توزيع مارشال اولكن توب ليون ويبل المرن خصائص مع تطبيق

الباحثة: نور قيس محسن | أ.م.د. منذر عبدالله خليل | أ.م.د. أزهر عباس محمد
كلية علوم الحاسوب والرياضيات | كلية علوم الحاسوب والرياضيات | كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة تكريت | جامعة تكريت | جامعة تكريت
Sword.cutter46@yahoo.com | mun880088@tu.edu.iq | drazh64@tu.edu.iq

المستخلص:

قدمنا في هذا البحث توزيع مارشال اولكن توب ليون ويبل المرن وهو توسيع لتوزيع ويبل المرن. العديد من الخصائص الاحصائية تم دراستها بما في ذلك الدالة الكمية والعزوم والدالة المولدة للعزوم والاحصاءات المرتبة. بالإضافة الى ذلك تم تقدير معالم التوزيع الجديد باستخدام طريقة الامكان الاعظم. طبقت محاكاة لدراسة سلوك معالم التوزيع الجديد. ولأثبات مطابقة ومرونة التوزيع تم تطبيقه على بيانات حقيقية هندسية للضغط والاجهاد لـ ٦٣ عينة ومقارنته مع العديد من التوزيعات مثل توزيع بيتا ويبل المرن، كوماراسوامي ويبل المرن، توسيع تعميم ويبل المرن، ويبل ويبل المرن، ويبل المرن. اثبت التوزيع الجديد ملائمة عالية للبيانات الحقيقية بالمقارنة مع بعض التوزيعات المعروفة باعتماد على معايير الاحصائية ومن هذه المعايير:

- معيار اكاياكي (Akaike information criterion: AIC).
- معيار اكاياكي المصحح (Corrected Akaike information criterion: CAIC).
- معيار بييز (Bayesian information criterion: BIC).
- معيار هنان-كوين (Hannan-Quinn information criterion: HQIC).

الكلمات المفتاحية: مارشال اولكن، توب ليون، ويبل المرن، الخصائص الاحصائية، الاحصاءات المرتبة.

The Marshall-Olkin Topp Leone Flexible Weibull distribution Properties with Application

Researcher: Noor Qais mohsin
College of Computer Science & Mathematics
Tikrit University

Assist. Prof. Dr. Mundher A. khaleel
College of Computer Science & Mathematics
Tikrit University

Assist. Prof. Dr. Azhar Abbas Mohammad
College of Computer Science & Mathematics
Tikrit University

Abstract:

This paper introduces the Marshall-Olkin Topp Leone Flexible Weibull distribution as an extension of the flexible Weibull distribution. Its numerous statistical properties are established including the quintal function, moments, the generating function, order statistics and obtained while the unknown model parameters are estimation by using the method of maximum likelihood estimating. Simulation studies were also conducted and the behaviour of the Marshall-Olkin Topp Leone flexible Weibull parameters were investigated. The application of Marshall-Olkin Topp Leone Flexible Weibull distribution is illustrated by making use of real engineering data for strength and stress for 63 samples, this is done to demonstrate its potentials over some other important distributions like the Beta Flexible Weibull, Kumaraswamy Flexible Weibull, Exponentiated Generalized Flexible Weibull, Weibull Flexible Weibull, and Flexible Weibull, distributions. It shows the new distribution very fit for the dataset compared with others known distributions. Based on statistical standards, one of these criteria is the:

- Akaike information criterion (AIC).
- Corrected Akaike information criterion (CAIC).
- Bayesian information criterion (BIC).
- Hannan- Quinn information criterion (HQIC).

Keywords: Marshall-Olkin, Topp Leone, Flexible Weibull, Statistical properties, Order Statistics.

المقدمة

هناك العديد من الظواهر في هذا العالم تحتاج الى وصف احصائي لها حتى تكون أكثر فهما للقارئ ولكن لا يوجد توزيع احصائي محدد يصف كل هذه الظواهر. لذلك مؤخرا لجأ العديد من الباحثين الى تطوير عوائل جديدة من التوزيعات وذلك بإضافة معلمة واحدة او معلمتين او ثلاث. ففي عام ١٩٩٧ قام الباحثان (Marshall and Olkin, 1997) بتوليد عائلة جديدة من خلال اضافة معلمة شكل الى التوزيع الاساسي. الكثير من الباحثين استخدموا هذه العائلة لإيجاد ودراسة توزيعات جديدة. في عام (2019) قام كل من (Maxwell et al.,) و (Ahmed, 2019) و (Abu Jarad et al., 2019) و (Abdullah et al., 2019) باستخدام عائلة مارشال اولكن وذلك بتوسيع توزيع:

exponentiated exponential, Exponentiated BurrX, Exponential Gompertz, Invers Lomax

وتطبيقه على بيانات السرطان والضغط والاجهاد على التوالي، وهناك بحوث اخرى استخدموا عائلة (Marshall-Olkin-G) مثل (Khalil et al., 2020) و (Ahmed et al., 2020). وقام (Eugene et al., 2002) باستخدام توزيع Beta لإيجاد عائلة جديدة وذلك بإضافة معلمتي شكل الى التوزيع الاساسي. حيث قام كل من (Merovci et al., 2016) و (Khaleel et al., 2017) باستخدام عائلة Beta وتطبيق التوزيعات الجديدة على بيانات هندسية وأخرى زراعية على التوالي. وفي العام ٢٠٠٩ قام كل من الباحثين (Zografos and Balakrishnan, 2009) بإيجاد عائلة (Gamma-G) وذلك بإضافة معلمة شكل واحدة الى التوزيع الاساسي والهدف منه زيادة المرونة للتوزيع. وبهذا الصدد قام الباحثين (Khaleel et al., 2016) بتوسيع توزيع (Burr X) باستخدام هذه العائلة وتطبيقها على بيانات رياضية.

وبنفس السياق قدم الباحثين (Bourguignon et al., 2014) باستخدام توزيع ويبل وذلك لإيجاد عائلة جديدة (Weibull-G) من خلال اضافة معلمتي شكل الى التوزيع الاساسي. وباستخدام هذه العائلة قام (Ibrahim et al., 2017) و (مظهر وآخرون، ٢٠١٨) و (Jamal et al., 2019) و (Oguntunde et al., 2019) باستخدام هذه العائلة لدراسة بيانات أجنحة الطائرات ودعم القرار في القطاع الصحي وبيانات كهربائية ومرضى السرطان على التوالي. وفي عام ٢٠١٧ قام (Alizadeh et al., 2017) باستخدام توزيع (Gompertz) وذلك لتوليد عائلة جديدة لها مرونة عالية في وصف بيانات مختلفة.

حيث قام كل من (Abdal-hameed et al., 2018) و (Oguntunde et al., 2018) و (Oguntunde et al., 2019) و (Khaleel et al., 2020) بتطبيق هذه التوزيعات على انواع مختلفة من الظواهر الطبيعية اليومية. في هذا البحث نقدم توسيع جديد لتوزيع ويبل المرن (Flexible Weibull) القادر على نمذجة البيانات الهندسية. حيث يمتاز بمرونة عالية من حيث الملائمة في تحليل البيانات الحقيقية، العديد من الدراسات اجريت على توزيع ويبل المرن في السنوات الأخيرة. حيث تم اقتراح ودراسة توزيع ($\text{Flexible Weibull extension: FWE}_X$) على نمذجة بيانات مدى الحياة من قبل (Bebbington et al., 2007) وتوسيع ويبل المرن المعمم (generalized Flexible Weibull extension: $(GFWEx)$) من قبل (Ahmad and Iqbal, 2017).

