما سبق، يمثل توزيع ماكdonالد-فريجت (McDonald Fréchet) أحد النماذج الجديدة التي تجمع بين قوة توزيع فريجت في تمثيل البيانات ذات الذيل الثقيل، والمرونة التي يقدمها تعميم ماكdonالد في التوسع على مستوى الشكل والذي اقترح بالأصل من قبل (السلماي، 2021)؛ إذ درس التوزيع وبعض خواصه الإحصائية؛ فضلاً عن تقدير معلمتين من معلمات التوزيع عن طريق مقدرات الإمكان الأعظم وبيز.

وفي هذا البحث سنقوم بتقدير جميع معلمات التوزيع بخمس طرائق شائعة للتقدير، وهي كل من طريقة الإمكان الأعظم Ordinary Least Squares (OLS) وطريقة المربعات الصغرى Maximum Likelihood Estimation (MLE) وطريقة المربعات الصغرى الموزونة Weighted Least Squares (WLS) وطريقة أقصى حاصل للتباعد (MPS)

Maximum Product of Spacing وطريقة كرامر-فون-ميزس (CVM) لمقارنة أدائها باستعمال تجارب محاكاة وبيانات واقعية.

2. توزيع ماكدونالد فريجت

يمثل توزيع فريجت (Fréchet distribution) أحد التوزيعات المستعملة في تحليل بيانات البقاء (Survival Data) ونمذجة القيم القصوى (Extreme Values)، وذلك لما يمتاز به من ذيل ثقيل يناسب نمذجة الظواهر النادرة، وقد اقترح من قبل (Fréchet, 1927). وله دالة كثافة احتمالية Probability Density Function (PDF) ودالة توزيع تراكمية Cumulative Distribution Function (CDF) معرفة كما يأتي (Coles et al., 2001):

$$g(x; \alpha, \beta) = \alpha \beta^\alpha x^{-(\alpha+1)} e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}, \quad \dots (1)$$

$$G(x; \alpha, \beta) = e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha} \quad ; \quad x, \alpha, \beta > 0 \quad \dots (2)$$

إذ إن α تمثل معلمة الشكل (Shape Parameter) و β تمثل معلمة القياس (Scale Parameter). وقد تم تقديم تعميم ماكدونالد (McDonald Generalization) لأول مرة من قبل (McDonald, 1984)، في سياق تحليل الدخل الاقتصادي وتوزيعه. وتعرف دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ماكدونالد المعمم (Alexander et al., 2012) بالصيغة الآتية:

$$f(x) = \frac{c}{\beta(a, b)} g(x) \{G(x)\}^{ac-1} \{1 - [G(x)]^c\}^{b-1} \quad \dots (3)$$

إذ إن $a, b, c > 0$ تمثل معاملات الشكل الإضافية للتوزيع الأساسي. أما دالة التوزيع التراكمية لتوزيع ماكدونالد المعمم فهي الصيغة المعرفة كما يأتي:

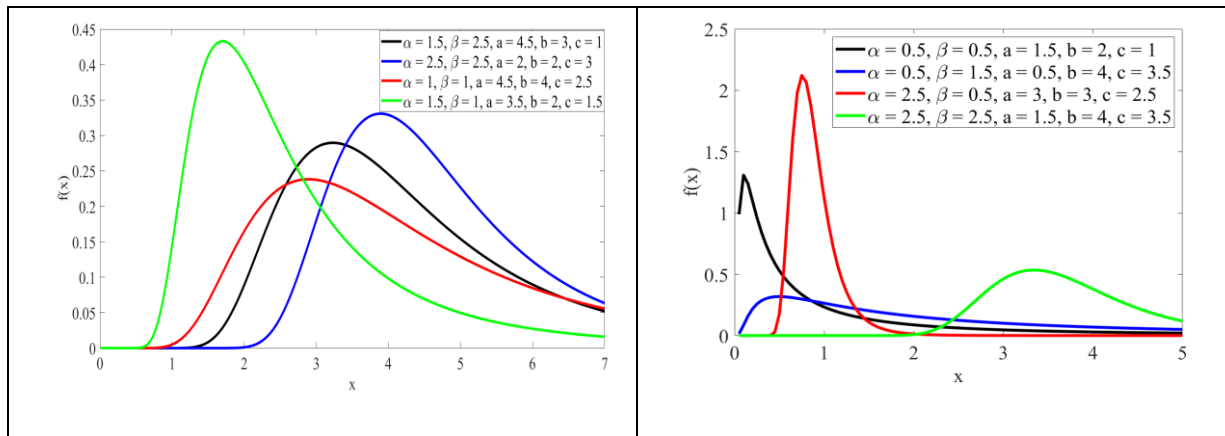
$$F(x) = \frac{1}{\text{Beta}(a, b)} \int_0^{G(x)^c} w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw \quad \dots (4)$$

وقد توصل (السلماي، 2021) إلى صيغ دالة كثافة احتمالية ودالة توزيع تراكمية لتوزيع ماكدونالد فريجت (McFr) McDonald Fréchet بعد التعويض عن كل من (1) و (2) في (3) و (4)، وكما يأتي:

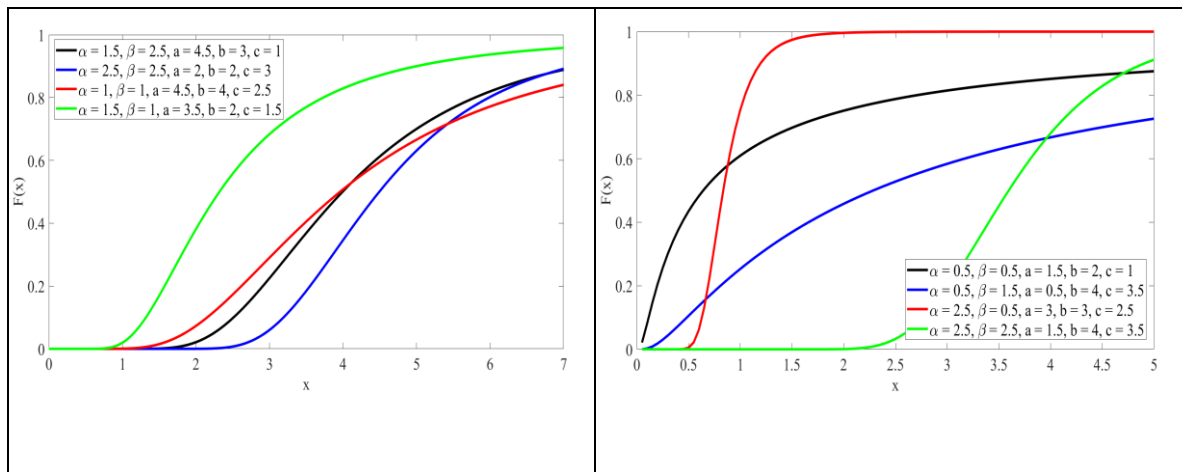
$$f(x) = \frac{ca\beta^\alpha}{\text{Beta}(a, b)} x^{-(\alpha+1)} e^{-ac\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha} \left[1 - \left(e^{-c\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)\right]^{b-1}, \quad \dots (5)$$

$$F(x) = \frac{1}{Beta(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{j!} \frac{\left[e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha} \right]^{c(a+j)}}{\Gamma(b-j) (a+j)} \dots (6)$$

