استكشاف فهم طلبة المرحلة المتوسطة للمفاهيم الهندسية باستخدام التمثيلات الصورية: تحليل قائم على نظرية دوبنسكي (APOS) (دراسة نوعية)

أ.م.د. نعيم عجيمي البدري
Naeem.a.l@utq.edu.iq
جامعة ذي قار/ كلية التربية الأساسية

الملخص

هدفت الدراسة إلى استكشاف فهم طلبة المرحلة المتوسطة للمفاهيم الهندسية باستخدامِ التمثيلات الصورية و نظرية (APOS) كإطار تحليلي. اتبع الباحث المنهج النوعي، حيث أجريت الدراسة على عينة قوامها 25 طالباً من طلاب المرحلة المتوسطة وتلتها مقابلات شبه منظمة مع 5 طلاب واعتمد الباحث تحليل البيانات من اجل تثليث النتائج وتم تحديد ثلاث طلاب الذين تم التواصل معهم لغرض مقابلتهم وتم اختيارهم لتأكيد الاستدلالات التي تم الحصول عليها من تحليل البيانات واعتمد الباحث نظرية (APOS) (اجراء – عملية – هدف – مخطط) كاداة للتحليل. وبينت النتائج إن معظم الطلبة واجهوا صعوبات في بناء المفاهيم الهندسية، كما أظهرت النتائج عدم قدرتهم على ربط العلاقات بين المفاهيم والموضوعات من خلال إدراك الصورة الكلية المركبة للمنظومات المفاهيمية المعروضة، وبينت الدراسة ضعفاً في تحديد العلاقة بين الأشكال الهندسية المتداخلة.

الكلمات المفتاحية: المفاهيم الهندسية، التمثيلات الصورية، نظرية APOS.

Exploring middle school students' understanding of geometric concepts using pictorial representations: An analysis based on Dubinsky's theory (APOS) (Qualitative Study)

Asst Prof Dr. Naeem Agmy ALbadry
Basic Education College, University of Dhi Qar

Abstract

This study aimed to explore how middle school students understand geometric concepts when using pictorial representations, employing the APOS theory as an analytical framework. A qualitative approach was adopted, with the study conducted on a sample of 25 students, followed

by semi-structured interviews with five students. Data analysis was used to triangulate the results. Three students were identified and invited to participate in interviews. They were selected to confirm the inferences obtained from the data analysis. The researcher adopted the APOS (Action-Process-Objective-Plan) theory as an analytical tool.The results showed that most students found it difficult to construct geometric concepts, and that they were unable to establish relationships between concepts and topics, or to understand the overall complex picture of the presented conceptual systems and the relationships that link them. They also struggled to determine the relationship between overlapping geometric shapes.

Keywords: Geometric Concepts, Pictorial Representations, The APOS theory.

المقدمة:

ترتبطُ المفاهيم الرياضية ارتباطاً وثيقاً بقدرات الطلبة على بناءِ الحججِ وتبريراتها في بناءِ البراهينِ، والاستراتيجيات المستخدمة في الربط بين صورةِ المفهومِ وتعريفه في حل المسائلَ الرياضيةِ، إن ادراك المفهوم الرياضياتي من قبلِ الطلبة مرتبط بالوعي لدى متعلمِ الرياضيات (الانتباه، والوعي، وتكوين المعرفة).

وفي ضوءِ ذلك تعد التمثيلات الرياضية احدى طرقِ تنظيم المعلومات التي تساعد المتعلم على تحويلِ البياناتِ إلى اشكال اوهياكل مبسطة تجمعهاُ علاقات محددة قابلة للفهمِ والتفاعل من الطلبة مما يحسن عملية التعلم، لأن المفهوم يمثل عنصراً أساسياً في كلِ فروع الرياضيات وتطبيقاتها في الجبرِ والنمذجة، والمواقف الحياتية للطالب من خلالِ تمثيلها رياضياً بصورٍ متعددة.

ومن هذا المبدأ تعتبر التمثيلات الصورية مهمة في المراحل الدراسية كافة وإن تعلمها له إرتباط وثيق ومباشر ببيئة الطالب وحياته اليومية من ناحية، وارتباطها بمواضيع دراسية ومواد علمية من ناحية أخرى، وإن توظيفها في عملية التعلم يساهم في فهمِ المواقف الرياضية وتوضيح افكارها، ويحسن مهارات الطلبة في حل المسائل الرياضية. بالإضافة إلى ما ذكر فإن الصور المتعددة للتمثيلات الرياضية تناسب المستويات المختلفة للطلبة مما يسهل للطالب التعامل معها، لإنها تعطي صور مختلفة للمسألة الرياضية نفسها، وبنفسِ الوقت تبين الترابط بين تلك الصور، لإن التمثيل الجيد من سمات فهم الطالب وقدرته على التعبيرِ عن أفكاره الرياضية مما يعطي

مؤشرا حقيقفيا لما يدور في ذهنه من عمليات تفكيرٍ، مما يسهل انتقال أثر التعلم (العبدالواحد، 2023).

وننوه إلى إن الهندسة تَعد مقرراً أكاديمياً مهماً، لإتساع تطبيقاتها في ميادينِ العلومِ والتكنولوجيا والاقتصاد، وبِنفس الوقت تعد الهندسة أحد العوامل التي تحدد أداء الطلاب في المستقبل، لذا فإن تعلمها يعد ضرورة باستخدام استراتيجيات مناسبة بناءاً على المعارف السابقة التي يمتلكها الطلبة لتعزيزفهمهم للرياضيات. وهي من المواضيع الرياضية التي تشكلَ المعرفة في المناهج الرياضية. (Kleemans ،Vissers & Segers،2025).

وفي المقابل اعتقد دوبنسكي (Dubinsky) إن عملية بناء المعرفة الرياضية يمكن أن يكون ادة لتوظيف المفاهيم الرياضية الأكثر تقدماً وهذا أدى إلى تطوير نظرية الهياكل العقلية (أجراء Action، عملية Process، اهداف Objects، مخططات Schemas) تشكل اختصار (APOS)، وتفترض نظريته إن المفهوم الرياضي يتطور كلما حاول الطالب تحويل الكائنات المادية او العقلية المتوفرة لديه، على الرغم من أداء العمل يمكن اعتبار العملية بمثابة تطور لمستويات المعرفة، وهذا يتضمن تطورات جزئية للمفهوم الذي تم بناؤه. (Nagle, Martinez &Moore, 2018)

ولتوضيح ذلك نشير إلى إن الإجراءات تكون رد فعل لمحفز خارجي يتكون من اتباع تعليمات خارجية او داخلية محددة، والحاجة الى تنفيذ كل خطوة من خطوات الإجراء. وهذا يعني إن الإجراء في APOS، هو تحويل لمفهوم رياضي يدركه الفرد على أنه خارجي. يمكن أن يكون تطبيقاً صارما لخوارزمية متاحة بصورة مباشرة أو تطبيقاً لحقيقة أو إجراء محفوظ. يدرك الإجراء على أنه خارجي بمعنى أنه غير متصل نسبيا بالمعرفة الرياضية الأخرى للطالب، ونتيجةً لذلك لا يستطيع الطالب تبرير الإجراء الذي غالبا ما يكون مرتبطاً بتمثيل محدد للتحويل الرياضي المطبق(Martinez & Angel, 2016) .

