التوزيع الاحتمالي مارشال أولكين الأسي المعمم-ويبل خصائص وتطبيق

الباحث: فلاح حسن عبد
كلية التربية للعلوم الصرفة
جامعة تكريت
falah33@st.tu.edu.iq

أ.د. محمد طه أحمد
كلية التربية للعلوم الصرفة
جامعة تكريت
mohta.taha@gmail.com

أ.م.د. منذر عبدالله خليل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة تكريت
mun880088@tu.edu.iq

المستخلص:

في هذه الورقة نقترح توزيعًا مستمرًا جديدًا باسم التوزيع الاحتمالي (مارشال اولكين الاسي المعمم-ويبل) المشتق من تركيب عائلة مارشال اولكين والتوزيع الاسي المعمم مع ادخال توزيع ويبل في الصيغة الناتجة من الجمع بين الطريقتين. دراسة الخصائص الرياضية والإحصائية لهذا التوزيع مثل؛ دالة البقاء، الدالة الكمية، دالة الخطر، الاحصاءات المرتبة، العزوم العادية وغير المكتملة، دالة توليد العزم، الانتروبي والأشكال ودراسة توسيع دالة الكثافة لتسهيل عملية ايجاد الخصائص المذكورة. استخدم طريقة الامكان الاعظم في تقدير معالم التوزيع. يتم استخدام مجموعة من البيانات الحقيقية لإثبات مدى ملائمة وتطبيق التوزيع الجديد. لغرض المقارنة نستخدم نماذج مختلفة لاختبار جودة وملائمة التوزيع.

الكلمات المفتاحية: توزيع الاسي المعمم، عائلة مارشال أولكين، دالة الخطر، طريقة الامكان الاعظم.

The Probability Distribution Marshall-Olkin-Generalized Exponential Weibull Properties with Application

Researcher: Falah H. Abd
College of Education for pure Sciences
Tikrit University

Prof. Dr. Mohammed T. Ahmedd
College of Education for pure Sciences
Tikrit University

Assist. Prof. Dr. Mundher A. khaleel
College of Computer Science and Mathematics
Tikrit University

Abstract:

In this paper we propose a new continuous distribution called Probability Distribution (Marshall Olkin Exponential Generalized-Whipple) derived from the structure of the Marshall Olken Family and generalized exponential distribution with the inclusion of Whipple distribution in the resulting formula from the combination of the two methods. Study the mathematical and statistical properties of this distribution such as; Survival function, quantile function, **,** hazard function, order statistics, normal and incomplete moments, moment generation function, probability weighted moments, entropy and shapes and study the expansion of the function to facilitate the process of finding the listed properties. Use the greatest possible method in estimating the distribution parameters. A set of real data is used to demonstrate the suitability and application of the new distribution. For the purpose of comparison, we use different models to test the quality and suitability of distribution.

Keyword: Exponentiated exponential distribution, Marshall Olkin family, Hazard function, maximum likelihood method.

١. المقدمة

في السنوات الأخيرة، كان هناك اهتمام واسع النطاق من قبل الباحثين بإيجاد طرق لتوليد توزيعات احتمالية جديدة ذات مرونة عالية باستخدام التوزيعات القياسية المعروفة كأساس في توليد التوزيعات الجديدة لتحليل ونمذجة بعض البيانات الحقيقية في مختلف المجالات التطبيقية مثل الهندسة والاقتصاد والطب وغيرها من المجالات. عادة تتم هذه العملية عن طريق إضافة معلمة واحدة أو أكثر إلى التوزيع الأساسي. هذه الإضافة تعطي مرونة أكبر لنموذجة وتحليل أنواع مختلفة من البيانات.