إذ b عدد صحيح موجب. والأشكال الآتية توضح سلوك الدالتين، حيث تعكس الرسومات تأثير اختلاف المعلمات على شكل دالتي الكثافة الاحتمالية والتوزيع التراكمية لتوزيع ماكدونالد فريجت McFr، لكونها تظهر تنوع في التمرکز والانحدار وانتشار القيم، مما يؤيد مرونة هذا التوزيع في تمثيل سلوكيات احتمالية متعددة.



شكل (1): رسم دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع McFr



شكل (2): رسم دالة التوزيع التراكمية لتوزيع McFr

علاوة على ذلك، توصل إلى كل من دالة البقاء ودالة المخاطرة لتوزيع McFr، وكما يأتي:

$$S(x) = 1 - \frac{1}{Beta(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{j!} \frac{\left[e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha} \right]^{c(a+j)}}{\Gamma(b-j) (a+j)} \dots (7)$$

$$h(x) = \frac{\frac{c\alpha\beta^\alpha}{Beta(a,b)} x^{-(\alpha+1)} e^{-ac\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha} \left(1 - \left(e^{-c\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)\right)^{b-1}}{1 - \left(\frac{1}{Beta(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{j!} \frac{\left[e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right]^{c(a+j)}}{\Gamma(b-j) (a+j)}\right)} \dots (8)$$

3. الخواص الإحصائية لتوزيع McFr

يركز في هذا القسم على بعض المقاييس الإحصائية المعروفة مثل الدالة العكسية التي لها فائدة كبيرة عند توليد البيانات عند المحاكاة، والوسط بوصفه أحد أهم مقاييس النزعة المركزية (Measures of Central Tendency) والتباين بوصفه أحد أهم مقاييس التشتت (Measures of Dispersion) وكل من الالتواء (Skewness) والتفلطح (Kurtosis) لكونها من مقاييس الشكل (Measures of Shape)، وقد توصل (السلماني، 2021) إلى صيغ لكل منها (للاطلاع يمكن الرجوع إلى الرسالة الصفحة 45 إلى 54).

الدالة العكسية Quantile Function:

$$x = \frac{\beta}{\left[-\ln\left[1 - (1-u)^{\frac{1}{b}}\right]^{\frac{1}{ac}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}} \dots (9)$$

إذ إن u يتبع التوزيع المنتظم محصور بين الصفر والواحد.

العزم حول الصفر:

$$E(x^r) = \frac{c\beta^\alpha}{Beta(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} (-1)^j \binom{b-1}{j} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-r}{\alpha}\right)}{((ac+jc)\beta^\alpha)^{\frac{\alpha-r}{\alpha}}} \dots (10)$$

المتوسط:

$$\mu_x = \frac{c\beta^\alpha}{Beta(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} (-1)^j \binom{b-1}{j} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)}{((ac+jc)\beta^\alpha)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \dots (11)$$

التباين:

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 \quad \dots (12)$$

الالتواء:

$$SK = \frac{E(x^3) - 3\mu_x E(x^2) + 2(\mu_x)^3}{[\sigma_x^2]^{\frac{3}{2}}} \quad \dots (13)$$

التفطح:

$$KU = \frac{E(x^4) - 4\mu_x E(x^3) + 6(\mu_x)^2 E(x^2) - 3(\mu_x)^4}{[\sigma_x^2]^2} \quad \dots (14)$$

إذ إن $E(x^2)$ و $E(x^3)$ و $E(x^4)$ هي العزم الثاني والثالث والرابع على التوالي.

4. خوارزمية BFGS

تعتبر خوارزمية BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb and Shanno) إحدى الخوارزميات المنضوية تحت عائلة طرائق أشباه نيوتن (Quasi-Newton Method)، التي تستعمل في تحسين الدوال غير الخطية متعددة المتغيرات، وقد اقترحت بشكل مستقل من قبل كل من (Broyden, 1970) و (Fletcher, 1970) و (Goldfarb, 1970) و (Shanno, 1970) وذلك هو السبب وراء تسمية الخوارزمية. وتستعمل لإيجاد نقاط النهايات الصغرى لدالة هدف قابلة للاشتقاق، بمعنى أنها وجدت في الأصل لتصغير الدوال غير الخطية، إلا أنها يمكن أن تستعمل لتعظيم الدوال بالاعتماد على تصغير سالب الدالة المراد تعظيمها، أي:

$$\min_{\theta \in R^n} f(\theta),$$

وذلك إذا أردنا تصغير الدالة $f(x)$ أو

$$\min_{\theta \in R^n} -f(\theta)$$

إذا أردنا تعظيم الدالة $f(x)$.

وتمتاز هذه الطريقة بأنها تعتمد فقط على المشتقة الأولى للدالة وليس المصفوفة الهيسية (Hessian Matrix) التي تمثل مصفوفة المشتقات الثانية، وذلك لأنها تقوم بحساب هذه المصفوفة تكرارياً بشكل تقريبي باستعمال المعادلة الآتية (Nocedal & Wright, 2006):

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} \quad \dots (15)$$

إذن إن،

$$s_k = \theta_{k+1} - \theta_k \quad , \quad y_k = \nabla f(\theta_{k+1}) - \nabla f(\theta_k)$$

بعد ذلك يتم استعمال الصيغة الآتية للتحديث:

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \alpha_k B_k^{-1} \nabla f(\theta_k) \quad \dots (16)$$

حيث إن θ يمثل متجه المعلمات، و α_k يتم تحديدها باستعمال البحث الخطي لضمان تصغير الدالة بشكل كافي.

وقد استعملت الدالة $\text{optim}()$ ضمن حزمة stats في لغة البرمجة الإحصائية R لغرض تعظيم أو تصغير الدوال بالاعتماد على خوارزمية BFGS، حيث توفر هذه الدالة أدوات مرنة لتقدير المعلمات في النماذج الإحصائية (R Core Team, 2025).