أما العمليات فهي بنية عقلية تقوم على مجموعة من الإجراءات في ذهن الطالب دون الحاجة الى تنفيذ كل خطوة بشكل صريح، ويمكن تنسيق العمليات وعكسها بعملية جديدة. فمن خلالها يكرر الطالب سلسلة الإجراءات وقد يكونِ انعكاسها عملية عقلية داخلية، عندما يتكرر فعل ما ويتأمله الفرد، قد يستبطَن في عملية. تدرك العملية على أنها داخلية، بمعنى أن لها روابط ذات معنى بمعارف الفرد الرياضية الأخرى. تُمكّن هذه الروابط الفرد من تخيل التحويل، وحذف بعض خطواته، وتوقع نتائجه دون الحاجة إلى إجراء التحويل صراحةً. تمنح هذه الروابط ذات المعنى الفرد القدرة على إجراء تحويلات بين تمثيلات مختلفة للتحويل، كما تسمح له بتبرير العملية. من المهم ملاحظة أن القدرة على تخيل عملية، وحذف خطوات، وتوقع نتائجها، تعني أن الفرد سيكون قادرا على إنتاج صورة ذهنية للشيء الذي يتم تحويله، إلى جانب كميات أخرى

مرتبطة بالمفهوم الرياضي من خلال العملية. ستكون هذه الصورة الذهنية ديناميكية، مما يسمح بحذف الخطوات وتوقع النتائج ويمكن تنسيق عمليات مختلفة لتشكيل عمليات جديدة، يتوافق هذا مع الترابط المتبادل بين التصور والفكر التحليلي الذي اقترحه دوبينسكي (Arnon ١٣٩ et al., 2014:

أما الاهداف فهي إدراك التحولات بعد ان يصبح الطالب على بينة من العملية ككل لتكوين هدف معرفي. إن بناء المفاهيم الرياضية غالبا ما ينطوي على العديد من الإجراءات والعمليات والمكونات المعرفية التي تم بناؤها سابقا وفق مخططات تم تنظيمها وربطها في إطار متماسك ليوفر للطالب وسيلة لاتخاذ قرار فيما اذا كان المخطط ينطبق على حالة رياضية محددة ام لا، فالمخططات هي بناء ديناميكي يتم بناؤه وإعادة بناؤه من خلال تعلم الطالب. بما أن نطاق تطبيقات العملية يتجاوز السياق الذي بنيت فيه أصلاً، فقد يشعر الفرد بالحاجة إلى تطبيق إجراءات على عملية للتعامل مع مواقف إشكالية جديدة. عندما يتمكن الفرد من رؤية العملية ككيان قائم بذاته، وتطبيق إجراءات عليها، أو تخيل تطبيقها، يمكن القول إن العملية قد اندمجت في كائن. في الواقع، تم تخمين مرحلة جديدة من التطور بين العملية والموضوع، حيث يتمكن الفرد من رؤية العملية ككيان قائم بذاته، ولكنه لا يزال غير قادر على تطبيق إجراءات عليها أو تخيل تطبيقها.(Arnawa, Yanita, Yerizon, Ginting & Nita,2021) .

أما المخطط فهو مجموعة متماسكة من الإجراءات والعمليات والأشياء والمخططات الأخرى التي تتعامل مع مفهوم رياضي محدد. المخطط متماسك بمعنى أن عملياته وكائناته ومخططاته الفرعية المختلفة مترابطة. يتيح هذا للفرد أن يقرر ما إذا كان الموقف الذي يواجهه (على سبيل المثال، مهمة صفية معينة) يقع ضمن نطاق المخطط (Arnon et al., 2014: 176)

بالنظر إلى الموقف الإشكالي، قد يحاول الطلاب استيعاب الموقف في هياكلهم العقلية (الفعل، أو مستوى الانتقال، أو العملية، أو الهدف، أو المخطط) من أجل حل المشكلة. قد يكفي القيام بعمل على عملية مبنية جزئيا (مستوى انتقالي). في هذه الحالة، يبدو أن الطلاب قد بنوا عملية يمكنهم من خلالها القيام بأفعال. ومع ذلك، في حالة وجود مشكلة جديدة، قد لا تكفي هياكل مستوى انتقال الطلاب لحل المشكلة. في هذه الحالة، سيتعين على الطلاب تغيير طرق تفكيرهم من خلال تكييف هياكلهم العقلية للتعامل مع المشكلة. أي أن الطلاب سيحتاجون إلى إعادة بناء أو إعادة تنظيم هياكلهم العقلية، وربما التقدم نحو بناء عملية، من أجل استيعاب المشكلة الجديدة. إذا كان الطالب مراقبا، فقد يبدو وكأنه يتنقل بين مرحلتي الهدف والعملي (Arnawa, Yanita, Yerizon, Ginting & Nita,2021).

وبناءا على تلك المعطيات وبالرغم من الاعتقاد بوجود تقدم خطي في نظرية APOS من الفعل إلى العملية إلى الهدف، ثم إلى وجود أفعال وعمليات وأشياء مختلفة منظمة في

مخططات، إلا أن هذا غالبا ما يبدو أشبه بتقدم جدلي حيث يمكن أن تكون هناك تطورات جزئية، وانتقالات، وعودة من نوع من المفاهيم إلى آخر (Arnon et al., 2014: 177) ووفقًا للنظرية، فإن ميول الطلاب للتعامل مع المواقف الإشكالية في المهام الرياضية المتنوعة التي تتضمن مفهوما رياضيا معينا تختلف باختلاف فهمهم للمفهوم كفعل، أو عملية، أو هدف (Arnon et al., 2014: 176)

مشكلة الدراسة واسئلتها:

تعد نظرية دوبنسكي (APOS) تكييف لأفكار بياجيه لدراسة تطور المعرفة الرياضية لدى الأفراد عبر مراحل تشمل الإجراءات والعمليات والأهداف والمخططات. وقد استخدمت لدراسة كيفية بناء الفهم الرياضي لمجموعة واسعة من المواضيع، ندرك أن APOS، كأي نظرية تربوية، لا تهدف إلى تقديم وصف شامل لكيفية تعلم الطلاب لمفهوم رياضي معين. ومع ذلك، فإنها توفر منظورا يمكن من خلاله تحليل البيانات وتفسيرها (Dubinsky & McDonald، ٢٠٠١).

مشكلة البحث الأساس هي ندرة الدراسات العربية وقلتها التي تبحث في تحليل تعلم الطلبة. ولغرض سد الفجوة في دراساتنا التربوية التي تهتم بتحليل تعلم طلبتنا ومساعدتهم في تعلم الرياضيات بشكل افضل وهذا ما شجع الباحث في خوض غمار هذه التجربة لرفد المكتبة العربية لذا اصبح لزاما علينا سد هذه الفجوة عسى ان تساهم وتفسح المجال للباحثين والتربويين للخوض في هذا المضمار واعتماد هذه الدراسة كوسيلة لتطوير الأبحاث المستقبلية أو لتخطيط التدريس ، وتتلخص أسئلة الدراسة:

- ما التصورات الذهنية التي تتشكل عند الطلاب خلال تعلم الطلبة المفاهيم الهندسية؟
- ما الصعوبات التي تواجه الطلبة في تصور المفاهيم الهندسية وفق نظرية APOS؟

أهداف الدراسة:

بالإمكان تلخيص اهدف الدراسة كما يلي:

- الكشف عن فهم الطلبة للمفاهيم الهندسية من خلال التمثيلات الصورية.
- تعريف الطلبة بالتمثيلات الرياضية ودورها في تنمية المعرفة الرياضية
- تعريف مدرسي الرياضيات للمرحلة المتوسطة بكيفية تعلم الطلبة لمفهوم رياضي

أهمية الدراسة:

- تساهم الدراسة في مساعدة المختصين التربويين والمدرسين على التعرف على طريقة فهم الطلبة للمفاهيم الرياضية.
- تقديم نموذج للتمثيلات الصورية للاختبارات قد يساعد المدرسين والمتخصصين بمناهج الرياضيات وطرائق تدريسها.