تضمن المبحث الثاني ايجاد التوزيع المقترح دالة كثافة احتمالية (PDF) ودالة كتلة احتمالية (CDF). تناول المبحث الثالث ايجاد توسيع لدالة (PDF). اما المبحث الرابع ايجاد ودراسة اهم الخصائص الرياضية للتوزيع المقترح. والمبحث الخامس تم من خلاله دراسة المحاكاة، وفي المبحث السادس تقدير معلمات التوزيع باستخدام طريقة الامكان الاعظم. وختم البحث بالاستنتاجات.

١. توزيع (Marshall-Olkin Topp Leone Flexible Weibull: MOTLFW):

ليكن لدينا توزيع Flexible Weibull بدالة كتلة احتمالية (CDF)، ودالة كثافة احتمالية (PDF) على التوالي، وكالتالي:

$$F(x;\delta,\gamma)=1-e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\quad \delta,\gamma>0\,,x>0 \qquad (1)$$

$$f(x;\delta,\gamma)=\left(\delta+\frac{\gamma}{x^2}\right)e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}\,e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}} \qquad (2)$$

حيث أن δ,γ تمثل معالم الشكل للتوزيع الاساسي وليكن لدينا دالة (pdf, cdf) للعائلة Marshall Olkin-G $(MO-G)$:

$$M(x;c,\emptyset)=\frac{T(x;\emptyset)}{1-\bar{c}\bar{T}(x;\emptyset)},\qquad \bar{T}(x)=1-T(x),\ \bar{c}=1-c \qquad (3)$$

$$m(x;c,\emptyset)=\frac{ct(x;\emptyset)}{\left(1-\bar{c}\bar{T}(x;\emptyset)\right)^2} \qquad (4)$$

حيث أن $\emptyset$ هي مجموعة من المعالم للتوزيع الأساسي.

ليكن لدينا (pdf, cdf) للعائلة Topp Leone- G$(TL-G)$ على التوالي:

$$T(x;\alpha,\emptyset)=\{1-[1-F(x;\emptyset)]^2\}^{\alpha} \qquad (5)$$

وعلية فان دالة البقاء للعائلة Topp Leone- G$(TL-G)$ هي كالتالي:

$$S(x;\alpha,\emptyset=1-T(x;\alpha,\emptyset)=\bar{T}\,(x;\alpha,\emptyset)=1-\{1-[1-F(x;\emptyset)]^2\}^{\alpha} \qquad (6)$$

باشتقاق معادلة (5) نحصل على:

$$t(x:\alpha,\emptyset)=2\alpha f(x;\emptyset)\ \ [1-F(x;\emptyset)]\left\{1-\left(1-F(x;\emptyset)\right)^2\right\}^{\alpha-1} \qquad (7)$$

نعوض معادلات رقم (5) و (6) في معادلة رقم (3) نحصل على (cdf) عائلة MOTL$-G$ الجديدة.

$$\mathrm{M}(x;c,\alpha,\emptyset)=\frac{\left\{1-\left(1-F(x;\emptyset)\right)^{2}\right\}^{\alpha}}{1-\bar{c}\left\{1-\left(1-F(x;\emptyset)\right)^{2}\right\}^{\alpha}} \qquad (8)$$

نعوض معادلات رقم (7) و (6) في معادلة رقم (4) نحصل على (pdf) للعائلة MOTL-G الجديدة.

$$\mathrm{m}(x;c,\alpha,\emptyset)=\frac{2\alpha c\ f(x)[1-F(x)]\left\{1-\left(1-F(x;\emptyset)\right)^{2}\right\}^{\alpha-1}}{\left[1-\bar{c}\left\{1-\left(1-F(x;\emptyset)\right)^{2}\right\}^{\alpha}\right]^{2}} \qquad (9)$$

عند تعويض معادلة رقم (1) وفي معادلة رقم (8) نحصل على (cdf) للتوزيع الجديد MOTLFW كما يلي:

$$\mathrm{M}(x;c,\alpha,\delta,\gamma)=\frac{\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^{2}\right\}^{\alpha}}{1-\bar{c}\left[1-\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^{2}\right\}^{\alpha}\right]} \qquad (10)$$

باشتقاق معادلة (10) نحصل على pdf للتوزيع الجديدMOTLFW.

$$\mathrm{m}(x;c,\alpha,\delta,\gamma)=2\alpha c\left(\delta+\frac{\gamma}{x^{2}}\right)e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\frac{\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^{2}\right\}^{\alpha-1}}{\left\{1-\bar{c}\left[1-\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^{2}\right\}^{\alpha}\right]\right\}^{2}} \qquad (11)$$

ان دالة البقاء Survival function التي ترمز لها $S(x)$ تعطى بالشكل الاتي:

$$\mathrm{S}(x;c,\alpha,\delta,\gamma)=1-M(x;c,\alpha,\delta,\gamma)$$

$$\mathrm{S}(x;c,\alpha,\delta,\gamma)=1-\frac{\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^{2}\right\}^{\alpha}}{1-\bar{c}\left(1-\left\{1-\left[e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right]^{2}\right\}^{\alpha}\right)} \qquad (12)$$

اما دالة المخاطرة hazard function التي ترمز لها $\mathrm{h}(t)$ او تسمى دالة معدل الفشل نحصل عليها من الصيغة التالية:

$$h(x;c,\alpha,\delta,\gamma)=\frac{m(x;c,\alpha,\delta,\gamma)}{S(x;c,\alpha,\delta,\gamma)}$$

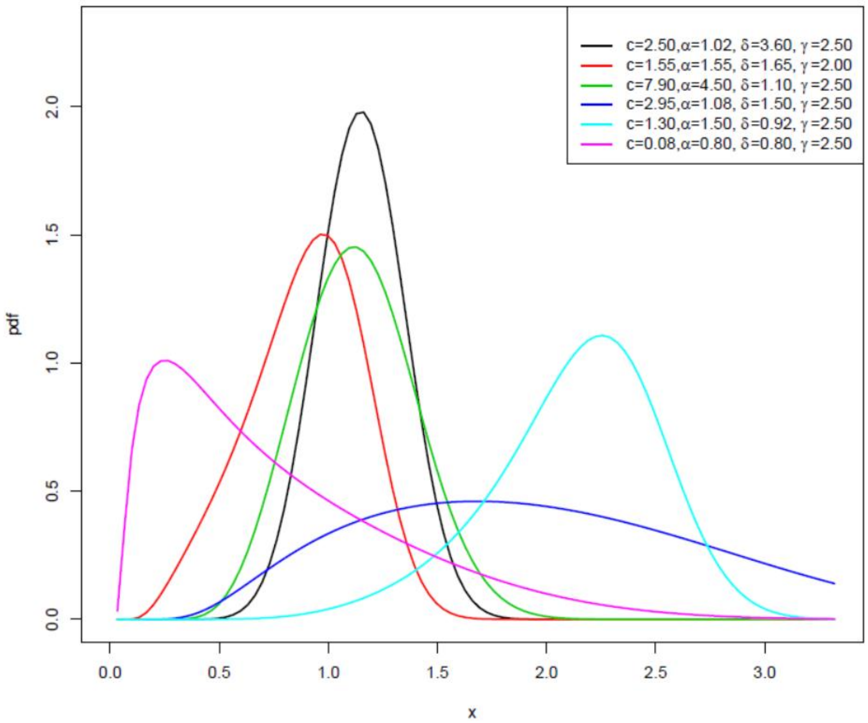
$$\mathrm{h}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{c},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\gamma})=\frac{2\alpha c\left(\delta+\frac{\gamma}{x^{2}}\right)e^{\left(\delta x-\frac{\gamma}{x}\right)}\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^{2}\times\frac{\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^{2}\right\}^{\alpha-1}}{\left\{1-\bar{c}\left[1-\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^{2}\right\}^{\alpha}\right]\right\}^{2}}}{1-\frac{\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^{2}\right\}^{\alpha}}{1-\bar{c}\left(1-\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^{2}\right\}^{\alpha}\right)}} \qquad (13)$$