5. طرائق تقدير معلمات توزيع McFr

1.5 طريقة الإمكان الأعظم (MLE)

تتلخص فكرة التقدير وفقاً لهذه الطريقة في إيجاد القيم التي تجعل لوغاريتم دالة الإمكان أكبر ما يمكن (Hussain et al., 2022)، حيث إن دالة الإمكان في حالة توزيع ماكسونالد فريجت بالاعتماد على دالة الكثافة الاحتمالية له والمعرفة في المعادلة (5) وكما يأتي (السلماني، 2021):

$$L(\alpha, \beta, a, b, c) = \left(\frac{c\alpha\beta^\alpha}{\text{Beta}(a, b)} \right)^n \prod_{i=1}^n \left(x_i^{-(\alpha+1)} e^{-ac\left(\frac{\beta}{x_i}\right)^\alpha} \left[1 - e^{-c\left(\frac{\beta}{x_i}\right)^\alpha} \right]^{b-1} \right) \dots (17)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادلة (17) نحصل على:

$$\begin{aligned} l = \ln(L(\alpha, \beta, a, b, c)) &= n \ln c + n \ln \alpha + n\alpha \ln \beta + n \ln(\Gamma(a + b)) \\ &- n \ln(\Gamma(a)) - n \ln(\Gamma(b)) - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i \\ &- ac \sum_{i=1}^n \left(\frac{\beta}{x_i}\right)^\alpha + (b - 1) \sum_{i=1}^n \ln \left[1 - e^{-c\left(\frac{\beta}{x_i}\right)^\alpha} \right] \dots (18) \end{aligned}$$

2.5 طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS)

اقترحت هذه الطريقة من قبل (Swain et al., 1988) وتتلخص فكرتها في تصغير الفرق بين الدالة التراكمية التجريبية (The Empirical Distribution Function) والدالة التراكمية النظرية (The Theoretical Distribution Function) للملاحظات المرتبة، وكما يأتي:

$$S = \sum_{i=1}^n \{F(x_{(i)}) - \mathcal{F}(i)\}^2$$

حيث تمثل $F(x_{(i)})$ الدالة التراكمية للمشاهدة $x_{(i)}$ للتوزيع محل الدراسة، و $\mathcal{F}(i)$ تمثل الدالة التراكمية النظرية التي يتم تقديرها في الكثير من الأحيان عن طريق $\mathcal{F}(i) = i/(n+1)$ فتكون الدالة كالآتي:

$$S = \sum_{i=1}^n \left\{ F(x_{(i)}) - \frac{i}{n+1} \right\}^2$$

ويمكن إيجاد هذه الدالة بالنسبة لتوزيع ماكdonald فريجت McFr بعد التعويض عن $F(x_{(i)})$ في المعادلة السابقة بالدالة التراكمية لتوزيع ماكdonald فريجت McFr المعرفة في المعادلة (6) وكما يأتي:

$$S(\alpha, \beta, a, b, c) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\text{Beta}(a, b)} \sum_{j=0}^{b-1} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{j!} \frac{\left[e^{-\left(\frac{\beta}{x_{(i)}}\right)^\alpha} \right]^{c(a+j)}}{\Gamma(b-j) (a+j)} - \frac{i}{n+1} \right\}^2 \dots (19)$$

3.5 طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS)

اقتُرحت هذه الطريقة أيضاً من قبل (Swain et al., 1988) وتتلخص فكرتها في تصغير الفرق بين الدالة التراكمية التجريبية والدالة التراكمية النظرية للمشاهدات المرتبة، ولكن بافتراض وجود عدم تجانس، وكما يأتي:

$$W = \sum_{i=1}^n w_i \{F(x_{(i)}) - \mathcal{F}(i)\}^2 \quad ; \quad \text{where } w_i = \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n+1-i)}$$

ويمكن إيجاد هذه الدالة بالنسبة لتوزيع ماكdonald فريجت McFr بعد التعويض عن $F(x_{(i)})$ في المعادلة السابقة بالدالة التراكمية لتوزيع ماكdonald فريجت McFr المعرفة في المعادلة (6) وكما يأتي:

$$W(\alpha, \beta, a, b, c)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n+1-i)} \left\{ \frac{1}{\text{Beta}(a, b)} \sum_{j=0}^{b-1} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{j!} \frac{\left[e^{-\left(\frac{\beta}{x_{(i)}}\right)^\alpha} \right]^{c(a+j)}}{\Gamma(b-j) (a+j)} - \frac{i}{n+1} \right\}^2 \dots (18)$$

4.5 طريقة كرامر-فون-ميزس (CVM)

اقترحت هذه الطريقة من قبل (MacDonald, 1971)، تتلخص فكرتها في تصغير المعادلة:

$$C = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left\{ F(x_{(i)}) - \frac{2i-1}{2n} \right\}^2$$

ويمكن إيجاد هذه الدالة بالنسبة لتوزيع ماكدونالد فريجت McFr بعد التعويض عن $F(x_{(i)})$ في المعادلة السابقة بالدالة التراكمية لتوزيع ماكدونالد فريجت McFr المعرفة في المعادلة (6) وكما يأتي:

$$C(\alpha, \beta, a, b, c) = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\text{Beta}(a, b)} \sum_{j=0}^{b-1} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{j!} \frac{\left[e^{-\left(\frac{\beta}{x_{(i)}}\right)^\alpha} \right]^{c(a+j)}}{\Gamma(b-j) (a+j)} - \frac{2n+1-2i}{2n} \right\}^2 \dots (19)$$

5.5 طريقة أقصى حاصل للتباعد (MPS)

اشتقت هذه الطريقة من قبل كل من قبل (Cheng & Amin, 1979)، وفكرة هذه الطريقة تتلخص في تعظيم الدالة الآتية:

$$P(\alpha, \beta, a, b, c) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \ln \{ F(x_{(i)}) - F(x_{(i-1)}) \}$$

إذ إن:

$$F(x_{(0)}) = 0; F(x_{(n+1)}) = 1$$

ويمكن إيجاد هذه الدالة بالنسبة لتوزيع ماكدونالد فريجت McFr بعد التعويض عن $F(x_{(i)})$ في المعادلة السابقة بالدالة التراكمية لتوزيع ماكدونالد فريجت McFr المعرفة في المعادلة (6) وكما يأتي:

$$P(\alpha, \beta, a, b, c) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \ln \left\{ \frac{1}{Beta(a, b)} \sum_{j=0}^{b-1} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{j!} \frac{\left[e^{-\left(\frac{\beta}{x_{(i)}}\right)^\alpha} \right]^{c(a+j)} - \left[e^{-\left(\frac{\beta}{x_{(i-1)}}\right)^\alpha} \right]^{c(a+j)}}{\Gamma(b-j) (a+j)} \right\} \dots (20)$$

6. المحاكاة

للمقارنة بين طرائق التقدير، قد تولدت بيانات من توزيع ماكدونالد فريجت بناءً على الدالة العكسية المعرفة في المعادلة (9). عملية التوليد أجريت بالنسبة لأربع حالات مختلفة كما موضح في الجدول (1)، ولكل حالة تم استعمال أحجام عينة مختلفة (25, 50, 100, 200). تم تكرار التجربة $R=1000$ لكل حالة من الحالات، بعد ذلك أجريت عملية التقدير بالطرائق المختلفة، والمقارنة بينها باستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ MSE، والمعادلة (21) توضح معادلة حسابه لكل معلمة.