تعتبر عائلة مارشال أولكين التي قدمها الباحثان (Marshall and Olkin, 1997) من اهم الطرق التي من خلالها الحصول على توزيعات جديدة. عائلة مارشال أولكين تحتوي على معلمة شكل اضافية. كما اقترح الباحث (Gupta, 1998) عائلة التوزيع الاسي المعمم والتي لها معلمة شكل ومعلمة قياس. لا تقتصر توليد التوزيعات الجديد على الطرق هذ فقط بل يوجد العديد من الاساليب المقترحة في هذ الاتجاه. منذ اقتراح هذه الطرق الى يومنا هذا يعمل الباحثين على تقديم تعميمات وتوسيعات لهذه الطرق بالشكل الذي يجعل التوزيع المقترح ذو مرونة عالية أكثر من التوزيعات التي سبق دراستها في معالجة الظواهر التي تحدث في عصرنا الحالي. سيتم الاكتفاء بذكر بعض التعميمات التي اجريت لهذه الطرق، فمثلا قام الباحث (Haitham et al., 2018) باقتراح توزيع هو تعميم لعائلة مارشال اولكين يسمى:

The Marshall-Olkin exponentiated generalized G family of distributions.

وقام الباحث (Khaleel et al., 2020) بدراسة عائلة مارشال مع عائلة توب ليون واستخدام توزيع ويبل كنموذج خاص. ودرس الباحث (Ahmedd et al., 2019) باستخدام التوزيع الاسي في عائلة مارشال والكين وتوب ليون للحصول على مرونة جيدة في نمذجة البيانات. وقامت الباحثة بالاشتراك مع باحثين آخرين (Anna Malinova et al., 2019) بدراسة التوزيع الاسي كنموذج في عائلة التوزيع الأسى المعمم وأطلق على التوزيع الجديد exponential exponential exponentaited. من خلال النظر بالطرق والتعميمات المستخدمة في توليد التوزيعات.

نقترح في هذا البحث توزيع جديد مستمر ذو خمس معالم ناتج من تركيب عائلة التوزيع الاسي المعمم مع عائلة مارشال أولكين مع اخذ توزيع ويبل ذي المعلمتين كنموذج خاص يعتبر واحدًا من أهم التوزيعات المستخدمة في الموثوقية وتوزيع فترات البقاء على قيد الحياة، وسيتم دراسة الخصائص الإحصائية لهذا التوزيع مثل دالة الكمية والعزوم العادية وغير المكتملة، الإنتروبيا، الاحصاءات المرتبة، الدالة المولدة للعزوم، العزوم المرجحة، مع دراسة بعض الاشكال للتوزيع المقترح. استخدام طريقة الامكان الاعظم لتقدير معلمات التوزيع المقترح. وسيتم تنظيم هذا البحث الى ستة اجزاء. في الجزء الأول مقدمة عن التوزيع الجديد ونظرة عامة على البحوث في هذا الاتجاه. في الجزء الثاني مناقشة طريقة إنشاء التوزيع مع ذكر بعض الدوال المرتبطة بالتوزيع

مع الرسومات التوضيحية. وفي الجزء الثالث سيتم عرض واشتقاق أهم الخصائص الإحصائية للتوزيع الجديد. في الجزء الرابع دراسة طريقة الامكان الاعظم لتقدير المعالم. اما في الجزء الخامس مناقشة وعرض اهم النتائج والمعايير الإحصائية وفي الجزء الاخير نختم البحث بالاستنتاجات والتوصيات. سنرمز إلى التوزيع الجديد بالرمز (MOEEWe) لسهولة الكتابة.

٢. التوزيع الجديد New Distribution (MOEEWe):

في هذا الجزء من البحث، سيتم شرح آلية الحصول على التوزيع الجديد (MOEEWe) ذو الخمس معلمات، وسيتم مناقشة دالة معدل الخطر ودالة البقاء ودالة الوظيفة التراكمية وبعض الدوال المتعلقة بالتوزيع.

التوزيع الأسي المعمم له دالة توزيعية تراكمية CDF ودالة كثافة PDF (Gupta, 2001) على التوالي تعطى بالشكل الاتي:

$$W(x;\lambda,\vartheta) = \left(1-e^{-\lambda x}\right)^{\vartheta} \qquad x>0 \;;\; \lambda,\vartheta>0 \qquad \dots \quad (1)$$

$$w(x;\lambda,\vartheta) = \vartheta\lambda e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{\vartheta-1} \qquad x>0 \;;\; \lambda,\vartheta>0 \qquad \dots \quad (2)$$

حيث ان ϑ, λ معالم الشكل والقياس التوزيع الاسي المعمم.