الشكل (١) يعرض بعض الرسومات لدالة PDF للتوزيع المقترح MOTLFW باختيار قيم مختلفة لمعالم التوزيع حيث يظهر لدينا اشكال مختلفة التماثل والشكل الاحادي تأخذ شكل الالتواء من اليمين عندما تكون قيمتها سالبة و الالتواء من اليسار عندما تكون قيمتها موجبة ويمكن ايجاد كل الالتواء من الصيغة التالية (Ahmedd, et al., 2019):

$$S_k = \frac{Q(3/4) + Q(1/4) - 2Q(1/2)}{Q(3/4) - Q(1/4)}$$

حيث أن اغلب هذه الاشكال تكون ذات التواء موجب وتفلطح بعدة اشكال مثل المدبب والمتوسط والمسطح بالاعتماد على تغير قيم المعالم ويكتب التفلطح بالصيغة الاتية:

$$M_u = \frac{Q(7/8) - Q(5/8) + Q(3/8) - Q(1/8)}{Q(6/8) - Q(2/8)}$$



الشكل (١): يعرض الاشكال المحتملة للتوزيع المقترح باستخدام قيم مختلفة للمعالم

٢. توسيع دالة الكثافة الاحتمالية (Expansion of pdf):

تمت دراسة بعض الخصائص الرياضية للتوزيع الجديد يأخذ بنظر الاعتبار حيث أن توسيع (pdf) للتوزيع الجديد يسهل علينا الكثير من العمليات الرياضية في ايجاد بعض الخصائص وذلك بأخذ معادلة (11) وتبسيطها لإجراء هذه العمليات نقوم باستخدام مفكوك ثنائي الحدين عدة مرات (Khaleel et al., 2018) بالصيغة الاتية :

$$(1-w)^{-j} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+i)}{\Gamma(j)\, i!} w^i \qquad (14)$$

باستخدام معادلة (14) وتعويض على المقام معادلة رقم (11) نحصل على:

$$\left[1-\bar{c}\left(1-\left\{1-\left[e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right]^{2}\right\}^{\alpha}\right)\right]^{-2}=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\,\bar{c}^{\,i}\left(1-\left\{1-\left[e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right]^{2}\right\}^{\alpha}\right)^{i}$$

$$(1-w)^{i}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\Gamma(k+i)}{\Gamma(i)\,k!}w^{k} \qquad (15)$$

بتبسيط المعادلة (11) واستخدم معادلة (15) يمكن تبسيط المقدار الى:

$$\left(1-\left\{1-\left[e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right]^{2}\right\}^{\alpha}\right)^{i}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\Gamma(k+i)}{\Gamma(i)\,k!}\left\{1-\left[e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right]^{2}\right\}^{\alpha k}$$

$$m(x;c,\alpha,\delta,\gamma)=2\alpha c\left(\delta+\frac{\gamma}{x^{2}}\right)e^{\left(\delta x-\frac{\gamma}{x}\right)}\,e^{-2e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^{2}\right\}^{\alpha-1}$$

$$*\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\,\bar{c}^{\,i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\Gamma(k+i)}{\Gamma(i)\,k!}\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^{2}\right\}^{\alpha k}$$

$$=2\alpha c\sum_{i,k=0}^{\infty}\bar{c}^{\,i}\,\frac{(i+1)(-1)^{k}\Gamma(k+i)}{\Gamma(i)\,k!}\left(\delta+\frac{\gamma}{x^{2}}\right)e^{\left(\delta x-\frac{\gamma}{x}\right)}\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^{2}\right\}^{\alpha(k+1)-1}$$

وباستخدام معادلة (15) مرة اخرى

$$\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^{2}\right\}^{\alpha(k+1)-1}=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s}\binom{\alpha(k+1)-1}{s}\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^{2s}$$

$$=\sum_{i,k,s=0}^{\infty}(i+1)(-1)^{k+s}\binom{\alpha(k+1)-1}{s}\frac{\Gamma(k+i)}{\Gamma(i)\,k!}\,2\alpha c\bar{c}^{\,i}$$

$$*\left(\delta+\frac{\gamma}{x^{2}}\right)e^{\left(\delta x-\frac{\gamma}{x}\right)}\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^{2(s+1)}$$

وباستخدام مفكوك Exponential:

$$e^{-tx}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j}x^{j}t^{j}}{j!}$$

$$e^{-2(s+1)e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j}(2(s+1))^{j}}{j!}\left(e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}\right)^{j}$$

لنحصل على الصيغة النهائية لدالة (pdf):

$$m(x;c,\alpha,\delta,\gamma)=2\alpha c\,\boldsymbol{v}_{i,k,s,j}\left(\delta+\frac{\gamma}{x^{2}}\right)\left(e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}\right)^{j+1} \qquad (16)$$

$$\boldsymbol{v}_{i,k,s,j}=\sum_{i,k,s,j}^{\infty}\frac{(-1)^{j+k+s}\,\bar{c}^{\,i}(i+1)(2(s+1))^{j}\Gamma(k+i)\binom{\alpha(k+1)-1}{s}}{\Gamma(i)\,j!\,k!}$$

ان معادلة (16) تفيدنا في ايجاد بعض الخصائص الاحصائية والرياضية مثل العزوم، دالة مولدة للعزوم وغيرها من الخصائص الاحصائية.

٣. الخصائص الرياضية:

٣-١. دالة التوزيع الكمي Quantile function: دالة الكمية هي احدى طرق في تحديد دالة الاحتمال التي نستخدمها للحصول على ايجاد التفلطح والالتواء للتوزيعات التي لا تمتلك عزوم وهي ضرورية لتوليد البيانات في دراسة المحاكاة. يتم تعريف الدالة الكمية (Qf) بانها معكوس الدالة التوزيع التراكمي (Al Abbasi, J.N, 2016) كالاتي:

$$u= f(x) \;\Rightarrow x = f^{-1}(u) = Q(u)$$

وبعكس معادلة(10) يمكن ايجاد دالة (Qf) وكالتالي:

$$Q(u) = f^{-1}(u) = \frac{\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^{2}\right\}^{\alpha}}{1-\bar{c}\left(1-\left\{1-\left[e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right]^{2}\right\}^{\alpha}\right)}$$

حيث أن $u \in (0,1)$

نفرض ان:

$$G(x) = e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}$$

$$\therefore u= \frac{\left\{1-(G(x))^{2}\right\}^{\alpha}}{1-\bar{c}\left(1-\left\{1-[G(x)]^{2}\right\}^{\alpha}\right)}$$

$$\Rightarrow \left\{1-[G(x)]^{2}\right\}^{\alpha} = u - u\bar{c}\left(\left\{1-[G(x)]^{2}\right\}^{\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \left\{1-[G(x)]^{2}\right\}^{\alpha} = u - u\bar{c} + u\bar{c}\left\{1-[G(x)]^{2}\right\}^{\alpha}$$

$$\Rightarrow u\text{-}u\bar{c}=\left\{1-[G(x)]^{2}\right\}^{\alpha}(1-u\bar{c})$$

$$\Rightarrow 1-[G(x)]^{2} = \left[\frac{u-u\bar{c}}{[1-u\bar{c}]}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$G(x)=\left\{1-\left[\frac{u-u\bar{c}}{[1-u\bar{c}]}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