جدول (1): الحالات المختلفة لتجارب المحاكاة

Cases	α	β	A	B	c
Case 1	0.5	0.5	1.5	2	1
Case 2	2.5	0.5	3	3	2.5
Case 3	1.5	2.5	4.5	3	1
Case 4	1	1	4.5	4	2.5

$$MSE(\hat{\theta}) = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R (\hat{\theta}_k - \theta)^2 \dots (21)$$

حيث θ تمثل كل معلمة من معلمات التوزيع، $\hat{\theta}_j$ تمثل تقدير للمعلمة θ عند التكرار k.

والجداول (5-2) تمثل نتائج عمليات المحاكاة.

جدول (2): نتائج MSE للطرائق المختلفة بالنسبة للحالة الأولى

	Methods	MLE	OLS	WLS	CVM	MPS
n=25	α	0.58586	0.75295	0.42804	0.82298	0.24547
	β	0.10838	0.06149	0.05034	0.05710	0.13213
	A	1.30477	0.01295	0.13436	0.01342	0.19130
	B	1.56523	1.60228	1.42877	1.64706	1.41471
	C	0.20588	0.03024	0.13151	0.02806	0.16847
n=50	α	0.08048	0.25409	0.14116	0.25911	0.05247
	β	0.08595	0.03567	0.02964	0.03685	0.03994
	A	1.17735	0.01034	0.07735	0.00941	0.05318
	B	1.02980	1.42200	0.86382	1.57910	0.79556
	C	0.19514	0.02891	0.06904	0.02529	0.06848
n=100	α	0.03068	0.07189	0.03809	0.07354	0.02373
	β	0.06136	0.03291	0.02925	0.03289	0.03743
	A	0.96337	0.00567	0.06618	0.00542	0.03831
	B	0.92171	1.02851	0.82089	1.06044	0.78260
	C	0.18017	0.01819	0.04694	0.02219	0.04249
n=200	α	0.01270	0.02369	0.01318	0.02401	0.00950
	β	0.05611	0.02818	0.02452	0.02769	0.02762

A	0.52341	0.00328	0.04657	0.00329	0.02055
B	0.78026	1.01848	0.61305	1.04577	0.54715
C	0.14578	0.01213	0.02356	0.01202	0.02635

يعرض هذا الجدول نتائج متوسط مربعات الخطأ (MSE) في الحالة الأولى لتقدير معلمات توزيع ماكسونالد فريجت باستعمال خمس طرائق مختلفة هي: طريقة الإمكان الأعظم (MLE) والمربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) والمربعات الصغرى الموزونة (WLS) وطريقة Cramér-von Mises (CVM)، بالإضافة إلى طريقة أقصى حاصل للتباعد (MPS). تم إجراء المحاكاة لأحجام عينات مختلفة ($n = 25, 50, 100, 200$)، علماً أن القيم الحقيقية للمعلمات المستخدمة في توليد البيانات هي ($\alpha = 0.5, \beta = 0.5, a = 1.5, b = 2, c = 1$).

يتضح من الجدول أن زيادة حجم العينة تؤدي إلى انخفاض كبير في قيم MSE لجميع الطرائق ولكافة المعلمات، مما يدل على تحسن دقة التقدير مع زيادة عدد المشاهدات، وهذا ما يسمى خاصية الاتساق لأنه بزيادة حجم العينة تقترب التقديرات من المعلمة الأصلية. كذلك، يمكن ملاحظة أن أداء الطرائق يختلف من معلمة إلى أخرى، فبعض الطرق تكون دقيقة لمعلمة معينة وغير دقيقة لأخرى. على سبيل المثال، أظهرت طريقتا WLS و MPS أداءً جيداً عند تقدير المعلمات α و c .

تبين النتائج في الجدول أعلاه أنه عند مقارنة الطرائق الخمسة، نجد أن طريقة المربعات الصغرى (OLS) وطريقة (CVM) أظهرتا استقراراً جيداً في التقدير لبعض المعلمات، ولا سيما a و c ، عند أحجام العينات المتوسطة والكبيرة. بالمقابل، كانت طريقة الإمكان الأعظم (MLE) فعالة في تقدير بعض المعلمات مثل α في الأحجام الكبيرة، لكنها أظهرت انحرافاً واضحاً عند حجم العينة $n=25$. أما طريقة (MPS) فقد أظهرت أداءً تنافسياً مع تحسن واضح عند $n = 100$ و 200 خصوصاً في المعلمات α و c . ويلاحظ أن طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) قدمت توازناً معقولاً بين الدقة والثبات، خصوصاً للمعلمات β و c . وبناءً عليه، يمكن القول إن كفاءة طريقة التقدير تعتمد إلى حد كبير على طبيعة المعلمة وعدد المشاهدات، ومن غير الممكن تعميم تفوق طريقة واحدة على جميع المعلمات.

جدول (3): نتائج MSE للطرائق المختلفة بالنسبة للحالة الثانية

	Methods	MLE	OLS	WLS	CVM	MPS
n=25	α	1.85030	1.81965	1.33524	1.94334	1.42325
	β	0.04527	0.00207	0.00847	0.00266	0.00297
	A	4.00579	0.02204	0.87983	0.02152	0.14645

	B	2.27563	2.43110	2.33278	2.72349	2.53798
	C	1.18243	0.03274	0.56624	0.03205	0.21898
n=50	α	1.40483	1.45526	1.08045	1.74122	1.17421
	β	0.02953	0.00179	0.00720	0.00246	0.00280
	A	3.60149	0.01726	0.64092	0.01493	0.13451
	B	2.19417	2.35701	2.01857	2.40590	1.98218
	C	0.80399	0.02563	0.55870	0.02217	0.18958
n=100	α	0.85766	1.44551	1.00453	1.51434	0.69482
	β	0.02485	0.00173	0.00580	0.00197	0.00129
	A	3.49268	0.00747	0.40442	0.01023	0.12662
	B	2.04040	2.34556	1.83077	2.37953	1.34035
	C	0.45012	0.01092	0.47624	0.01498	0.18264
n=200	α	0.32189	0.59766	0.39535	0.60816	0.26143
	β	0.01726	0.00119	0.00268	0.00125	0.00071
	A	2.81777	0.00591	0.24489	0.00831	0.06376
	B	1.22010	1.74862	1.15310	1.77835	0.89572
	C	0.27843	0.00854	0.19298	0.01215	0.08232

يعرض هذا الجدول نتائج متوسط مربعات الخطأ (MSE) في الحالة الثانية لتقدير معالم توزيع ماكسونالد فريجت باستعمال طرائق التقدير الخمسة ولنفس أحجام العينات المدروسة، علماً أن القيم الحقيقية للمعاملات المستخدمة في توليد البيانات هي $(\alpha = 2.5, \beta = 0.5, a = 3, b = 3, c = 2.5)$.