وأيضا تعطى دالة CDF وPDF لعائلة Marshall Olkin-G بالشكل التالي:

$$G(x,c) = \frac{W(x)}{1-\bar{C}\bar{W}(x)} \qquad \infty < x < \infty \quad c>0 \qquad \dots \quad (3)$$

$$g(x,c) = \frac{cw(x)}{[1-\bar{c}\bar{W}(x)]^2} \qquad \dots \quad (4)$$

حيث $\bar{W}(x) = 1 - W(x)$ و $\bar{c} = 1 - c$.

في التوزيع الاسي المعمم المذكور في المعادلات(1) يمكن تعويض $F(x)$ بدل x.

وبتعويض المعادلة (1) و (2) في المعادلات (3) و(4) نحصل على الصيغة التالية:

$$G(x;\lambda,\vartheta,c) = \frac{(1-e^{-\lambda F(x)})^{\vartheta}}{1-\bar{C}(1-(1-e^{-\lambda F(x)})^{\vartheta})}, \qquad \dots (5)$$

$$g(x;\lambda,\vartheta,c) = \frac{\lambda\vartheta c\, f(x)\, e^{-\lambda F(x)}(1-e^{-\lambda F(x)})^{\vartheta-1}}{\left[1-\bar{c}\,(1-(1-e^{-\lambda F(x)})^{\vartheta}\right]^2} \qquad \dots(6)$$

حيث ان $F(x)$ و $f(x)$ تمثل CDF وPDF لتوزيع ويبل والتي تعطى بالشكل التالي:

$$F(x;\omega,v) = \left(1-e^{-(\omega x)^{v}}\right) \qquad x>0, \omega, v>0 \qquad \dots \quad (7)$$

$$f(x;\omega,v) = \omega^{v}\, v\, x^{v-1} e^{-(\omega x)^{v}} \qquad \dots \quad (8)$$

نحصل على التوزيع المقترح MOEEWe بدالة CDF وPDF من تعويض المعادلات(7) و (8) في (5) و (6) وكما موضح ادناه:

$$G(x;\lambda,\vartheta,c,\omega,v) = \frac{\left[1-e^{-\lambda(1-e^{-(\omega x)^{v}})}\right]^{\vartheta}}{\left[1-\bar{c}\left[1-\left(1-e^{-\lambda(1-e^{-(\omega x)^{v}})}\right)^{\vartheta}\right]\right]} \qquad x>0 \;\; \lambda,\vartheta,c,\omega,v>0 \dots (9)$$

$$g(x;\lambda,\vartheta,c)=\frac{\lambda\vartheta c v\omega^{v}x^{v-1}e^{-(\omega x)^{v}}\,e^{-\lambda(1-e^{-(\omega x)^{v}})}\left[1-e^{-\lambda(1-e^{-(\omega x)^{v}}}\right]^{\vartheta-1}}{\left[1-\bar{c}\left[1-\left(1-e^{-\lambda(1-e^{-(\omega x)^{v}}}\right)^{\vartheta}\right]\right]^{2}} \qquad \ldots(10)$$

ولسهولة الكتابة نكتب في المعادلات $g(x)$ بدلاً من $g(x;\lambda,\vartheta,c,\omega,v)$. ولهذا التوزيع دالة بقاء (Survival function: sf) ودالة الخطر (hazard rate function: hrf) على التوالي تعطى بالشكل الاتي (Chakraborty and Handique., 2017):

$$R(x)=1-G(x)=\frac{1-(1-e^{-\lambda(1-e^{-(\omega x)^{v}})})^{\vartheta}}{1-\frac{\bar{c}}{c}(1-e^{-\lambda(1-e^{-(\omega x)^{v}})})^{\vartheta}} \qquad \ldots(11)$$

$$h(x)=\frac{g(x)}{R(x)}$$

$$=\frac{\vartheta e^{-\lambda}\omega^{v}\,v\,x^{v-1}e^{-(\omega x)^{v}}\left(1-e^{-\lambda(1-e^{-(\omega x)^{v}})}\right)^{\vartheta-1}\left[1-\bar{c}(1-e^{-\lambda(1-e^{-(\omega x)^{v}})})^{\vartheta}\right]}{\left[1-\bar{c}(1-(e^{-\lambda(1-e^{-(\omega x)^{v}})})^{\vartheta})\right]^{2}\left[1-\frac{\bar{c}}{c}\left(e^{-\lambda(1-e^{-(\omega x)^{v}})}\right)^{\vartheta}\right]} \qquad \ldots(12)$$