بالتعويض عن قيمة $G(x)$ نحصل على:

$$\Rightarrow e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}} = \left\{1-\left[\frac{u-u\bar{c}}{[1-u\bar{c}]}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

نفرض ان $D =\left\{1-\left[\frac{u-u\bar{c}}{[1-u\bar{c}]}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

نأخذ ln للطرفين:

$$-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}=ln\,D \Rightarrow \delta x-\frac{\gamma}{x} = ln[-\,ln\,D]$$

$$\Rightarrow \delta x^{2}-\gamma = x\,ln[-\,ln\,D]$$

$$\Rightarrow \delta x^{2}-x\,ln[-\,ln\,D]-\gamma = 0$$

باستخدام معادلة المميز نحصل على:

$$\therefore x = \frac{1}{2\alpha}\left\{ln\left[-ln\left\{1-\left[\frac{u-u\bar{c}}{[1-u\bar{c}]}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\frac{1}{2}}\right] \pm \sqrt{\left[ln\left(-ln\left\{1-\left[\frac{u-u\bar{c}}{[1-u\bar{c}]}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{2} + 4\delta\gamma}\right\}$$

بما ان دالة الكمية موجبة فأننا نحصل على:

$$Q(u) = X = \frac{1}{2\alpha}\left\{\ln\left[-\ln\left\{1-\left[\frac{u-u\bar{c}}{[1-u\bar{c}]}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\frac{1}{2}}\right] + \sqrt{\left[\ln\left(-\ln\left\{1-\left[\frac{u-u\bar{c}}{[1-u\bar{c}]}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{2} + 4\delta\gamma}\right\} \quad (17)$$

ويمكن ان نحصل على الوسيط التوزيع من المعادلة (17) عندما u=0.5

$$Med = \frac{1}{2\alpha}\left\{ln\left[-ln\left\{1-\left[\frac{0.5-\bar{c}0.5}{[1-\bar{c}0.5]}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\frac{1}{2}}\right] + \sqrt{\left[ln\left(-ln\left\{1-\left[\frac{0.5-\bar{c}0.5}{[1-\bar{c}0.5]}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{2} + 4\delta\gamma}\right\} \quad (18)$$

تعتبر المعادلة (17) مهمه جدا في الحصول على بعض المقاييس المعروفة مثل (skewness Bowley's) و (Moor's kurtosis) وايضا مفيدة لمحاكاة المتغيرات العشوائية لتوزيع (MOTLFW).

٢-٣. العزوم والدالة المولدة للعزوم (Moments, Moment generating function)

يلعب العزوم دورا مهما في ايجاد الكثير من خصائص التوزيعات الاحتمالية حيث يمكننا استخدام العديد من الميزات المهمة للعزوم مثل الاتجاه، الالتواء والتفلطح، والتشتت ومعامل الاختلاف والانحراف المعياري، وبإضافة الى ذلك امكانية بإيجاد الوسط الحسابي والتباين ومقاييس اخرى. و يتم الحصول على العزم ذي الدرجة r للتوزيع الجديد $MO\ \ TL\ \ FW$ من العلاقة التالية وذلك بالاعتماد على معادلة (16) بعد (Oguntunde et al., 2018):

$$\acute{\mu}_r = E(x^r) = \int_0^\infty x^r\, m(x; c, \alpha, \delta, \gamma)\, dx$$

باستخدام المعادلة (16) نحصل على:

$$\acute{\mu}_r = \int_0^\infty x^r\, 2\alpha c\, \boldsymbol{v}_{i,k,s,j}\left(\delta + \frac{\gamma}{x^2}\right) e^{(j+1)\delta x - \frac{\gamma}{x}}\, dx$$

$$\acute{\mu}_r = 2\alpha c\, v_{i,k,s,j} \int_0^\infty x^r \left(\delta + \frac{\gamma}{x^2}\right) e^{(j+1)\delta x - \frac{\gamma}{x}}\, dx$$

$$\acute{\mu}_r = 2\alpha c\, v_{i,k,s,j} \int_0^\infty x^r \left(\delta + \frac{\gamma}{x^2}\right) e^{(j+1)\delta x}\ e^{-(j+1)\frac{\gamma}{x}}\, dx$$

باستخدام مفكوك Exponential على مقدار $e^{-(j+1)\frac{\gamma}{x}}$

$$e^{-(j+1)\frac{\gamma}{x}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}(j+1)^{\ell}\gamma^{\ell}}{\ell!} x^{-\ell}$$

$$\Psi_\ell=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell (j+1)^\ell \gamma^\ell}{\ell!}$$

$$=2\alpha c\ \Psi_\ell\ v_{i,k,s,j}\int_0^\infty x^{r-\ell}\left(\delta+\frac{\gamma}{x}\right)e^{(j+1)\delta x}\ dx$$

بعد إجراء بعض العمليات الجبرية نحصل على:

$$=2\alpha c\,\Psi_\ell\ v_{i,k,s,j}\int_0^\infty \delta x^{r-\ell+1-1}e^{(j+1)\delta x}\ dx+\int_0^\infty \gamma\, x^{r-\ell-1-1}\ e^{(j+1)\delta x}\ dx$$

باستخدام دالة كاما Gradshteyn (2014):

$$\frac{\Gamma z}{\theta^z}=\int_0^\infty t^{z-1}\ e^{\theta t}dt \qquad \theta,z>0$$

$$\acute{\mu}_r=2\alpha c\ \Psi_\ell\, v_{i,k,s,j}\left\{\frac{\Gamma(r-\ell+1)}{\delta^{r-\ell}(j+1)^{r-\ell+1}}+\frac{\gamma\Gamma(r-\ell-1)}{\delta^{r-\ell-1}(j+1)^{r-\ell-1}}\right\} \qquad (19)$$

في المعادلة (19) لقد حصلنا على العزوم لاستفادة منه في ايجاد بعض الخصائص التوزيع مثل التباين والوسط الحسابي والالتواء وغيرها من مقاييس اخرى.

تم الحصول على دالة المولدة للعزوم(Mgf) للتوزيع MOTLFW باستخدام مفكوك Exponential حيث يمكن ايجاده بالصيغة الاتية (Khaleel et al., 2018):

$$M_x(t)=E(e^{tX})=\int_0^\infty e^{tx}\ m(x;c,\alpha,\delta,\gamma)\,dx$$

وباستخدام مفكوك Exponential

$$e^{tx}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r x^r}{r!}$$

وباستخدام معادلة (19) نحصل على الصيغة النهائية لدالة مولدة للعزوم كالاتي:

$$\therefore M_x(t)=2\alpha\sum_{i,k,s,j,r}^{\infty}\frac{t^r}{r!}\ \Psi_\ell\ v_{i,k,s,j}\left\{\frac{\Gamma(r-\ell+1)}{\delta^{r-\ell}(j+1)^{r-\ell+1}}+\frac{\gamma\Gamma(r-\ell-1)}{\delta^{r-\ell-1}(j+1)^{r-\ell-1}}\right\}(20)$$

٣-٣. الاحصاءات المرتبة Order Statistic: يتم استخدام الاحصائيات المرتبة لأهميتها المتمثلة في تطبيقات عديدة في مجال الموثوقية واختبار الحياة على نطاق واسع.