تشير النتائج إلى أن جميع الطرائق تحسنت بشكل عام مع زيادة حجم العينة، حيث انخفضت قيم MSE في جميع المعلمات، وهو ما يعكس خاصية الاتساق الإحصائي. ومع ذلك، فإن الاختلاف بين دقة الطرائق لا يزال واضحاً، لا سيما في تقدير المعلمات ذات a و b ، واللتي أظهرتا قيم MSE مرتفعة نسبياً في جميع الطرائق، وبالأخص عند أحجام العينات الصغيرة.

من اللافت للنظر في هذا الجدول أن طريقتي OLS و CVM أظهرتا أداءً ممتازاً في تقدير المعلمات β و c ، حيث كانت قيم MSE صغيرة جداً، حتى عند $n = 25$ ، مما يدل على حساسية منخفضة لهذه المعلمات في مواجهة صغر حجم العينة. أما طريقة (WLS) فقد حققت توازناً جيداً، ولا سيما في تقدير α و b ، وبرزت بشكل خاص عند $n = 50$ و 100 ، مما يشير إلى قدرتها على التكيف مع المعلمات المتأثرة بشكل أكبر بالشكل العام للتوزيع.

وفي المقابل، فإن طريقة MLE رغم كونها تقليدية وشائعة الاستعمال، إلا أنها لم تظهر تفوقاً واضحاً في أي من المعلمات، وكانت أكثر عرضة للتقلبات خصوصاً عند $n = 25$ ، حيث بلغ MSE للمعلمة a مثلاً 4.00579 ، وهي أعلى قيمة مسجلة بين جميع ما في الجدول. أما طريقة MPS فقد أظهرت مرة أخرى أداءً تنافسياً، حيث تفوقت على الطرق الأخرى في تقدير المعلمات α و a عند $n = 200$ ، ما يشير إلى فعاليتها مع أحجام العينات الكبيرة. بناءً على هذه النتائج، يتضح أن اختيار طريقة التقدير يجب أن يأخذ في الاعتبار كلاً من خصائص المعلمة قيد التقدير وحجم العينة المتوفر. فالطرائق التي تعمل بكفاءة مع معلمة معينة قد لا تكون كذلك مع معلمة أخرى.

جدول (4): نتائج MSE للطرائق المختلفة بالنسبة للحالة الثالثة

	Methods	MLE	OLS	WLS	CVM	MPS
n=25	α	2.29959	2.19004	1.20202	2.67387	1.32362
	β	0.62225	0.02544	0.17485	0.02792	0.14728
	A	3.24952	0.00253	1.31733	0.00310	0.15253
	B	3.24873	3.39893	2.61401	3.49954	2.59111
	C	0.85818	0.04067	0.23233	0.04592	0.18803
n=50	α	0.97279	1.81085	1.01893	2.02009	0.70843
	β	0.43703	0.02002	0.13376	0.01830	0.12095
	A	2.74513	0.00213	1.15696	0.00248	0.13048
	B	3.23730	3.19024	2.54405	3.49184	2.33952

	C	0.54640	0.04013	0.17008	0.04242	0.10213
n=100	α	0.33515	1.12903	0.65005	1.16255	0.26694
	β	0.42666	0.01848	0.12412	0.01611	0.10029
	A	2.60994	0.00206	0.99953	0.00216	0.09214
	B	2.63501	2.97883	2.00025	3.01771	1.27938
	C	0.25693	0.03616	0.06697	0.04203	0.04576
n=200	α	0.12514	0.28687	0.14932	0.29395	0.09992
	β	0.32414	0.01619	0.11371	0.01371	0.05586
	A	1.16225	0.00163	0.40205	0.00149	0.02440
	B	2.45343	2.58063	1.16794	2.62193	0.92101
	C	0.18297	0.01796	0.04135	0.02082	0.02346

يعرض هذا الجدول نتائج متوسط مربعات الخطأ (MSE) في الحالة الثالثة لتقدير معلمات توزيع ماكسونالد فريجت باستعمال طرائق التقدير الخمسة ولنفس أحجام العينات المدروسة، علماً أن القيم الحقيقية للمعلمات المستخدمة في توليد البيانات هي $(\alpha = 1.5, \beta = 2.5, a = 4.5, b = 3, c = 1)$.

تُظهر النتائج مرة أخرى أن زيادة حجم العينة تؤدي إلى انخفاض واضح في قيم (MSE)، مما يعكس خاصية الاتساق في الطرائق الإحصائية. لكن في هذه الحالة، نلاحظ تفاوتاً أكبر في أداء الطرائق بين المعلمات المختلفة. على وجه الخصوص، تعد المعلمة a حاصلة على أكبر قيم لمتوسط مربعات الخطأ، إذ سجلت قيم MSE مرتفعة جداً مع طريقة MLE، في مقابل أداء متميز لطريقتي OLS و CVM فقد أظهرتا استقراراً وقيم MSE صغيرة في هذه المعلمة على امتداد جميع أحجام العينات.

كذلك أظهرت طريقة MLE أداءً ضعيفاً نسبياً في معظم المعلمات عند $n = 25$ ، خصوصاً في α و b ، حيث تجاوزت قيم MSE حدود 2.3 و 3.2 على التوالي، بينما كانت القيم أقل بكثير في الطرق الأخرى. أما طريقتا WLS و MPS فقدتتا أداءً متوازناً، حيث قلت الأخطاء في المعلمات β و c بشكل ملحوظ، وتقدمت MPS على بقية الطرق في التقدير الدقيق للمعلمة b مع زيادة حجم العينة، إذ انخفضت MSE إلى ما دون 1.0 عند حجم العينة $n=200$.