- تسهم الدراسة في تقديم تحليل وفق نظرية ابوس قد يفيد الباحثين في دراساتهم المستقبلية.
- سد الفجوة في دراساتنا التربوية التي تهتم بتحليل تعلم طلبتنا ومساعدتهم في تعلم الرياضيات بشكل افضل.
- تفسح المجال للباحثين والتربويين للخوض في هذا المضمار واعتماد هذه الدراسة كوسيلة لتطوير الأبحاث المستقبلية أو لتخطيط التدريس.

محددات الدراسة:

الحدود المكانية: محافظة ذي قار احدى محافظات جنوب العراق.

الحدود الموضوعية: المفاهيم الهندسية المضمنة في كتب الرياضيات للمرحلة المتوسطة للعام الدراسي 2024-2025

مصطلحات الدراسة:

استكشاف الفهم: يعني عملية جمع المعلومات لغرض استيعاب المعنى أو لإدراك فكرة، وتطبيق هذه المعرفة أو الإدراك في سياقات مختلفة. هذا يشمل القدرة على فهم المفاهيم والأفكار، واستيعابها، وتطبيقها في مواقف متنوعة.

ويعرفها الباحث إجرائياً بأنها الحصول على الاستدلالات من تحليل البيانات وفق نظرية (APOS) (اجراء – عملية – هدف – مخطط) ومعرفة الصعوبات التي واجهها الطلبة في بناء المفاهيم الهندسية وقدرتهم على ربط العلاقات بين المفاهيم والموضوعات من خلال إدراك الصورة الكلية المركبة للمنظومات المفاهيمية المعروضة والعلاقات التي تربط بينها وتحديد العلاقة بين الأشكال الهندسية المتداخلة.

المرحلة المتوسطة: احدى المراحل الدراسية في نظام التعليم في العراق بعد المرحلة الابتدائية وتتكون من صف الأول والثاني والثالث المتوسط وتعادل الصف (9,8,7) في النظام العالمي.

المفاهيم الهندسية: ويقصد بها الأشكال الهندسية (مثل المثلث والمربع والدائرة ...) وخواصها في المستوي والزوايا والحجوم والمساحات والمجسمات في الفراغ والعلاقات فيما بينها من خلال بعض المسلمات والحقائق والقوانين. كما ضمنتها مبادئ المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات (NCTM) في معايير محتوى الهندسة.

ويعرفها الباحث إجرائياً بأنها الاشكال الهندسية (الدائرة والمربع) ومساحتها المضمنة في كتب المرحلة المتوسطة للعام الدراسي 2024-2025

التمثيلات الصورية: ويقصد بها تقديم المسألة الرياضية بأسلوب آخر باستخدام صورة أو شكل بياني للتعبير عن المحتوى الرياضي للمسألة لغرض مساعدة الطالب في فهم فكرتها والتوصل إلى استراتيجية تناسب حل المسألة (العبدالواحد، 2023).

ويعرفها الباحث إجرائياً بأنها استخدام اشكال صورية متنوعة لإعادة صياغة السؤال لتسهيل المفهوم الرياضي والعمليات الإجرائية، مما يتيح للطالب فهم السؤال أو الاستدلال لاستراتيجية مناسبة لإيجاد الحل.

نظرية دوبنسكي (APOS): احدى نظريات التعلم البنائية طورها دوبنسكي (Dubinsky) تفترض ان عملية بناء المعرفة الرياضية يمكن ان يكون ادة لتوظيف المفاهيم الرياضية الأكثر تقدماً، وتفترض نظريته ان المفهوم الرياضي يتطور كلما حاول الطالب تحويل الكائنات المادية او العقلية المتوفرة لديه، على الرغم من أداء العمل يمكن اعتبار العملية بمثابة تطور لمستويات المعرفة، وهذا يتضمن تطورات جزئية للمفهوم الذي تم بناؤه(Arnawa, Yanita, Yerizon, Ginting & Nita, 2021).

الدراســات الســابقة

تعد الدراسات السابقة من أهم المصادر التي تزود الباحث بالمساعدة والتوجيه نحو تحديد مشكلة الدراسة ووضع الفروض واختيار العينة، تم إجراء العديد من الدراسات حول تعلم الرياضيات بناء على نظرية APOS ولكن الدراسات العربية التي اتبعت المنهج النوعي والتي تناولت تحليل فهم الطلبة بناءاً على هذه النظرية نادرة على حد علم الباحث مما دعا الباحث الى الاستعانة بالدراسات الاجنبية و قام بترتيبها من الاحدث الى الاقدم وكما يلي:

هدفت دراسة بورجي ومارتينز (Borji &Martínez ,2023) إلى التعرف على فهم الطلاب لحجم الأجسام الصلبة الدورانية المتضمنة في الكتاب المدرسي تحليل قائم على نظرية APOS واتبعت الدراسة المنهج النوعي واستخدام مقابلات شبه منظمة مع تسعة طلاب لمعرفة أي من البنى المقترحة في الكتاب المدرسي الذي استخدمه الطلاب في دراستهم لاستنتاج البنى الذهنية التي يقترحها الكتاب لفهم مجسمات الدوران، وما هي البنى غير المتوقعة أو المفترضة لديهم، و استخدام نتائج المقابلات والدراسات البحثية لإثراء وتقديم مقترح بديل لبناء أحجام الدوران. تشير النتائج إلى أن العديد من الطلاب لم يبنوا عمليات لتصور مجسمات الدوران وربط مجاميع ريمان بالتكاملات المحددة المقابلة. كما تم مناقشة الآثار المترتبة على المناهج الدراسية والتدريس.

هدفت دراسة ارنوى ويانيت ويريزون وجنتنغ ونيتا (Arnawa, Yanita, Yerizon, Ginting & Nita, 2021) الى معرفة آثر نظرية APOS على تحصيل الطلاب في الجبر الخطي الأولي (ELA) وفقاً للمعرفة السابقه، وانتهجت الدراسة منهجاً تجريبياً، على عينة قوامها(٦٥) طالبا من طلاب الهندسة الصناعية في جامعة الأندلس التحقوا بـ ٢٠١٩ مقسمين ألى٣٥ طالبا للمجموعة التجريبية و(٣٠) طالباً للمجموعة الضابطة، وكانت أداة الدراسة عبارة عن اختبارحل مسألة في موضوعات المصفوفات والمتجهات الفضائية. وأظهرت النتائج فروقا فردية لصالح

المجموعة التجريبية وأن الطلاب الذين ليس لديهم معرفة سابقة نتائج تحصيلهم غير مرضية وفق نظرية APOS .