لتكن $X_1,X_2\cdots,X_n$ عينة عشوائية بحجم n من التوزيعMO TL- FW وباستعانة كل من pdf و cdf ولتكن $X_{1:n}\le X_{2:n}\cdots\le X_{n:n}$ ترمز للإحصائيات المرتبة من هذه العينات، بحيث أن pdf للإحصاءات المرتبة تكون $1\le k\le n$ ،وتكتب بالشكل $m_{i,n}(x)$ وتعطى بالصيغة التالية. (Ahmedd, 2019):

$$m_{r,n}(x)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}m(x)\sum_{i=0}^{n-r}\binom{n-r}{i}\ (-1)^i\ (M(x))^{i+r-1} \quad (21)$$

حيث أن $X_{1:n}$ هي احصائيات المرتبة الاول التي يشير الى أصغرها.

$$X_{1:n}=min\ X_{i:n}\ i=1,2,3,,\ldots,n$$

$X_{2:n}$ اصغر ثاني من $X_{i:n}$ و. $X_{n:n}$ لn^{th} هي إحصائيات المرتبة الاخيرة التي تشير الى أكبرها.

$$X_{n:n}=max\,X_{i:n}\ \ i=1,2,3,\ldots\ ,n$$

لتكن:

$$m_{r,n}(x)=\frac{n!\,m(x;c,\alpha,\delta,\gamma)}{(r-1)!\,(n-r)!}\ [M(x;c,\alpha,\delta,\gamma)]^{r-1}\ [1-M(x;c,\alpha,\delta,\gamma)]^{n-r} \quad (21)$$

بتعويض معادلة (16) والمعادلة (10) في معادلة (20) نحصل على المعادلة الاتية:

$$m_{r,n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left(2\alpha c\, v_{i,k,s,j}\left(\delta+\frac{\gamma}{x^2}\right)\left(e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}\right)^{j+1}\right)\left[\frac{\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^2\right\}^{\alpha}}{1-\bar{c}\left[1-\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^2\right\}^{\alpha}\right]}\right]^{r-1}\left[1-\frac{\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^2\right\}^{\alpha}}{1-\bar{c}\left[1-\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^2\right\}^{\alpha}\right]}\right]^{n-r}$$

إذا عوضنا r=1 نحصل على أصغر احصاء مرتبة:

$$m_{1,n}(x) = n\left(2\alpha c\, v_{i,k,s,j}\left(\delta+\frac{\gamma}{x^2}\right)\left(e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}\right)^{j+1}\right)\left[\frac{\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^2\right\}^{\alpha}}{1-\bar{c}\left[1-\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^2\right\}^{\alpha}\right]}\right]^{r-1}\left[1-\frac{\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^2\right\}^{\alpha}}{1-\bar{c}\left[1-\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^2\right\}^{\alpha}\right]}\right]^{n-r}$$

إذا عوضنا r=n نحصل على أكبر احصاء مرتبة:

$$m_{n,n}(x) = n\left(2\alpha c v_{i,k,s,j}\left(\delta+\frac{\gamma}{x^2}\right)\left(e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}\right)^{j+1}\right)\left[\frac{\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^2\right\}^{\alpha}}{1-\bar{c}\left[1-\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^2\right\}^{\alpha}\right]}\right]^{r-1}\left[1-\frac{\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^2\right\}^{\alpha}}{1-\bar{c}\left[1-\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x-\frac{\gamma}{x}}}\right)^2\right\}^{\alpha}\right]}\right]^{n-r}$$

٤. طريقة الامكان الاعظم (MLE) $method$ Maximum Likelihood: من احدى الطرق في تقدير معالم التوزيع الاحصائي هي طريقة الامكان الاعظم ويكون الاكثر استخداما في ايجاد تقدير لقيمة معلمة (Ahmedd, 2019).

ولتكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية من حجم n للتوزيع MOTLFW وباستخدام pdf يمكن ايجادها بالصيغة الاتية:

$$m(X_1, X_2, \dots, X_n; c, \alpha, \delta, \gamma) = \prod_{i=0}^{n} 2\alpha c\left(\delta+\frac{\gamma}{x_i^2}\right)e^{\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}}\left(e^{-e^{\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}}}\right)^2 \times \frac{\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}}}\right)^2\right\}^{\alpha-1}}{\left\{1-\bar{c}\left[1-\left\{1-\left(e^{-e^{\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}}}\right)^2\right\}^{\alpha}\right]\right\}^2} \quad (22)$$

تكون الدالة اللوغاريثمية للدالة الامكان الاعظم كالاتي:

$$\ell = n\ln(2\alpha c) + \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\delta+\frac{\gamma}{x_i^2}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right) - 2\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}\right)$$
$$+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-e^{-2e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}}\right) - 2\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-\bar{c}\left(1-\left\{1-\left[e^{-e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}}\right]^2\right\}^{\alpha}\right)\right) \quad (21)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \delta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{2}}{\delta x_i+\gamma}+\sum_{i=1}^{n}x_i-2\sum_{i=1}^{n}x_i\, e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}+2(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i\, e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}}{\left(1-e^{-2e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}}\right)}$$

$$-4\alpha\bar{c}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i\, e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}\left\{1-\left[e^{-e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}}\right]^{2}\right\}}{1-\bar{c}\left(1-\left\{1-\left[e^{-e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}}\right]^{2}\right\}^{\alpha}\right)}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \gamma}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\delta x_i^{2}+\gamma}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}-2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}+2(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}}{x_i\left(1-e^{-2e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}}\right)}$$

$$-4\alpha\bar{c}\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}\left\{1-\left[e^{-e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}}\right]^{2}\right\}}{x_i\left(1-\bar{c}\left(1-\left\{1-\left[e^{-e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}}\right]^{2}\right\}^{\alpha}\right)\right)}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha}=\frac{2n}{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}ln\left(1-e^{-2e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}}\right)-2\bar{c}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(1-\left\{1-\left[e^{-e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}}\right]^{2}\right\}^{\alpha}\right)ln\left\{1-\left[e^{-e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}}\right]^{2}\right\}}{\left[1-\bar{c}\left(1-\left\{1-\left[e^{-e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}}\right]^{2}\right\}^{\alpha}\right)\right]}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial c}=\frac{2n}{c}-2\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\left\{1-\left[e^{-e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}}\right]^{2}\right\}^{\alpha}}{1-\bar{c}\left(1-\left\{1-\left[e^{-e^{\left(\delta x_i-\frac{\gamma}{x_i}\right)}}\right]^{2}\right\}^{\alpha}\right)}$$

نلاحظ ان المشتقات الجزئية للمعالم التوزيع $(\alpha, c, \delta, \gamma)$ بعد مساويتها بالصفر يصعب حلها يدويا لذلك نلجأ الى استخدام الطرق العددية حيث استخدمنا برنامج R لصعوبة حلها بطريقة التقليدية.