كما لوحظ أن طريقة OLS كانت فعالة جداً في تقدير المعلمة a ، لكنها أظهرت تقلباً واضحاً في المعلمة α عند أحجام العينات الصغيرة والمتوسطة. بالمقابل، أظهرت طريقة CVM أداءً قريباً من OLS في كثير من المعلمات ولكن بأخطاء أكبر نسبياً عند المعلمات ذات التوزيع الأكثر تطرفاً مثل b . وتعكس هذه النتائج أن سلوك كل طريقة يختلف حسب خصائص المعلمة المراد تقديرها، وأنه لا توجد طريقة تقدير واحدة تتفوق باستمرار في جميع المعلمات أو الأحجام.

جدول (5): نتائج MSE للطرائق المختلفة بالنسبة للحالة الرابعة

	Methods	MLE	OLS	WLS	CVM	MPS
n=25	α	1.19251	2.10707	1.33131	2.51314	0.65568
	β	0.44084	0.27404	0.12469	0.34497	0.10073
	A	4.62669	0.01324	1.24785	0.01692	0.09802
	B	5.36855	7.21811	6.33962	7.34808	5.38753
	C	1.80479	0.04288	1.81490	0.05519	0.55693
n=50	α	0.34768	0.79275	0.54011	0.82964	0.27944
	β	0.41100	0.12532	0.09374	0.14348	0.06821
	A	3.97293	0.00882	0.71455	0.00868	0.09760
	B	4.19471	5.17110	4.57265	5.17731	3.90896
	C	1.73932	0.03015	1.11754	0.02936	0.41642
n=100	α	0.08448	0.32901	0.17871	0.34047	0.08833
	β	0.16762	0.06143	0.08296	0.06835	0.03195
	A	2.49867	0.00749	0.53840	0.00791	0.08362
	B	3.50854	3.85062	3.22939	3.86471	2.41124
	C	1.28622	0.02532	0.44694	0.02649	0.37688

n=200	α	0.05905	0.17307	0.09147	0.17676	0.05147
	β	0.14887	0.02440	0.07158	0.02638	0.01563
	A	2.32529	0.00709	0.35999	0.00733	0.06063
	B	3.39416	3.58769	2.77803	3.60862	1.70454
	C	1.09971	0.02490	0.22676	0.02541	0.18135

يعرض هذا الجدول نتائج متوسط مربعات الخطأ (MSE) في الحالة الرابعة لتقدير معلمات توزيع ماكسونالد فريجت باستعمال طرائق التقدير الخمسة ولنفس أحجام العينات المدروسة، علماً أن القيم الحقيقية للمعلمات المستخدمة في توليد البيانات هي $(\alpha = 1, \beta = 1, a = 4.5, b = 4, c = 2.5)$.

كما في الحالات السابقة، يتبين أن قيم MSE تقل تدريجياً مع تزايد حجم العينة، مما يعكس خاصية الاتساق لجميع طرائق التقدير. غير أن هذه الحالة تظهر تحديات إضافية تتعلق بتقدير المعلمة b ، حيث تسجل هذه المعلمة أعلى قيم MSE مقارنة ببقية المعلمات، خصوصاً عند الأحجام الصغيرة. فقد تجاوزت قيمة الخطأ 7.2 في طريقة OLS عند $n = 25$ ، وبلغت 5.17 حتى عند $n=50$ ، مما يعكس صعوبة التقدير في ظل المعلمات المستخدمة في هذه الحالة.

تظهر طريقة MLE مرة أخرى أداءً متفاوتاً، حيث تفوقت على بعض الطرق في تقدير المعلمة α عند $n=200$ ، لكنها سجلت أعلى MSE في تقدير المعلمات a و b عند $n=25$ و 50. أما طريقة OLS، فرغم أدائها المتميز في تقدير a (كما هو الحال في الحالات السابقة) فإنها عانت من تقلبات حادة في تقدير المعلمة α والمعلمة b ، خاصة في العينات الصغيرة. وعلى غرار النتائج السابقة، فقد أظهرت طريقة CVM نتائج مشابهة إلى حد كبير لـ OLS، لكنها لم تتفوق عليها إلا بشكل طفيف في بعض المواضع.

من جهة أخرى، حافظت طريقة WLS على أداء متوازن نسبياً، وسجلت تحسناً ملحوظاً في المعلمات β ، a ، و b عند $n=100$ و $n=200$ ، بينما تميزت طريقة MPS مرة أخرى بتقديرات دقيقة نسبياً في المعلمات α ، β ، و b خاصة عند $n=200$ ، حيث كانت MSE أقل من بقية الطرق. تؤكد هذه النتائج أن التحديات المتعلقة بتقدير بعض المعلمات مثل b و c قد تستمر حتى مع أحجام عينات كبيرة، وأن الاختيار الأمثل لطريقة التقدير لا يمكن أن يكون عاماً، بل يجب أن يبنى على تحليل دقيق لطبيعة المعلمات وهيكل التوزيع.

ولعدم القدرة على ترجيح طريقة على طريقة بشكل عام، فقد أنشئ جدول تكراري، يتضمن عدد مرات أفضلية كل طريقة بالنسبة لأحجام العينات وكانت النتائج كما يأتي:

جدول (6): ملخص نتائج المحاكاة

Sample Size	MLE	OLS	WLS	CVM	MPS
n=25	2	7	3	3	5
n=50	0	3	2	7	8
n=100	1	7	1	2	9
n=200	0	6	1	3	10
All	3	23	7	15	32

يتضح من الجدول أن طريقة أقصى حاصل للتبايد (MPS) تفوقت في معظم الحالات، إذ سجلت أفضل أداء في 32 حالة من أصل 80، ما يمثل حوالي 40% من مجموع التقديرات. وقد ظهر هذا التفوق بوضوح عند معظم أحجام العينات وخاصة عند زيادة أحجام العينة، مما يشير إلى أن هذه الطريقة تستفيد من زيادة عدد المشاهدات وتظهر استقراراً ودقة في التقدير مع البيانات الأكبر.

من ناحية أخرى، قدمت طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) أداءً جيداً في 23 حالة، وكانت الأكثر تفوقاً بعد MPS، أما طريقة Cramér–von Mises (CVM) فقد جاءت في المرتبة الثالثة بعدد مرات تفوق بلغ 15 مرة، متقدمة على WLS التي تفوقت في 7 حالات فقط، في حين أن طريقة الإمكان الأعظم (MLE) سجلت أقل عدد من مرات التفوق (3 فقط)، مما يشير إلى أنها أكثر حساسية لطبيعة البيانات.