أما دراسة ناجل ومارتينز وروسو(Naglea, Martínez Russo, 2019) فهدفت إلى استخدام نظرية APOS كإطار لدراسة فهم الطلبة لموضوع الميل ومناقشة التطور المعرفي للطلاب فيما يتعلق بمفاهيم الميل المختلفة من خلال الجمع بين نظرية APOS، والتصورات الأحد عشر للميل التي وصفها روسو وكونر وروج (Russo, Conner, & Rugg)

اما دراسة بانسيلال وبريجلال و تريغوروس (Bansilal, Brijlall & Trigueros, 2017) فهدفت لاستكشاف فهم معلمي ما قبل الخدمة للتطبيق المتقابل واحد لواحد . شارك في المشروع ٥٤ معلما متخصصا في تدريس الرياضيات للصفوف من العاشر إلى الثاني عشر. غطت هذه المفاهيم جزءا من دورة تحليلية عملية في إحدى جامعات جنوب أفريقيا. وزعت استبيانات مبنية على التحليل الأولي لمفاهيم الدوالِ المتقابلة وغير المتقابلة على المشاركين الأربعة والخمسين. وحللت إجاباتهم الكتابية، التي استخدمت لتحديد البنية الذهنية لهذه المفاهيم، باستخدام نظرية (APOS) وأُجريت مقابلات شبه منتظمة لخمسة معلمين. أشارت النتائج إلى أن معظم المشاركين بنوا مفاهيم فعلية فقط للتطبيق المتقابل، ولم يظهر أي منهم بناء مفهوم موضوعي. يمكن أن تُعزى صعوبات الفهم إلى عدم قدرة الطلاب على بناء مفاهيم الدوال والمجموعات، وهي شرط أساسي للعمل مع التطبيق المتقابل واحد لواحد.

دراسة مارتينز ودلجادو (Martínez& Delgado, 2016) هدفت لتحليل البنية العقلية التي يمتلكها الطلاب لوحدة الدوال المثلثية المتضمنة على الجيب وجيب التمام ومعكوساتها: تطبيق لنظرية APOS. واتبع الباحثان المنهج النوعي من خلال مقابلات شبه منظمة مع أحد عشر طالبا أكملوا دورة جامعية تقليدية في علم المثلثات. يظهر التحليل المفصل للمقابلات أن التخمين مفيد في وصف سلوك الطلاب في مواقف حل المشكلات. تشير النتائج إلى أن الطلاب الذين لديهم تصور عملي للبنى الذهنية المفترضة يمكنهم تحقيق أداء أفضل في أنشطة حل المشكلات.

آجرى بورنز (Burns, 2014) دراسة حاول فيها الحصول على رؤية لفهم الطلبة لمفهوم المشتقة من خلال تحليل الأوراق المكتوبة للطلاب وكذلك المقابلات الجماعية للطلبة مستندا على اطار نظرية (APOS) واتبع الباحث المنهج النوعي في دراسته وتكونت عينة الدراسة من (30) طالباً وطالبة ومن اهم نتائج الدراسة وجود ضعف في عند الطلاب في إيجاد رأس الدالة التربيعية ومشتقتها وكذلك الربط مختلف المسائل الرياضية التي تستخدم التفاضل.

وفي ذات السياق كانت دراسة آيدن وموتلو (Aydin& Mutlu, 2013) والتي حاولت كشف فهم طلبة المرحلة الثانوية لمفهوم النهايات للدوال باستخدام نظرية (APOS) كإطار لتحليل

بيانات الطلبة والتي تم الحصول عليها من عينة دراستهم البالغة (67) طالبا وطالبة من المرحلة الثانوية المهنيجة واتبع الباحثان المنهج النوعي وبينت نتائج دراستهما وجود صعوبة لدى الطلبة في فهم نهايات الدوال الحقيقية وكذلك افتقار الطلبة للبنى المعرفية في العمليات والاهداف والمخططات.

اما دراسة مارتينز وتريجورس (Martines& Trigueros, 2012) هدفت الى محاولة فهم الطلبة للدوال متعددة المتغيرات مستندين في تحليلهم على نظرية (APOS) كإطار لتحليل بيانات الطلبة والتي تم الحصول عليها من عينة دراستهم البالغة (١٣) طالبا وطالبة درسوا مادة التفاضل وبيت الدراسة ضعفا في قدرة الطلاب على فهم الطلبة للدوال متعددة المتغيزات

التعليق على الدراسات السابقة

تناولت الدراسات السابقة تحليل التعلم وفق نظرية دوبنسكي (APOS) كإطار للتحليل واختلف الباحثون في اتباع المنهجية وعينة الدراسة والمادة العلمية فمثلا دراسة بورجي ومارتينز (Borji &Martínez ,2023) تناولت دوران الاجسام الصلبة واعتمدت الدراسة المقابلات شبه المنتظمة. بينما دراسة (Arnawa, Yanita, Yerizon, Ginting & Nita, 2021) انتهجت منهجاً تجريبياً لمعرفة آثر نظرية APOS على تحصيل الطلاب في الجبر الخطي.(ELA) اما دراسة (Bansilal, Brijlall & Trigueros, 2017) فهدفت لاستكشاف فهم معلمي ما قبل الخدمة للتطبيق المتقابل واحد لواحد، واتبعت منهجا نوعيا لتحقيق هدفها.

تشابهت هذه الدراسة مع الدراسات السابقة بمنهجية الدراسة النوعية واختلفت عنها بالمرحلة الدراسية حيث اختار الباحث المرحلة المتوسطة. وكذلك اختلفت الدراسة بالمادة الدراسية (المفاهيم الهندسية). واختلف عن الدراسات السابقة بأسلوب التحليل حيث استخدم الباحث طريقة تحليل المحتوى الاستدلالية، حيث تم أجراء مقارنات مستمرة بين وحدات من البيانات المجمعة من الاوراق الامتحانية لإجابات الطلاب (جمل، اشكال ورسوم، تعابير جبرية، ومزيج منها) من أجل تحليلها لمكونات نظرية دوبنسكي (APOS).

إجراءات الدراسة

قام الباحث بعد الاطلاع على الدراسات السايقة وتحديد المشكلة بالإجراءات الاتية:

- قام الباحث بالاطلاع على الادبيات النظرية والدراسات السابقة المتضمنة لنظرية دوبنسكي (APOS)

- قام الباحث بإعداد الاختبار الخاص بالدراسة وتم التحقق من صدق الاختبار كما ورد في آداة البحث

- بعد اختيار عينة الدراسة والعينة الاستطلاعية تم تطبيق الاختبار على العينة الاستطلاعية للتحقق من ثبات الاختبار

- تم تطبيق الاختبار على عينة الدراسة حيث تم أولاً توزيع الأسئلة المقالية ومدة الاختبار نصف ساعة وبعدها تم توزيع النسخة الثانية من الاختبار نفس الأسئلة ولكن على شكل تمثيلات صورية لمدة نصف ساعة

منهج البحث:

استخدم الباحث المنهج النوعي واستعان بنظرية (APOS) كإطار للتحليل.

مجتمع وعينة البحث

تكونت عينة الدراسة من 25 طالب درسوا الرياضيات في المرحلة المتوسطة. تلتها مقابلة 5 طلاب تم ترميز أسماؤهم (ع،أ) و (ن،ل) و(ج،ف) و (ح، ن) و (ف، ب) ممن شاركو في الاختبار وكان اختيارهم بناء على رغبتهم لغرض تأكيد الاستدلالات التي تم الحصول عليها من تحليل إجابات الطلبة المكتوبة في أوراق اجاباتهم على الاسئلة المعدة من قبل الباحث.