٥. المحاكاة: تم اجراء دراسة المحاكاة لتقييم اداء MLE لتقدير معلمات التوزيع MOTLFW. ومن خلال الاعتماد على برنامج R وباستخدام دالة الكمية يتم توليد عينة عشوائية .وقد اجريت المحاكاة لثلاث عينات مختلفة وباستخدام قيم معلمات حقيقية مختلفة وقيم معلمات اولية للتوزيع MOTLFW وقد تم اختيارنا عينات عشوائية مختلفة وقيم عشوائية اكبر من الصفر مثل العينة الأولى $(1, 0.5, 1, 1)$ والعينة الثانية $(2, 0.5, 2, 2)$ والعينة الثالثة $(0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$ وبأحجام عينة مختلفة $(30, 50, 100, 200)$ =n وعدد التكرارات N=0001، يتم عرض في الجدول (1) The mean (AEs) و bias و root mean square error (RMSE) وتكون الصيغة الرياضية كالتالي:

$$\text{AEs}\,(\hat{\emptyset})=\frac{\sum_{i=1}^{1000}\hat{\emptyset}}{1000}\quad ,Bias(\hat{\emptyset})=AEs(\hat{\emptyset})-\emptyset$$

$$\text{RMSE}=\sqrt{\sum_{i=1}^{1000}\frac{(\hat{\emptyset}-\emptyset)^{2}}{1000}}$$

حيث أن $\hat{\emptyset}$ تقدير الامكان الاعظم هو المناسب لتقدير معلمات التوزيع MOTLFW.

الجدول (١): يوضح Bias و AEs و RMSE لقيم معلمات المختلفة

المجموعة الاولى: $(1, 0.5, 1, 1)$				
n	$\emptyset$	**AEs**	**Bias**	**RMSE**
30	c	1.1581	0.1158	0.2809
	α	0.5201	0.0201	0.3451
	δ	1.0713	0.0713	0.8045
	γ	0.9701	-0.0299	0.3801
50	c	1.0656	0.0656	0.2208
	α	0.5171	0.0171	0.1225
	δ	1.0708	0.0708	0.4999
	γ	0.9761	-0.0239	0.3194
100	c	1.0350	0.0350	0.1584
	α	0.5129	0.0129	0.0881
	δ	1.0569	0.0569	0.3470
	γ	0.9772	-0.0228	0.2462
200	c	1.0117	0.0117	0.1159
	α	0.5056	0.0056	0.0621
	δ	1.0276	0.0276	0.2433
	γ	1.0019	0.0019	0.1873
المجموعة الثانية: $(2, 0.5, 2, 2)$				
n	$\emptyset$	**AEs**	**Bias**	**RMSE**
30	c	2.2335	2.5330	0.6254
	α	0.5123	0.3210	0.6590
	δ	2.0641	0.1460	1.0008
	γ	2.0177	0.7710	0.4596
50	c	2.1528	0.1528	0.5083
	α	0.5132	0.0132	0.0820
	δ	2.1277	0.1277	0.8841
	γ	1.9708	-0.0292	0.6318
100	c	2.0953	0.0953	0.4133
	α	0.5117	0.0117	0.0632
	δ	2.1152	0.1152	0.6686
	γ	1.9585	-0.0415	0.5217
200	c	2.0336	0.0336	0.2773
	α	0.5056	0.0056	0.0502
	δ	2.0903	0.0903	0.5820
	γ	1.9969	-0.0031	0.4186

المجموعة الثالثة: $(0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$				
n	∅	**AEs**	**Bias**	**RMSE**
30	c	0.7135	0.0317	0.0950
	α	0.4191	0.4191	0.0022
	δ	0.8135	0.3183	0.2348
	γ	0.4933	-0.0670	0.1718
50	c	0.5146	0.0146	0.0690
	α	0.5314	0.0314	0.1559
	δ	0.5298	0.0298	0.1822
	γ	0.5007	0.0007	0.1418
100	c	0.5069	0.0069	0.0484
	α	0.5195	0.0195	0.1024
	δ	0.5167	0.0167	0.1211
	γ	0.4988	-0.0012	0.1051
200	c	0.5006	0.0006	0.0332
	α	0.5078	0.0078	0.0689
	δ	0. 5068	0.0068	0.0 831
	γ	0.5008	0.0008	0.0782

نلاحظ ان عند زيادة حجم العينة n تكون AEs قريبة من القيم الحقيقية ، بينما تنخفض RMSE نحو الصفر مع زيادة حجم العينة n استنادا الى دراسة المحاكاة يمكن ان نستنتج ان طريقة الامكان الاعظم ملائمة لتقدير معلمات.

٦. **الجانب التطبيقي:** تم استخدام مجموعة من البيانات تمثل الضغط والاجتهاد لبيان مرونة التوزيع الجديد MOTLFW من خلال مقارنة مع بعض التوزيعات الاحصائية المدروسة سابقا (Khaleel et al., 2018). لقد استخدمنا بعض معايير الاحصائية لغرض مقارنة بين التوزيعات التي تكون قريبة من التوزيع MOTLFW ومن هذه المعايير:

- معيار اكاياكي (AIC) Akaike information criterion.
- معيار اكاياكي المصحح (CAIC) corrected Akaike information criterion.
- معيار بييز (BIC) Bayesian information criterion.
- معيار هنان-كوين (HQIC) Hannan-Quinn information criterion

كما في المعادلات التالية:

$$AIC= -2\,l + 2K, \quad BIC= -2\,l + K\log(n)$$

$$CAIC = AIC + \frac{2K(K+1)}{n-K-1}\ , HQIC = 2\log\big(\log(n)\,(K-2L)\big)$$

حيث تكون أصغر قيمة لهذه المعايير الاحصائية تقابلها أفضل توزيع يطابق البيانات. حيث أن قيمة (K) تمثل عدد معالم التوزيع وقيمة (n) تمثل حجم العينة وقيمة(l) تمثل قيمة الامكان الاعظم للتوزيع. ولقد استخدمنا طريقة الامكان الاعظم لتقدير المعالم غير المعروفة للتوزيعات، قمنا باستخدام برنامج لغة (R) لإيجاد أفضل توزيع يطابق البيانات، باستخدام المعايير احصائية أعلاه لغرض المقارنة بين التوزيعات.

(0.55, 0.74, 0.77, 0.81, 0.84, 1.24, 0.93, 1.04, 1.11, 1.13, 1.30, 1.25, 1.27, 1.28,1.29, 1.48, 1.36, 1.39, 1.42, 1.48, 1.51, 1.49, 1.49, 1.50, 1.50,1.55, 1.52, 1.53, 1.54, 1.55, 1.61, 1.58, 1.59, 1.60, 1.61, 1.63,1.61, 1.61, 1.62, 1.62, 1.67, 1.64, 1.66, 1.66, 1.66, 1.70, 1.68,1.68, 1.69, 1.70, 1.78, 1.73, 1.76, 1.76, 1.77, 1.89, 1.81, 1.82,1.84, 1.84, 2.00, 2.01, 2.24)

ان الجدول (2) يمثل الوصف الاحصائي لبيانات الضغط والاجتهاد للتعرف على واقع البيانات وصفاتها والية توزيعها من حيث الاعتماد على قيمة الالتواء Skew وقيمة التفلطح Kurtosis. بما ان قيمة الالتواء سالبة وهذا يدل على ان البيانات ذات الالتواء من جهة اليسار.

اما بالنسبة للتفلطح فتكون قيمته موجبة ويدل على ان البيانات ذات التفلطح رفيع Leptokurtic التي تكون قريبة من التوزيع الطبيعي.