7. التطبيق

يتم التطبيق على بيانات حقيقية أخذت من رسالة (ماجد، 2019) التي تمثل الوقت لحين الفشل للسيراميك الترميمي لأسنان المراجعين للمركز التخصصي لطب الأسنان التابع لدائرة كربلاء. وهذه البيانات مقاسة بالأشهر خلال حوالي 5 سنوات (50 شهراً) ابتداءً من 2014 وكما يأتي:

جدول (7): البيانات الحقيقية

0.14	0.16	0.19	0.24	0.99	1.24	2.20	2.17	3.23	9.17
0.70	0.16	0.27	1.13	1.14	2.28	1.17	1.19	1.14	4.27
0.80	0.21	0.25	1.80	1.51	2.60	2.11	2.17	2.60	9.24

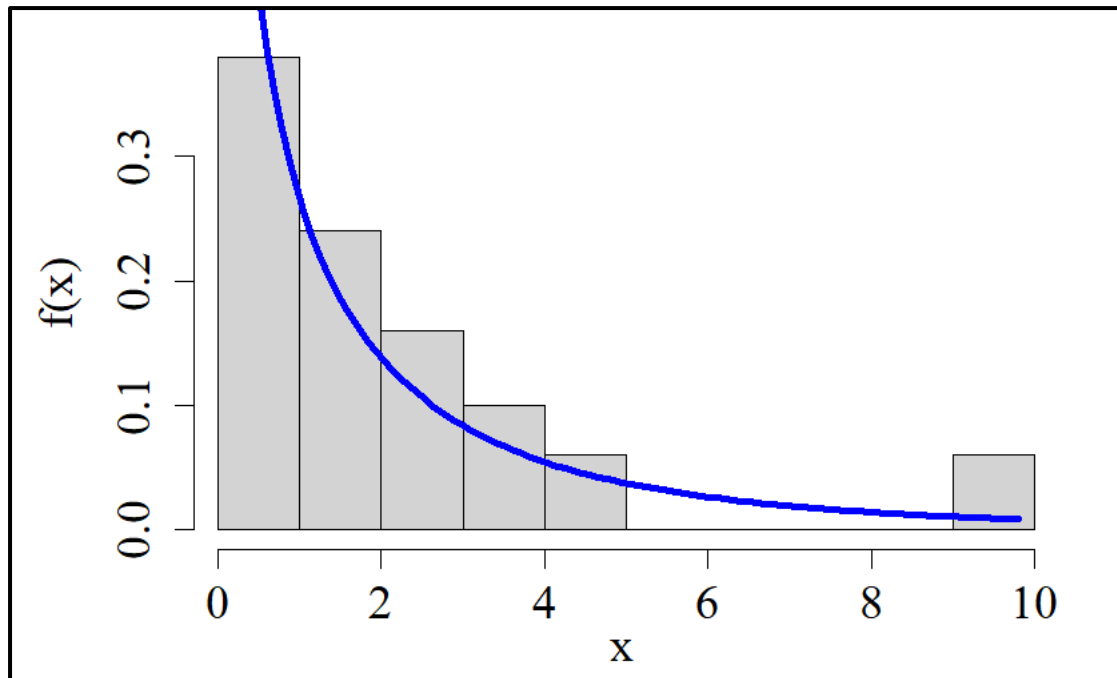
0.60	0.15	0.28	0.28	1.40	1.90	1.30	1.50	3.20	3.50
0.10	0.11	0.18	0.23	2.90	3.90	4.29	3.50	4.27	9.80

وقد تم تقدير معلمات توزيع ماكسونالد فريجت باستعمال طرائق التقدير الخمسة محل الدراسة، وقد استخدمت في حساب قيم إحصاءات اختبار كولموكروف سميرنوف (KS) وكانت النتائج كما يأتي:

جدول (8): نتائج التقدير وإحصاءات اختبار KS

Methods	MLE	OLS	WLS	CVM	MPS
α	0.49726	0.32420	0.29569	0.32732	0.43278
β	3.68743	3.21027	2.00412	3.19051	3.57916
a	0.11719	0.26346	0.24948	0.27575	0.15067
b	39.25391	40.26824	156.82731	40.73228	39.38040
c	5.46397	4.81319	7.04402	4.72899	5.24309
KS	0.13824	0.12168	0.13241	0.12941	0.12767
p-value	0.29492	0.44962	0.34467	0.37227	0.38894

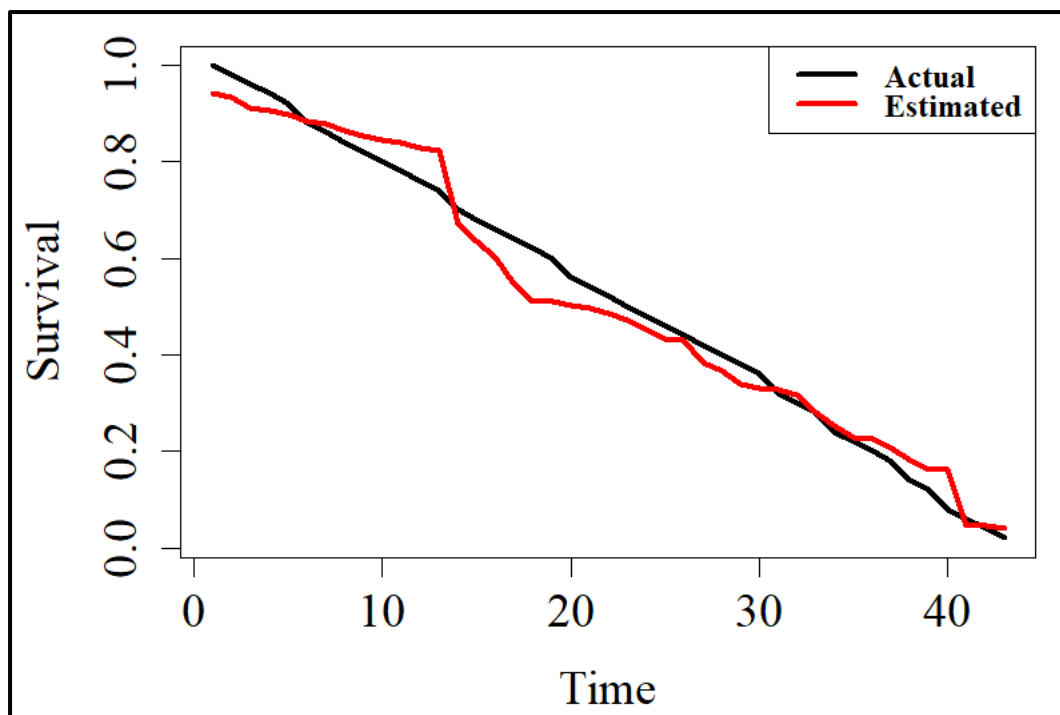
ونلاحظ من الجدول أن تقديرات طريقة OLS هي الأكثر ملاءمة لتوزيع البيانات حسب اختبار كولموكروف سميرنوف، والرسم الآتي يبين المدرج التكراري للبيانات مع ملاءمة توزيع ماكسونالد فريجت.