أداة البحث:

قام الباحث بإعداد اختبار مكون من (5) أسئلة مقالية لكل سؤال ثلاث درجات وإعادة تمثيل هذه الأسئلة على هيئة اشكال صورية حيث تم بناء الاختبار من موضوعات الهندسة المضمنة في كتب الهندسة للمرحلة المتوسطة بعد الاطلاع على الدراسات السابقة واستشارة متخصصين في مجال التدريس من أصحاب الخبرة الطويلة ومتخصصين في اختصاص المناهج وطرائق تدريس الرياضيات ولغرض التحقق من صدق الاختبار وملائمته لاهداف الدراسة تم عرضه على (7) محكمين متخصصين في مجال مناهج الرياضيات وطرائق تدريسها واختصاص القياس والتقويم وتم الاخذ بالآراء التي اقترحوها حيث لم يتم حذف أي من الأسئلة وتم إعادة صياغة فقط. ولغرض التحقق من ثبات الاختبار تم تطبيقه على عينة استطلاعية مكونة من (20) طالباً وتم حساب معامل الثبات كرونباخ الفا حيث بلغ (0.86) وهي قيمة مقبولة.

عرض النتائج و تفسيرها:

تحليل المعطيات حسب مستويات (APOS):

من أجل التحليل المعمق استخدم الباحث طريقة تحليل المحتوى الاستدلالية، حيث تم أجراء مقارنات مستمرة بين وحدات من البيانات المجمعة من الاوراق الامتحانية لإجابات الطلاب (جمل، اشكال ورسوم، تعابير جبرية، ومزيج منها) من أجل تحليلها لمكونات نظرية دوبنسكي (APOS)

الطلاب في مستوى الإجراءات (Actions)

في هذا المستوى (مستوى الإجراء) كان جميع الطلاب قبل أن يتعاملوا مع الأشكال والصور لا يتعرفون على الخصائص والربط بينها، كما إنهم لم يستطيعوا التعامل مع أكثر من تمثيل واحد،

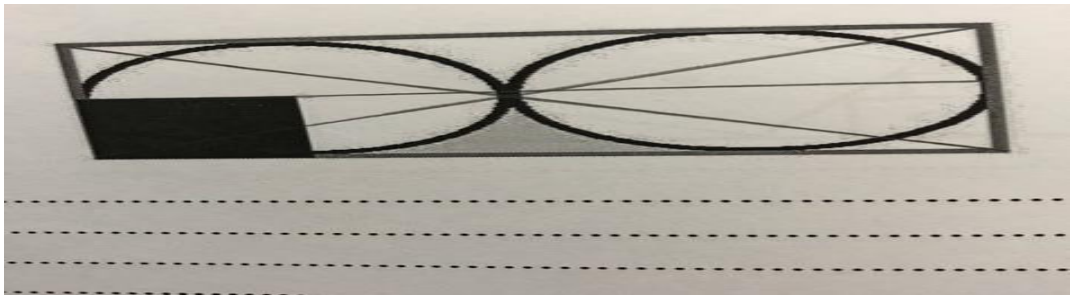
كما أن الصورة الذهنية للعلاقات في السؤال والربط بينها غير واضحة في ذهن طلاب هذا المستوى، و (9) طلاب لم يتجاوزوه إلى المستوى التالي.

أما بعد أن تعاملوا مع الأشكال والصور من مظهرها العام وتعرفوا على الخصائص والربط بينها، كما إنهم استطاعوا التعامل مع أكثر من تمثيل واحد، كما أن الصورة الذهنية للعلاقات في ا لشكل الصوري والربط بينها اتضحت في ذهن طلاب فقد تحسن مستوى هؤلاء الطلاب ليصبحوا في مستوى العمليات (Processes) والذي يعني أنَّه توجد صفتان اساسيتان لعمل هؤلاء الطلاب، الأولى هي رسم الشكل خطوة خطوة (في تخطيطات معروفة لديهم) والتعبير عن المعرفة بالأشكال الصورية إما عن طريق رسم الأقطار (خصائص الدائرة)، أو رسم تخطيطات معروفة لديهم تدل على معرفتهم بخصائص الشكل الصوري. والصفة الأخرى هي القدرة على التعامل مع جميع التمثيلات في الاشكال (كلمات أو رمز أو رسم), كما أن استراتيجية الحل تحتاج إلى تحديد نوع التمثيل سواء لفظي أو رسم, ولكن قسم من الطلبة قادرين على التعامل مع التمثيلات ولكنهم واجهوا صعوبات تتمثل في إغفالهم لأكثر من مفهوم, ولم يحاول الطلاب البحث عن تحويلات جديدة لحلولهم عند تعاملهم مع الرسوم المختلفة أو عند محاولتهم الانتقال من التمثيل الجبري الى التمثيل الصوري وهناك إشارات وضعها الطلاب في هذا المستوى في الورقة الامتحانية من أجل الانتقال من التمثيل الجبري إلى التمثيل الصوري وعند انتقال طلاب الإجراءات من التمثيلين الجبري والصوري إلى التمثيل الكلامي فقد استطاعوا التعبير عن الرسم كلاميا ولكن تنقصهم بعض المعلومات كذكر الابعاد والانتباه للحقائق, وعندما نتأمل الشكل (1) نلاحظ أنَّ الطالب (ع، أ) في هذا المستوى عند إجابته على السؤال (1)

- الباحث: لماذا رسمت هذه القطع المستقيمة؟
- (ع، أ):" لان رسم خط بين نقطتين على محيطها يمثل قطرها"
- الباحث: هل هناك فرق بين المستقيم الذي يمر بمركز الدائرة والمستقيم الذي لا يمر فيه؟
- (ع، أ):" لا يوجد فرق كلاهما يمثل قطرها"

واضح إن الطالب كان في ذهنه مفهوم الدائرة بأنها مجموعة من النقاط في المستوى, والتي تبعد عن نقطة ثابتة بعداً ثابتاً, النقطة الثابتة هي مركز الدائرة, والبعد الثابت هو نصف القطر, بالإضافة الى إدراكه لمفهوم قطر الدائرة هو الوتر المار بالمركز, حيث أدرك الطلاب تمثيل بناء المفهوم من خلال الأفكار الرئيسة والعلاقات للوصول للمفهوم وهذا واضح من خلال تمثيل الطالب ورسمه لقطر الدائرة ولكن الطالب واضح لديه خطأ مفاهيمي بعدم التفريق بين قطر الدائرة الذي يمر بمركزها ووترها (هو الخط المستقيم الواصل بين نقطتين تقع كل منهما على محيط الدائرة) واستخدم حجة خاطئة لتبرير اجابته حيث زعم إن رسم خط بين نقطتين على محيط الدائرة يمثل قطرها" وهو خطأ شائع الانتشار بين الطلاب ربما سبب هذا الاعتقاد هو

عدم تركيز المدرسين على تعريف المفهوم رياضيا وتطبيقه عمليا وقد يكون السبب المعرفة السابقة المناسبة تحد من قدرة الطلبة على وصف العلاقات.