الجدول (2): الوصف الحسابي للبيانات

Var	n	mean	sd	median	Min	Max	Skew	Kurtosis
	63	1.51	0.32	1.59	0.55	2.24	-0.88	0.8

قمنا بمقارنة التوزيع المقترح MOTLFW مع التوزيعات الاحتمالية الخمسة ومنها:

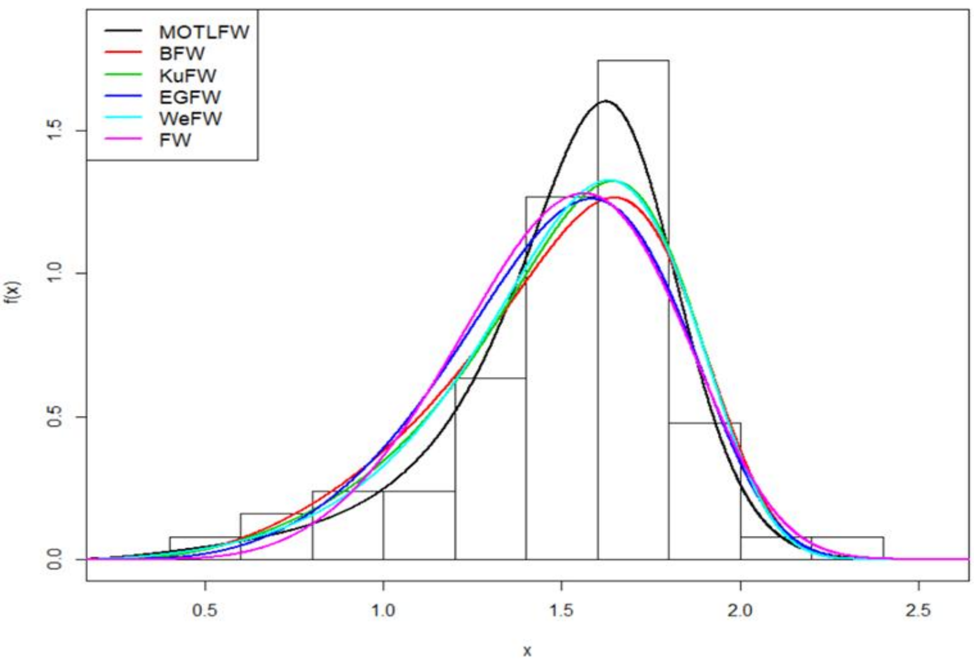
- Beta Flexible Weibull(BFW).
- Kumaraswamy Flexible Weibull (KuFW).
- Exponentiated Generalized Flexible Weibull (EGFW).
- Flexible Weibull (FW).
- Weibull Flexible Weibull (FW).

وقمنا بتحليل البيانات باستخدام البرنامج R وايضا باستخدام طريقة الامكان الاعظم بحساب المعايير الإحصائية، في الجدول (3) تم الحصول على النتائج من خلال قيم المعايير الإحصائية $(HQIC, BIC, CAIC, AIC, -LL)$ كما في الجدول (3) يبين ان التوزيع المقترح MOTLFW قد أظهر أكثر مطابقة لبيانات الضغط والاجتهاد كونه حقق أقل قيمة لهذه المعايير عند مقارنة بالتوزيعات الخمسة. نلاحظ من الشكل (3) والشكل (2) يبين أن التوزيع المقترح هو أكثر دقة وملائمة لهذه البيانات ومما يعني ان نختار التوزيع المقترح هو الافضل لهذه البيانات.

الجدول (3): قيم تقديرات المعالم للتوزيعات مع قيم المعايير
-LL, AIC, CAIC, BIC, HQIC لبيانات الضغط والاجتهاد

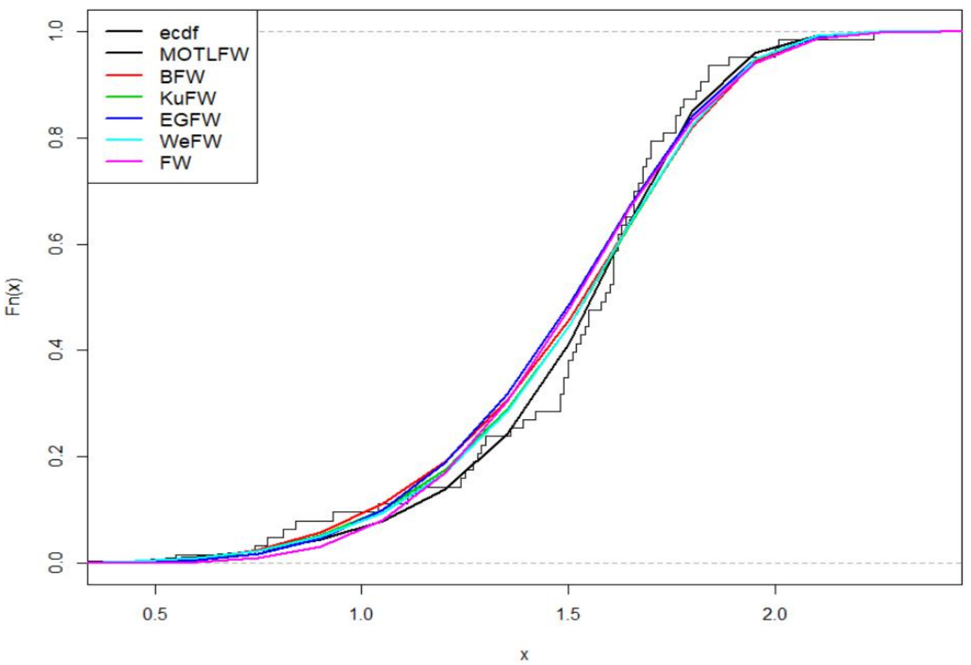
Model	**Est para**	**-LL**	**AIC**	**CAIC**	**BIC**	**HQIC**
MOTLFW	0.5781962 23.116799 1.1860682 2.4476800	11.82	31.642	32.332	40.215	35.014
BFW	0.6205928 0.2165488 2.4428288 4.3700279	14.49	36.986	37.675	45.558	40.35
Ku FW	0.5651500 0.2316723 2.4594252 4.4945035	14.15	36.301	36.991	44.874	39.673
EGFW	0.1977571 0.8617517 2.3131074 3.6262241	15.086	38.173	38.863	46.746	41.545
WFW	2.2064239 7.0244318 1.4084843 0.6052446	14.36	36.722	37.412	45.295	40.094
FW	1.709136 4.489488	16.299	36.599	36.799	40.886	38.285

لقد أجرينا رسم دالة الكثافة الاحتمالية لنماذج التوزيعات وكانت النتائج كما في الشكل (3). نستنتج ان نموذج MOTLFW هو الاكثر انسجاما ومرونة مع المدرج التكراري للبيانات، علما ان التوزيع FW هو الأكثر بعداً.



الشكل (2): منحني دالة الكثافة للتوزيع المقترح لبيانات الضغط والاجتهاد

أجرينا رسم الدالة التوزيعية التراكمية للنماذج الاحتمالية كما مبين في الشكل (2) ثم نستنتج ان التوزيع MOTLFW هو الاكثر ملائمة مع البيانات.



الشكل (3): منحني دالة التراكمي للتوزيع المقترح وتوزيعات المقارنة لبيانات الضغط والاجتهاد

٧. الاستنتاجات: قدمنا في هذا البحث توزيعا جديداً MOTLFW ذو أربع معالم ودرسنا بعض خصائصه. لقد طبقنا التوزيع $MOTLFW$ على بيانات عن الضغط و الاجهاد وتمت مقارنته مع التوزيعات مثل (BFW) و (FW) و(WFW)و$(EGFW)$و$(KuFW)$ ولقد استنتجنا ان

التوزيع MOTLFW هو الافضل ملائمة للبيانات كما مبين في الجدول (3) وذلك من خلال استخدام بعض المعايير الإحصائية مثل:

- معيار اكاياكي (AIC) Akaike information criterion.
- معيار اكاياكي المصحح (CAIC) corrected Akaike information criterion.
- معيار بييز (BIC) Bayesian information criterion.
- معيار هنان-كوين (HQIC) Hannan-Quinn information criterion

إن الجدول (2) يمثل الوصف الاحصائي لبيانات الضغط والاجتهاد للتعرف على واقع البيانات وصفاتها والية توزيعها من حيث الاعتماد على قيمة الالتواء *Skew* وقيمة التفلطح *Kurtosis*. قد اجرينا المحاكاة لثلاث عينات مختلفة وباستخدام برنامج *R* لقيم معلمات حقيقية مختلفة وقيم معلمات اولية للتوزيع MOTLFW وقد تم اختيارنا عينات عشوائية مختلفة وقيم عشوائية أكبر من الصفر من اجل تحديد وتقييم اداء MLE كما تبين في الجدول (1).