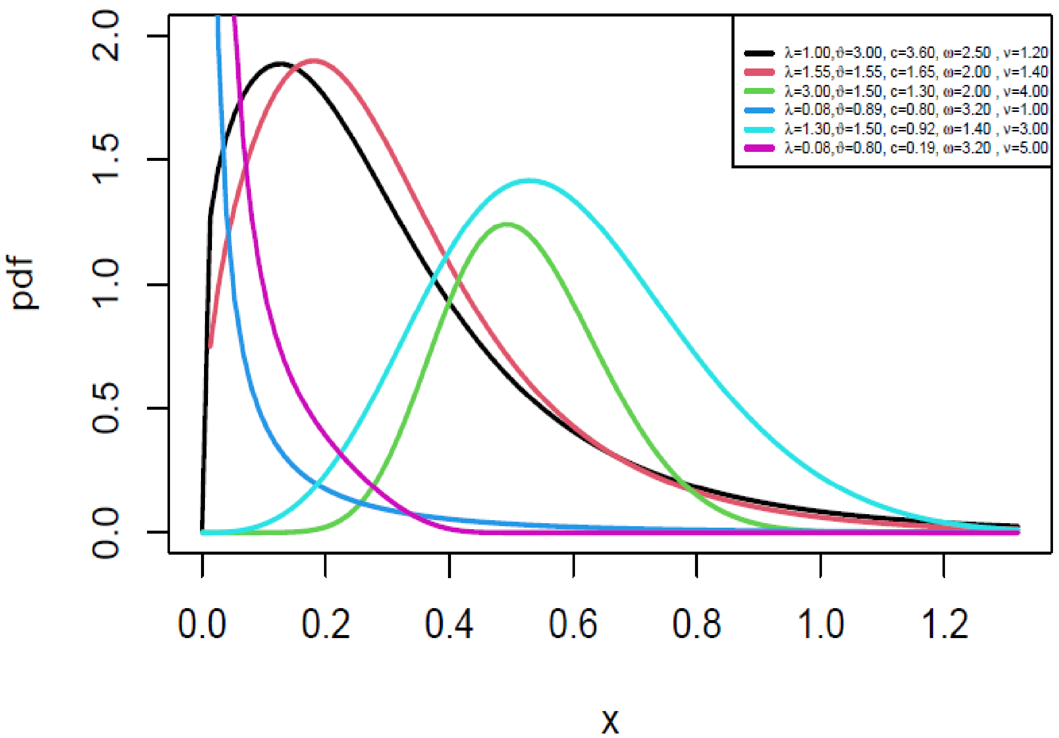


Figure 1. Density function plots

الشكل (١): منحنيات دالة pdf لقيم مختلفة لمعالم التوزيع

حيث:

$$c,\lambda,\vartheta,\omega,v>0\,,\ \bar{c}=1-c,\ x\geq 0$$

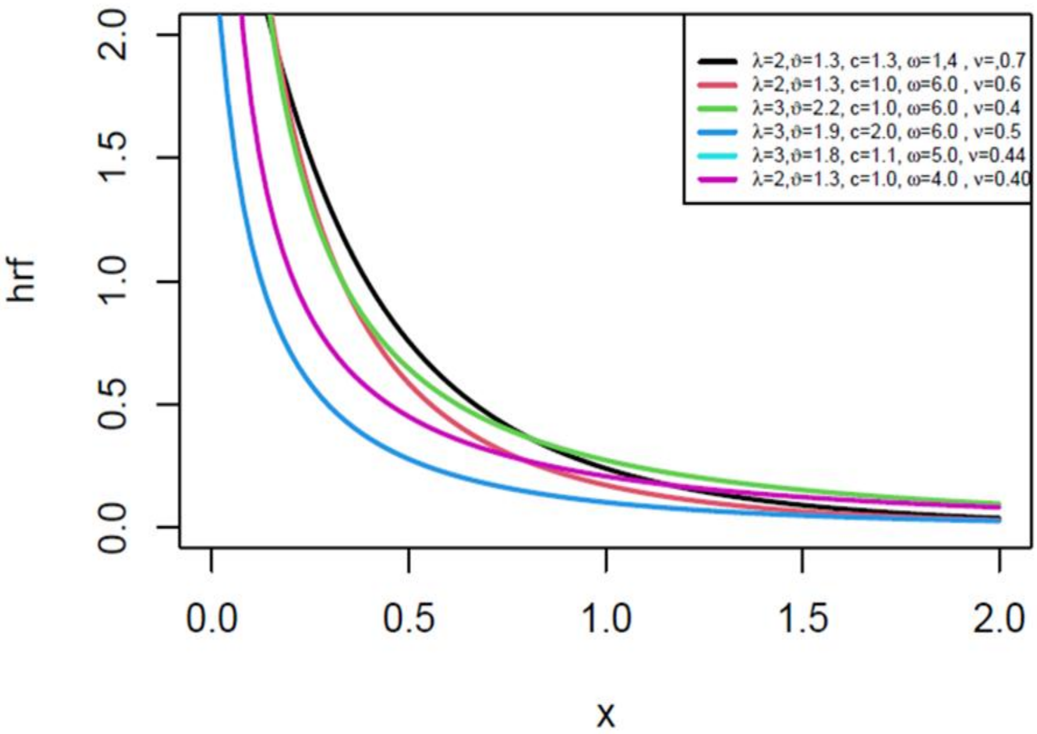


Figure 4.Hazard function plots

الشكل (٢): منحنيات دالة hrf لقيم مختلفة لمعالم التوزيع

توضح الاشكال السابقة الرسومات البيانية لكل من الدوال PDF و hf على التوالي. مع اعطاء قيم مختلفة لمعالم التوزيع المقترح MOEEWe وملاحظة تأثيرها اشكال المنحنيات حيث يتضح ان منحنيات دالة الكثافة الاحتمالية ذات التواء موجب في بعض الحالات مع ظهور أحد المنحنيات ذات شكل متماثلو منحنى اخر متناقص كما يتضح من الاشكال هناك منحنيات مفلطحة ومدببة واخرى معتدلة. ولدالة معدل الخطر ذات منحنى متناقص دائما ضمن القيم المعطاة للمعالم.

٣. خصائص التوزيع الجديد Characteristics of The New Distribution:

في هذا الجزء، مناقشة بعض الخصائص الرياضية للتوزيع المقترح المتمثلة بتوسيع التوزيع المقترح، العزوم العادية، العزوم الغير المكتملة، الدالة المولدة للعزوم، العزوم المرجحة الاحتمالية، دالة الكمية، متوسط الانحراف، الريني انتروبي والاحصاءات المرتبة.

٣-١. توسيع دالة الكثافة الاحتمالية Expansion the Probability Density Function:

من المعادلة (10) برفع المقام الى البسط واستخدام:

$$\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(x)^{i}$$

و $$(1-x)^{j}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i}\binom{i}{j}x^{i}$$

(Alizadeh et al., 2015) و (Khaleel et al., 2016).

نتوصل الى الشكل التالي:

$$g(x)=\theta\, x^{v-1}e^{-(\omega x)^{v}(1+l)} \qquad \lambda,\vartheta,c,\omega,v>0\ ,\ x>0 \qquad ...(14)$$

حيث:

$$\Theta = \sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} c\lambda\vartheta(-1)^{j+k}(i+i)\binom{i}{j}\binom{\vartheta(2+j)-1}{k}\frac{\omega^{v}\, v\lambda[1+k]^{l}e^{-\lambda[1+k]}}{l!}$$

و $c, \lambda, \vartheta, v, \omega > 0$ معالم التوزيع المقترح **MOEEWe**.

٣-٢. العزوم Moments:

العزم ذو الرتبة r حول نقطة الاصل يعطى بالصيغة التالية:

$$E(x^r) = \int_0^{\infty} x^r g(x)dx$$

من تعويض المعادلة (14) في التكامل السابق وبأجراء تبسيط تكون الصيغة العامة للعزوم بالشكل التالي:

$$E(x^r) = \frac{\Theta}{v\omega^{v+r}(l+1)^{\frac{r}{v}+1}}\int_0^{\infty} y^{\left(\frac{r}{v}+1\right)-1}\; e^{-y}\, dy$$

$$E(x^r) = \Psi\Gamma\left(\left(\frac{r}{v}+1\right)\right) \qquad \ldots(15)$$

حيث: $\Psi = \frac{\Theta}{v\omega^{v+r}(l+1)^{\frac{r}{v}+1}}$ و $r = 1,2,3\ldots n$.