الشكل (1) إجابة طالب بمستوى الإجراءات

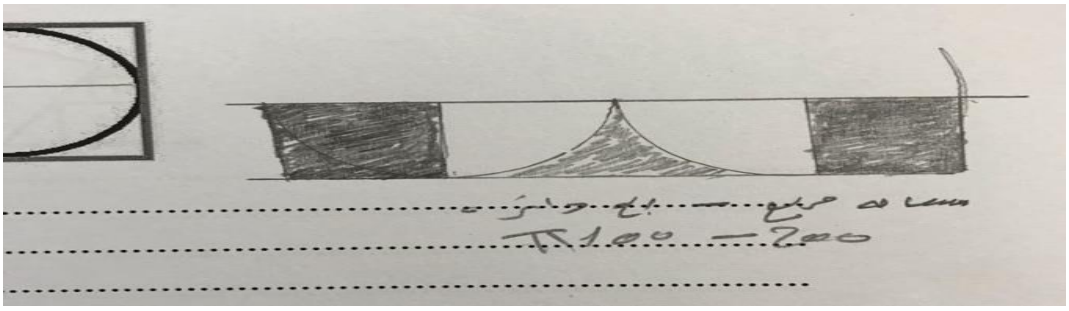
الطلاب في مستوى العمليات (Processes)

مستوى هؤلاء الطلاب قبل القيام بتمثيل أسئلة الاختبار كان على النحو التالي (7) منهم غير قادرين على تحليل الشكل الصوري بدلالة مكوناته والعلاقات بين هذه المكونات من خلال الصفة المميزة لكل شكل ومقارنته بالاعتماد على الخصائص وليس الشكل العام, وهي مهارة أساسية تساهم بتعرفه على الدلالات الصورية وتسمح لهم بتطبيق قانون معروف لديهم (مساحة الدائرة) حيث قاموا بالتمثيل خطوة خطوة, ولم يستطيعوا التعامل مع أكثر من اقطار الدائرة أما بعد تمثيل أسئلة الاختبار فقد تحسن مستواهم ليصبح بمستوى العمليات (Processes), حيثُ استطاعوا قراءة الشكل الصوري وتحويل اللغة الصورية إلى لغة لفظية مكتوبة, مما يعني أنه توجد ثلاث صفات رئيسية لعملهم الأولى هي إجراء التمثيلات بدون الحاجة لإجرائها خطوة خطوة(إلا أنهم احتاجوا في بعض الأحيان رسم نقاط ليتمكنوا من رسم الشكل كاملا), والثانية هي قدرة هؤلاء الطلاب العمل مع التمثيلات الثلاث (جبرية, صورية, كلامية) ولكنهم أغفلوا ترتيب الرسوم والتخطيطات كما اغفلوا ذكر الابعاد عند وصفهم الشكل كلاميا, أما عند تعامل طلاب هذا المستوى مع الرسوم والأشكال ومحاولة الانتقال من التمثيل الصوري إلى التمثيل الجبري, فقد نجحوا في ذلك دون الحاجة إلى إشارات أو علامات خارجية مساعدة. بالإضافة لذلك أغفل طلاب هذا المستوى وصفهم التمثيلات كلامياً، وعندما نتأمل الشكل (٢) ونناقش الطالب (ن، ل):

- الباحث: لماذا رسمت هذا الشكل؟
- (ن، ل):" بسبب وجود علاقة بين مساحة المربع والدائرة"
- الباحث: ماهي العلاقة؟
- (ن، ل):" طرح مساحة الدائرة من مساحة المربع تعطي مساحة الجزء المظلل"
- الباحث: ماهي مساحة المربع؟
- (ن، ل):" طول الضلع في نفسه"
- الباحث: كيف تعبر عنها رياضياً؟

- (ن، ل): 10x10 = 100
- الباحث: إذا كانت مساحة المربع (١٠٠) لماذا كتبت (200)؟
- (ن، ل):" لانه في الشكل مربعان"
- ماذا تقصد ب (100π)؟
- (ن، ل): "مساحة الدائرة"
- الباحث: هل تستطيع ان تؤشر بإصبعك على الدائرة؟
- (ن، ل): يؤشر على ربع الدائرة

فإنَّه يدل على أنَّ الطالب (ن،ل) قادر على تحليل الشكل الصوري من خلال تحليل منظومات العلاقات في الشكل الصوري إلى منظومات فرعية مع إعادة تركيبها وإدراك فهم شامل للشكل الصوري (تحليل الصورة إلى أجزاء) وهذا يعني إنَّه قادر على ممارسة التركيز في الرسم على التفاصيل التي تتفق مع تحقيق الهدف في اطار التنظيم لعملية تحليل الشكل الصوري, يدل على أنَّ الطالب قادر على ان يقرر الترتيب المناسب لحل السؤال, فهو عندما يكرر ممارسة الإجراء يصبح لديه بنية عقلية داخلية وصورة ذهنية, وهنا يكون الطالب قد تمكن من إدخال الإجراء إلى عقله, وهذا هو العملية مما يعني انه قادر على ممارسة إنجاز عملية معينة, وهنا الطالب مدرك للعلاقة بين الرمز π وعلاقته بمساحة الدائرة, واستطاع الطالب الانتقال من وضع تمثيلي إلى وضع آخر للوصول إلى الأفكار الرياضية والانتقال من التمثيل الصوري إلى التجريد, أن عدم ادراك الطالب للعلاقة في الشكل الصوري أدى إلى عدم استخلاص المعنى مما أدى إلى عدم وضع استراتيجية مناسبة لحل السؤال على الرغم من تعرفه على الشكل الصوري وميل الطالب إلى اتخاذ القرار باستخدام طريقة الحل بسبب النظر الى جزء من عناصر تعريف المفهوم وربما بسبب الارتباك في تفسيره للعلاقة بين الرمز π وعلاقته بمساحة الدائرة فبدأ بفرضية خاطئة .



الشكل (٢) إجابة طالب بمستوى العمليات

طلاب في مستوى الأهداف (Objects)

قبل تمثيل أسئلة الاختبار كان مستوى الطلاب على النحو التالي: (٩) كانوا في مستوى الإجراء، و(٧) كانوا في العمليات و(٥) في مستوى الأهداف، ولم يكن لدى الطلاب القدرة على بناء المنظومة المفاهيمية المعروضة في الشكل الصوري والعلاقات التي تربط بينها. أما بعد التجربة

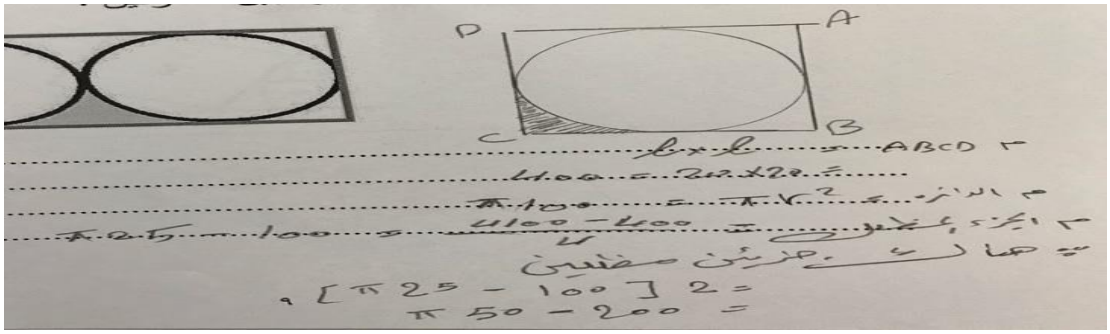
أصبح جميع الطلاب في مستوى الأهداف (Objects) ولم يتجاوز منهم 7 طلاب هذا المستوى إلى المستوى اللاحق (المخططات) ويمثل 28 % من الطلاب، حيث أصبح الطلاب قادرين على ربط العلاقات بين المفاهيم والموضوعات من خلال إدراك الصورة الكلية المركبة للمنظومات المفاهيمية المعروضة والعلاقات التي تربط بينها وتحديد العلاقة بين الأشكال الهندسية المتداخلة. وهذا يعني أنَّه توجد ثلاث صفات أساسية لعملهم، الأولى هي رسمهم للشكل ذهنياً، والثانية هي التعامل مع الاشكال في جميع تمثيلاتها مع المحافظة على الحقائق المتعلقة بها، والثالثة هي محاولتهم تطبيق التحويلات الصورية إلى جبرية ولكنهم أغفلوا بعض التحويلات والابعاد والحقائق. رسومات هؤلاء الطلاب للأشكال المحولة عندما أعطي لهم الشكل الأولي مشابهة لرسومات طلاب مستوى العمليات وذلك بالنسبة للدوائر التي تعامل معها الطلاب وعند تطبيقهم للتحويلات الصورية قاموا بإضافة او حذف أجزاء من الشكل الصوري، واستطاع الطلاب الربط بين الشكل الصوري والرموز كما واضح بالرسم على سبيل المثال حيث قام الطلاب بترميز الشكل (ABCD) بدلا من تسميته مربع، حاول الطلاب في هذا المستوى التعامل مع الشكل الجديد عندما اعطي لهم الرسم الاولي له وطلب منهم معرفة التعبير الجبري ولكنهم أغفلوا بعض الخطوات.