المصادر

أولاً. المصادر العربية:

١. عبدالحميد، مظهر خالد، خليل، منذر عبدالله، عبدالله، زياد محمد، (٢٠١٨)، دعم القرار الاستثماري في القطاع الصحي باستخدام الاساليب المعلمية، مجلة تكريت للعلوم الإدارية والاقتصادية، المحور الاحصائي، المجلد (٣)، ج٢، العدد (خاص).

1. Abdal-hameed, M. K., Khaleel, M. A., Abdullah, Z. M., Oguntunde, P. E., & Adejumo, A. O. (2018). Parameter estimation and reliability, hazard functions of Gompertz Burr Type XII distribution. Tikrit Journal of Administration and Economics Sciences, 14(41 part 2), 381-400.
2. Abdullah, Z. M., Khaleel, M. A., Abdal-hameed, M. K., & Oguntunde, P. E. (2019). Estimating Parameters for Extension of Burr Type X Distribution by Using Conjugate Gradient in Unconstrained Optimization. kirkuk university journal for scientific studies, 14(3), 33-49.
3. AbuJarad, M. H., Khan, A. A., Khaleel, M. A., AbuJarad, E. S., AbuJarad, A. H., & Oguntunde, P. E. (2019). Bayesian Reliability Analysis of Marshall and Olkin Model. Annals of Data Science, 1-29.
4. Ahmad, Z., & Iqbal, B. (2017). Generalized flexible weibull extension distribution. Circulation in Computer, 2(4), 68-75.
5. Ahmed, M. T., Khaleel, M. A., & Khalaf, E. K. (2020). The new distribution (Topp Leone Marshall Olkin-Weibull) properties with an application. Periodicals of Engineering and Natural Sciences, 8(2), 684-692.
6. Ahmedd, M. T. (2019). Exponential Distribution (Topp Leone Marshall-Olkin) Properties with Application. Tikrit Journal of Administration and Economics Sciences, 15(47 Part 2), 242-255.
7. Alizadeh, M., Cordeiro, G. M., Pinho, L. G. B., & Ghosh, I. (2017). The Gompertz-G family of distributions. Journal of Statistical Theory and Practice, 11(1), 179-207.

8. Bebbington, M., Lai, C. D., & Zitikis, R. (2007). Reply to S. Nadarajah concerning “A flexible Weibull extension”, Reliability Engineering and System Safety (2007; 92: 719–26). Reliability Engineering and System Safety, 10(92), 1485.
9. Eugene, N., Lee, C., & Famoye, F. (2002). Beta-normal distribution and its applications. Communications in Statistics-Theory and methods, 31(4), 497-512.
10. Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M. (2014). Table of integrals, series, and products. Academic press.
11. Ibrahim, N. A., Khaleel, M. A., Merovci, F., Kilicman, A., & Shitan, M. (2017). WEIBULL BURR X DISTRIBUTION PROPERTIES AND APPLICATION. Pakistan Journal of Statistics, 33(5).
12. Khaleel, M. A., Abdal-hammed, M. K., Loh, Y. F., & Ozel, G. (2019). A new uniform distribution with bathtub-shaped failure rate with simulation and application. Mathematical Sciences, 1-10.
13. Khaleel, M. A., Al-Noor, N. H., & Abdal-Hameed, M. K.(2020). Marshall Olkin exponential Gompertz distribution: Properties and applications.. Periodicals of Engineering and Natural Sciences, 8(١), 298-312.
14. Khaleel, M. A., Ibrahim, N. A., Shitan, M., & Merovci, F. (2016, June). Some properties of Gamma Burr type X distribution with application. In AIP Conference proceedings (Vol. 1739, No. 1, p. 020087). AIP Publishing.
15. Khaleel, M. A., Ibrahim, N. A., Shitan, M., & Merovci, F. (2018). New extension of Burr type X distribution properties with application. Journal of King Saud University-Science, 30(4), 450-457.
16. Khaleel, M. A., Ibrahim, N. A., Shitan, M., Merovci, F., & Rehman, E. (2017). Beta burr type x with application to rainfall data. Malaysian Journal of Mathematical Sciences, 11, 73-86.
17. Khaleel, M. A., Oguntunde, P. E., Ahmed, M. T., Ibrahim, N. A., & Loh, Y. F. (2020). The Gompertz Flexible Weibull Distribution and its Applications. Malaysian Journal of Mathematical Sciences, 14(1), 169-190.
18. Khaleel, M. A., Oguntunde, P. E., Al Abbasi, J. N., Ibrahim, N. A., & AbuJarad, M. H. (2020). The Marshall-Olkin Topp Leone-G Family of Distributions: A family for generalizing probability models. Scientific African, e00470.
19. Marshall, A. N., Olkin, I.(1997) A new method for adding a parameter to a family of distributions with applications to the exponential and Weibull families, Biometrica 84, 641-652.
20. Maxwell, O., Chukwu, A. U., Oyamakin, O. S., & Khaleel, M. A. (2019). The Marshall-olkin Inverse Lomax Distribution (MO-ILD) with Application on Cancer Stem Cell. Journal of Advances in Mathematics and Computer Science, 1-12.
21. Merovci, F., Khaleel, M. A., Ibrahim, N. A., & Shitan, M. (2016). The beta Burr type X distribution properties with application. SpringerPlus, 5(1), 697.
22. Oguntunde, P. E., Adejumo, A. O., Khaleel, M. A., Okagbue, H. I., & Odetunmibi, O. A. (2018, October). The logistic inverse exponential distribution: Basic structural properties and application. World Congress on Engineering.

23. Oguntunde, P. E., Adejumo, A. O., Khaleel, M. A., Owoloko, E. A., Okagbue, H. I., & Opanuga, A. A. (2017, July). A Useful Extension of the Inverse Exponential Distribution. In The World Congress on Engineering (pp. 109-119). Springer, Singapore.
24. Oguntunde, P. E., Khaleel, M. A., Adejumo, A. O., & Okagbue, H. I. (2018). A study of an extension of the exponential distribution using logistic-x family of distributions. International Journal of Engineering & Technology, 7(4), 5467-5471.
25. Oguntunde, P. E., Khaleel, M. A., Adejumo, A. O., Okagbue, H. I., Opanuga, A. A., & Owolabi, F. O. (2018). The Gompertz Inverse Exponential (GoIE) distribution with applications. Cogent Mathematics & Statistics, 5(1), 1507122.
26. Oguntunde, P. E., Khaleel, M. A., Okagbue, H. I., & Odetunmibi, O. A. (2019). The Topp–Leone Lomax (TLLo) Distribution with Applications to Airbone Communication Transceiver Dataset. Wireless Personal Communications, 1-12.
27. Zografos, K., & Balakrishnan, N. (2009). On families of beta-and generalized gamma-generated distributions and associated inference. Statistical Methodology, 6(4), 344-362.