٣-٣. العزوم الناقصة Incomplete Moment:

العزم الناقص ذو الرتبة s يعطى بالشكل الاتي:

$$M_S(t) = \int_{-\infty}^{t} x^s g(x)dx$$

من المعادلة (15) يمكن استبدال كل r بـ s لنحصل على التكامل الاتي:

$$M_S(t) = \frac{\Theta}{v\omega^{v+s}(l+1)^{\frac{s}{v}+1}}\int_0^{\infty} y^{\left(\frac{s}{v}+1\right)-1}\; e^{-y}\, dy$$

التكامل اعلاه يمثل تكامل كاما الناقص الذي يأخذ الشكل الاتي:

$$M_S(t) = \Psi\frac{\Gamma(\frac{s}{v}+1,t)}{\Gamma(\frac{s}{v}+1)} \qquad \ldots(16)$$

حيث: $\Psi = \frac{\Theta}{v\omega^{v+r}(l+1)^{\frac{r}{v}+1}}$ و $s = 1,2,3\ldots n$:

٣-٤. الدالة المولدة للعزوم The Moments Generating Function:

هنا ندرس الدالة المولدة للعزوم mgf للتوزيع المقترح والتي تعرف بالشكل التالي:

$$E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} e^{tx} g(x)dx$$

وباستعمال متسلسلة تايلر للدالة الاسية في التكامل أعلاه (Ibrahim et al., 2017)، نحصل على المعادلة الاتية:

$$M_x(t) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(t)^r}{ri}\int_0^{\infty}(x)^r\; g(x;\lambda,\vartheta,c)dx$$

التكامل اعلاه يمثل معادلة العزوم المذكورة في المعادلة (15) ومنها نحصل على الدالة المولدة للعزوم التي تأخذ الشكل الاتي:

$$M_x(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(t)^r}{ri} \Psi \Gamma\left(\left(\frac{r}{v} + 1\right)\right) \qquad \ldots(17)$$

حيث ان: $\Psi = \frac{\theta}{v\omega^{v+r}(l+1)^{\frac{r}{v}+1}}$ و $\lambda,\vartheta,c,\omega,v > 0$ معالم التوزيع المقترح.

٣-٥. الدالة الكمية Quantile Function:

يمكن الاشارة الى الدالة الكمية Qf على انها تمثل معكوس الدالة التراكمية للتوزيع وتعرف بالشكل الاتي:

$$u = G(x) \Rightarrow x = G^{-1}(u) = Q(u)$$

وبعكس المعادلة (9) نحصل على:

$$Q(u) = G^{-1}(u) = \frac{\left(-\ln\left[1 + \frac{\ln\left[1 - \left(\frac{u(1-\bar{c})}{1-\bar{c}u}\right)^{\frac{1}{\vartheta}}\right]}{\lambda}\right]\right)^{\frac{1}{v}}}{\omega} \qquad \ldots(18)$$

حيث $0 < y < 1$ و $\lambda,\vartheta,c,\omega,v > 0$ معالم التوزيع المقترح.

من معادلة الكمية يمكن الحصول على الوسيط والربع الاول والربع الثالث كما يمكن ان تستخدم هذه الدالة في دراسة المحاكاة من خلال توليد الارقام العشوائية.

اذا جعلنا $u = 0.5$ نحصل على الوسيط الذي يمكن تمثيله بالمعادلة الاتية:

$$\text{Me} = x_{0.5} = \frac{\left(-\ln\left[1 + \frac{\ln\left[1 - \left(\frac{c}{2-\bar{c}}\right)^{\frac{1}{\vartheta}}\right]}{\lambda}\right]\right)^{\frac{1}{v}}}{\omega}$$

حيث: $\bar{c} = 1 - c$ and $\lambda,\vartheta,c,\omega,v > 0$.