والشكل (٣) إجابة الطالب (ج، ف):

- الباحث: لماذا وضعت الحروف بترميز الشكل (ABCD)
- (ج، ف):" لانه في الشكل مربع له أربعة رؤوس"
- الباحث: لماذا استخدمت مربع في الشكل المرسوم في اجابتك بدلا من المستطيل
- (ج، ف):" لانه طول قطر كل دائرة يمثل طول ضلع مربع"
- الباحث: وماذا يعني
- (ج، ف):" اقطار الدائرة متساوية بالطول واضلاع المربع متساوية بالطول"

يدل على أن الطالب (ج،ف) قادر على تطبيق الإجراء على العملية, أي تطبيق للصورة المادية والذهنية, ويدل على إدراكه بشكل كامل مرحلة العملية فهو قادر على التعامل مع الشكل وتغييره إلى شكل اخر(من مستطيل فيه دائرتين إلى مربع طول ضلعه قطر الدائرة), أن أدراك الطالب للعلاقات والروابط بين التمثيلات المختلفة وربطها بمفاهيم جديدة سهل إمكانية تأملها (اقطار الدائرة متساوية بالطول واضلاع المربع متساوية بالطول), وساعد على الكشف عن العناصر المشتركة للأوضاع الرياضية المختلفة سواء بالرسم واللغة والرموز, بالإضافة إلى قدرته على التعامل بتمثيلات متعددة لتوضيح المفهوم لتقريبه إلى ذهنه لغرض الوصول للتجريد (مساحة الدائرة = πr^2) , كما أن وضوح العلاقات في الشكل الصوري عند الطالب وربط العلاقات في

الشكل جعله يستخلص المعنى من الشكل الصوري ووضع استراتيجية مناسبة ساعدته للوصول للحل بسهولة.



الشكل (3) إجابة طالب بمستوى الأهداف

الطلاب في مستوى مخططات (Schemas)

قبل تمثيل أسئلة الاختبار كان (9) من هؤلاء الطلاب في مستوى الإجراءات (Actions) و (7) منهم في مستوى العمليات (Processes)، بينما كان (5) في مستوى الأهداف (Objects)وطالب واحد فقط في مستوى مخططات، حيث كان الطلاب لا يميزون الإشارات أو العلامات التي تعمل على توضيح المعلومات المرسومة وتفسيرها ومعرفة الحدود الفارقة والمميزة للشكل الصوري عن بقية الأشكال المشابهة له. أما بعد التجربة أصبح (18) طالباً في مستوى المخططات, ويمثل 76 % من هؤلاء الطلاب, فقد اصبح الطلاب يتفاعلون مع عناصر الشكل الصوري بملاحظة العناصر والمتغيرات الملاحظة بدقة واستنتاج العلاقة المتبادلة بين العناصر المختلفة وإيجاد العلاقة بين المدخلات والعمليات والمخرجات, وذلك يعني أنَّه توجد اربع صفات أساسية لعملهم, الأولى هي أدائهم للتحويلات ذهنياً, والثانية هي التعامل مع التحويلات بجميع تمثيلاتها مع المحافظة على جميع الحقائق المتعلقة, والثالثة هي تطبيق الشكل في شكل جديد وقيامهم بذلك خطوة خطوة وبترتيب صحيح والرابعة كانت جميع التمثيلات ومقدارها واتجاهها واضحة وفي علاقات صحيحة, يبين أنهم وصلوا لمستوى المخططات. ويظهر من الشكل (4) إجابة الطالب (ح، ن):

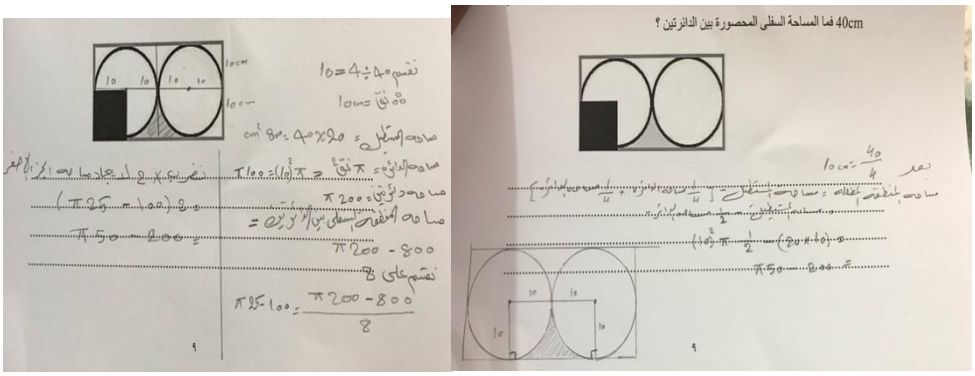
- الباحث: كيف استنتجت الأرقام في الشكل؟
- (ح، ن):"طول المستطيل 40 وهناك دائرتان هذا يعني كل دائرة فيها قطر وبالتالي يوجد4 انصاف اقطار 40 تقسيم 4 يساوي 10 "
- الباحث: من اين جاءت المعادلة في اجابتك؟
- (ح، ن):" المنطقة المظللة تمثل ربع مساحة دائرة و تمثل مربع طول ضلعه 10 وبالتالي تعطي معادلة مساحة المستطيل منقوص منها نصف مساحة دائرة "

ويظهر من الشكل (5) إجابة الطالب (ف، ب):

- الباحث: لماذا قسمت على 8 ؟

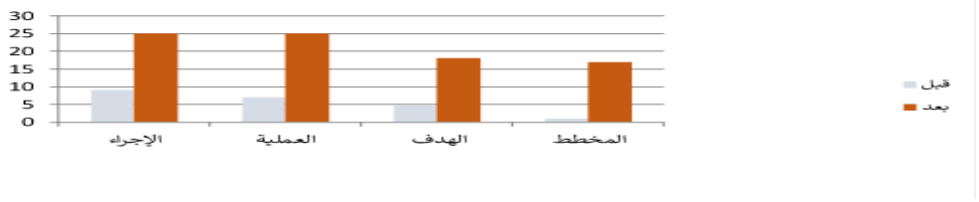
- (ف، ب):" هناك دائرتان وكل دائرة كل دائرة يوجد فيها 4 ارباع ولغرض إيجاد مساحة الربع تقسيم على 8 "
- الباحث: في القوس الأول ضربت (10x20) ثم طرحت منه نصف $\pi\ 10^2$
- (ف، ب):"مساحة المستطيل منقوصا منها ربعي دائرة (تعادل نصف دائرة) "