شكل (3): المدرج التكراري للبيانات مع PDF

يوضح الشكل توافق توزيع ماكسونالد فريجت مع البيانات الفعلية، حيث نلاحظ أن منحنى الكثافة يمر بين أعمدة المدرج التكراري بشكل جيد، مما يدل على أن التوزيع مناسب تقريباً لوصف سلوك البيانات، وخاصة في الجزء الأكبر من التكرارات. هذا يدعم النتائج المستخلصة من اختبار كولموكروف-سميرنوف التي أظهرت أفضلية طريقة OLS في التقدير لهذه البيانات.

كما وقد تم تقدير دالة البقاء للتوزيع كما في الشكل (4)، حيث نلاحظ أن المنحنى التقديري (بالأحمر) يطابق إلى حد كبير المنحنى الفعلي (بالأسود)، مما يدل على كفاءة التوزيع في تمثيل البيانات من حيث الاحتمالات التراكمية للفشل عبر الزمن. هذا يعزز من موثوقية التقدير باستعمال التوزيع المختار والطريقة الملائمة.



شكل (4): رسم دالة البقاء للبيانات الحقيقية

8. الاستنتاجات

من خلال الدراسة النظرية والتجريبية لتوزيع ماكدونالد فريجت (McDonald Fréchet) وتطبيق طرائق التقدير المختلفة لمعالمه، يمكن استخلاص الاستنتاجات الآتية:

- (أ) مرونة التوزيع: أظهر توزيع ماكدونالد فريجت مرونة عالية في تمثيل بيانات الفشل، وذلك بفضل تعدد معالمه، مما يجعله مناسباً للنمذجة في مجالات مختلفة، خصوصاً في تحليل البقاء والبيانات ذات التوزيع الملتوي التواء موجباً.
- (ب) عدم وجود طريقة تقدير مثلى لكل المعالم: نتائج المحاكاة أكدت أن أداء طرائق التقدير يختلف من معلمة إلى أخرى ومن حجم عينة إلى آخر، مما يعني أنه لا يمكن تعميم أفضل طريقة معينة لجميع الحالات.
- (ت) تفوق طريقة MPS في المجمال: أظهرت طريقة أقصى حاصل للتباع (MPS) أداءً جيداً بشكل عام، خصوصاً عند استعمال عينات كبيرة، وكانت الأفضل في عدد مرات التكرار الإجمالية مقارنة بالطرائق الأخرى.
- (ث) استقرار أداء OLS: على الرغم من بساطتها، كانت طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) من بين أكثر الطرائق استقراراً وفعالية في تقدير بعض المعالم، خصوصاً في حالة البيانات الحقيقية.

المصادر

1. السلمان، اياد صبري فنيخر (2021). " استعمال تعميم ماكدونالد في توزيعي فريجت وفريجت الاسي مع التطبيق"، رسالة ماجستير، جامعة الموصل، كلية علوم الحاسوب والرياضيات، قسم الإحصاء والمعلوماتية.

2. ماجد، شهد شوكت (2019). " مقارنة بعض طرائق تقدير معولية توزيع فريجت باستعمال معاينة المجموعات المرتبة مع تطبيق عملي ". رسالة ماجستير، جامعة كربلاء، كلية الإدارة والاقتصاد، قسم الإحصاء.

3. Alexander, C., Cordeiro, G. M., Ortega, E. M., & Sarabia, J. M. (2012). Generalized beta-generated distributions. *Computational Statistics & Data Analysis*, 56(6), 1880-1897.
4. Broyden, C. G. (1970). The convergence of a class of double-rank minimization algorithms 1. general considerations. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 6(1), 76-90.
5. Cheng R., Amin N. Maximum product of spacings estimation with application to the lognormal distribution. *Math. Report*, 1979, p. 791.
6. Coles, S., Bawa, J., Trenner, L., & Dorazio, P. (2001). An introduction to statistical modeling of extreme values (Vol. 208, p. 208). London: Springer.
7. Cordeiro, G. M., Cintra, R. J., RÃago, L. C., & Ortega, E. M. (2012). The McDonald Normal Distribution. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 301-329.
8. Cordeiro, G. M., Hashimoto, E. M., Ortega, E. M., & Pascoa, M. A. (2012). The McDonald extended distribution: properties and applications. *AStA Advances in Statistical Analysis*, 96, 409-433.
9. Fletcher, R. (1970). A new approach to variable metric algorithms. *The computer journal*, 13(3), 317-322.
10. Fréchet, M. (1927). Sur la loi de probabilité de l'écart maximum [On the probability distribution of the maximum deviation]. *Annales Polonici Mathematici*, 6 (1927), 93-116.
11. Goldfarb, D. (1970). A family of variable-metric methods derived by variational means. *Mathematics of computation*, 24(109), 23-26.
12. Gomes, A. E., Da-Silva, C. Q., & Cordeiro, G. M. (2015). Two extended Burr models: Theory and practice. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 44(8), 1706-1734.
13. Hashimoto, E. M., Ortega, E. M., Cordeiro, G. M., & Pascoa, M. A. (2015). The McDonald Extended Weibull Distribution. *Journal of Statistical Theory and Practice*, 9, 608-632.
14. Hussain, E. A., Al-Shallawi, A. N., & Saied, H. A. (2022). Using maximum likelihood method to estimate parameters of the linear regression t truncated model. *NTU Journal of Pure Sciences*, 1(4), 26-34.
15. Lemonte, A. J., & Cordeiro, G. M. (2011). An extended Lomax distribution. *Statistics*, 47(4), 800-816.

16. Macdonald, P. Comment on “an estimation procedure for mixtures of distributions” by Choi and Bulgren. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Methodol.* 1971, 33, 326–329.
17. McDonald, J. B. (1984). Some Generalized Functions for the Size Distribution of Income. *Econometrica*, 52(3), 647-665.
18. Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). Numerical optimization. 2nd Edition. Springer.
19. Shanno, D. F. (1970). Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization. *Mathematics of computation*, 24(111), 647-656.
20. Swain, J. J., Venkatraman, S., & Wilson, J. R. (1988). Least-squares estimation of distribution functions in Johnson's translation system. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 29(4), 271-297.
21. R Core Team. (2025). optim: General-purpose optimization. In *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing.
22. Roozegar, R., Tahmasebi, S., & Jafari, A. A. (2017). The McDonald Gompertz distribution: properties and applications. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 46(5), 3341-3355.