ويظهر من الشكلين (4 و5) اختلاف طلاب هذا المستوى في رسمهم للشكل الجديد, حيث قام الطالب (ح، ن) في الشكل (4) بوضع علامات بدلاً من رسم الخطوات المختلفة للحصول على الشكل المطلوب الجديد, ويتضح انه يأخذ نتائج العمليات المحسوسة ويضعها في شكل صوري ثم يربط بينها بشكل منطقي باستخدام الرموز اللغوية والعددية (قطر, دائرة, مساحة, مستطيل), والطالب (ف، ب) في الشكل (5) استخدم الشكل الجديد للوصول للحقائق والقوانين باقل جهد وايسر الطرق, حيث نجح طلاب هذا المستوى في التعامل مع الاشكال وتمكنوا من بناء خريطة مفاهيمية متكاملة من الإجراءات والأهداف ومن مخططات أخرى ليصبح لديهم تصوراً واضحاً وشاملاً للمفهوم الرياضي (مساحة المستطيل, القسمة, الكسور , 1/4), أن قدرة الطالب على الربط بين الهندسة والجبر مكنه من تحويل المعطيات من الشكل البصري إلى معادلة جبرية واستيعاب مفاهيمها والخوارزميات المتعلقة بالمعادلة لتحقيق أهداف المعرفة الإجرائية (القسمة على 8 لإيجاد الثمن والضرب في 2 لإيجاد الكل من النصف), وهذا ما ساعدهم على حل السؤال باستخدام صورة الشكل الاولي وطلب منهم إيجاد المساحة المطلوبة باستراتيجيات متنوعة, مما يعني لدى الطالب القدرة على أن يتعرف على الشكل الصوري و يحلله ويربط العلاقات فيه و يدرك الغموض فيه و يستخلص المعنى منه ويستدل الى الحل الصحيح.



الشكل (4) إجابة طالب بمستوى المخططات الشكل (5) إجابة طالب بمستوى المخططات

وتلخيصاً لما سبق الشكل (٦) يوضح استجابات الطلاب قبل التمثيلات وبعدها وفقا لمستويات (APOS)



بين الشكل (٦) أن استجابات الطلاب في مستوى الإجراء قبل تمثيل أسئلة الاختبار (٩) طلاب أما بعدها فكان (25) طالباً، وأن استجابات الطلاب في مستوى العملية قبل التمثيل (7) طلاب أما بعدها فكان (٢٥) طالباً، وأن استجابات الطلاب في مستوى الهدف قبل التمثيل (5) طلاب أما بعدها فكان (18) طالباً، وأن استجابات الطلاب في مستوى المخطط قبل التمثيل كان طالب واحد فقط أما بعدها فأصبح (17) طالباً.

التوصيات و المقترحات:

في ضوء نتائج هذه الدراسة يوصى الباحث بما يلي:

- تضمين المناهج الدراسية بتمثيلات رياضية تلائم المراحل الدراسية كافة.
- توظيف مدرسي الرياضيات للتمثيلات الرياضية لتعزيز فهم الطلاب للمفاهيم الرياضية.
- دراسة تحليل فهم الطلبة للمفاهيم الرياضية في كتاب الجبر للمرحلة المتوسطة.
- دراسة برنامج تدريبي مقترح قائم على نظرية APOS ومعرفة إثره على إداء مدرسي الرياضيات.

المصادر العربية:

العبدالواحد، منيرة. (2023). فاعلية برنامج باستخدام التمثيلات الرياضية في تنميةمهارات الحس العددي لدى أطفال الصف الثاني الابتدائي. ***مجلة جامعة جنوب الوادي الدولية للعلوم التربوية***،6(10) 566 -594.

شموط، عبدالفتاح و الزعبي، علي، رواقة، غازي (2018). اثر استراتيجية تدريسية مبنية على نظرية دوبنسكي (APOS) على تنمية التفكير الرياضي الجبري المتعلق بالاقترانات. ***مجلة الجامعة الإسلامية للدراسات التربوية والنفسية***، 26(2),464-486.

المصادر الأجنبية:

Afgani, M. Suryadi, D. & Dahlan, J. (2017). Analysis of undergraduate Students' mathematical understanding ability of the limit of function based on APOS Theory perspective. ***Journal of Physics: Conf. Series***, 895(1).

https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/895/1/012056

Arnawa, I., Yanita., Yerizon., Ginting, B., & Nita, S. (2021). Does The Use of APOS Theory Promote Students' Achievement in Elementary Linear Algebra. ***International Journal of Instruction***, 14(3), 175-186. Https://doi.org/10.29333/iji.2021.14310a

Arnawa, I. Yerizon, Nita S & Putra, R. (2019). Development of students' Worksheet based on APOS theory approach to improve student achievement in learning system of linear equations. ***International journal of scientific & technology research***, 8(4), 287-292.

Arnawa, I, Yerizon, Nita, S. (2019a). Errors and misconceptions in learning Elementary linear algebra. ***Journal of Physics: Conference Series***, 1321(2).
Https://doi.org/10.1088/1742-6596/1321/2/022095

Arnawa, I, Yerizon, & Nita, S. (2019b). Improvement students' level of proof ability in abstract algebra through APOS theory approach. *International Journal of Scientific & Technology Research,* 8(7), 128-131.

Arnon, I. Cottrill, J. Dubinsky, E. Okta, A. Roa Fuentes, S. Trigueros, M., et al. (2014). APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education. ***New York: Springer Verlag***.

Bansilal, p. Brijlall, D & Trigueros, M. (2017). An APOS study on pre-service teachers' understanding of injections and surjections. ***The Journal of Mathematical Behavior***. 48, 22-37.

Borji, V &Martínez, R. (2023). On students' understanding of volumes of solids of revolution: An APOS analysis. ***The Journal of Mathematical Behavior***. 70

Borji, V. Alamolhodaei, H & Radmehr, F. (2018). Application of the APOS-ACE
Theory to improve students' graphical understanding of derivative. ***EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education***, 14(7), 2947-296.
Https://doi.org/10.29333/ejmste/91451

Dubinsky, E & McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research: An ICMI study. In D. Holton (Ed.). The teaching and learning of mathematics at university level Dordrecht: Springer. (pp. 275–282).

Kleemans, T. Visser ,C & Segers, E. (2025). Linguistic precursors of sixth-grade geometric and fraction skills in children with and without Developmental Language Disorder. ***Learning and Instruction*** 95, 1-11.

https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2024.102019

Martinez, R & Angel C. (2016). The unit circle approach to the construction of the sine andcosine functions and their inverses: An application of APOS theory. ***Journal of Mathematical Behavior (43) 111–133***

Http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.06.002

Martínez, R. Delgado, A. (2016). The unit circle approach to the construction of the sine and cosine functions and their inverses: An application of APOS Theory / ***Journal of Mathematical Behavior*** 43. 111–133

Martínez, R. Trigueros, M. (2019). Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables/ Journal of Mathematical Behavior 55. 111–133

Nagle, C. Martínez, R &Moore, D. (2019). Using APOS theory as a framework for considering slope Understanding. ***Journal of Mathematical Behavior***, https://doi.org/10.1016/j.jmathb.

Naglea, C. Planellb, R. M & Russoc, D. (2019). Using APOS theory as a

Framework for considering slope understanding. *Journal of Mathematical Behavior*, 54, 1-14. Https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.12.003

Syamsuri, Purwanto, Subanji & Irawati, S. (2017). Using APOS theory framework:

Why did students unable to construct a formal proof. ***International Journal on***

Emerging Mathematics Education, 1(2), 135-146. Https://doi.org/10.12928/ijeme.v1i2.5659