من خلال دالة الكمية نحصل على المعادلة العامة الخاصة بالالتواء والتفلطح المعرفتان بالشكل الاتي على التوالي (Maxwell et al., 2019):

$$S = \frac{Q\left(\frac{3}{4}\right) + Q\left(\frac{1}{4}\right) - 2Q\left(\frac{1}{2}\right)}{Q\left(\frac{3}{4}\right) - Q\left(\frac{1}{4}\right)} \qquad \ldots(19)$$

$$k = \frac{Q\left(\frac{3}{8}\right) - Q\left(\frac{1}{8}\right) + 2Q\left(\frac{7}{8}\right) - Q\left(\frac{5}{8}\right)}{Q\left(\frac{6}{8}\right) - Q\left(\frac{2}{8}\right)} \qquad \ldots(20)$$

تستخدم الصيغ اعلاه في حالة التوزيعات التي ليس لها عزوم، إذ انها غير حساسة للقيم المتطرفة.

٣-٦. الانحراف المتوسط Mean Deviation:

يعتبر الانحراف المعياري أحد مقاييس التشتت، يعبر عنه كمتوسط الانحرافات المطلقة عن متوسطها ويعرف بالشكل الاتي:

$$D(\mu) = E(x\text{-}\mu) = D(\mu) = \int_0^{\mu}(\mu - x)\, g(x)\, dx + \int_{\mu}^{\infty}(x - \mu)\, g(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\mu}(\mu - x)\, g(x)\, dx + \int_0^{\mu}(\mu - x)\, g(x)\, dx =$$

$$2\mu[G(\mu)] - \int_0^{\mu} x\, g(x)\, dx$$

$$= 2\mu[G(\mu)] - 2\Psi \frac{\Gamma(\frac{1}{v}+1,\mu)}{\Gamma(\frac{1}{v}+1)} \qquad \ldots(21)$$

$$\text{Where } \Psi = \frac{\theta}{v\omega^{v+r}(l+1)^{\frac{r}{v}+1}} \quad \text{and} \quad \mu = E(x)$$

٣-٧. الاحصاءات المرتبة Order Statistics:

تتضح أهمية الإحصاءات المرتبة في العديد من المجالات التطبيقية والنظرية الإحصائية.

بفرض ان $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عينة عشوائية حجمها n من التوزيع المقترح MOEEWe، وهي تقديرات لإحصاءات من المجتمع، مثل الوسيط والربيعيات وغيرها من المقاييس.

لتكن $x_{i:n}$ الإحصاءة المرتبة ذات الرتبة i فان دالة الكثافة للإحصاءة $x_{i:n}$ (Hogg., 2013) تعطى بالشكل الاتي:

$$g_{k:n}(x) = \frac{n!}{(k-1)(n-k)}[G(x)]^{k-1}[1 - G(x)]^{n-k} g(x)$$

$$g_{k:n}(x) = \sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} (-1)^m \frac{n!}{(k-1)(n-k)} [G(x)]^{m+K-1} g(x)$$

من خلال تعويض المعادلتين (9) و (10) في المعادلة السابقة واستخدام بعض السلاسل الرياضية، يمكننا التعبير عن دالة الكثافة للإحصائية المرتبة ذات الرتبة i لتوزيع MOEEW على النحو التالي:

$$g_{k:n}(x) = \frac{\phi\lambda\vartheta c\omega^{v}\, v\, x^{v-1} e^{-(\omega x)^{v}} (1-e^{-\lambda(1-e^{-(\omega x)^{v}})})^{\vartheta(m+k)-1}}{\left[1-\bar{c}\,(1-(1-e^{-\lambda(1-e^{-(\omega x)^{v}})})^{\vartheta})\right]^{m+k-1}} \qquad \ldots(22)$$

حيث ان: $\phi = \sum_{m=0}^{n-k} (-1)^m \binom{n-k}{m} \frac{n!}{(k-1)(n-k)}$ و $\lambda, \vartheta, c, \omega, v > 0$.

من المعادلة الاخيرة يمكن ايجاد بعض الخصائص الرياضية للتوزيع المقترح مثل العزوم والعزوم الناقصة والانحراف المتوسط والدالة المولدة للعزوم.

٣-٨. ريني انتروبي Renyi Entropy:

تظهر أهمية الانتروبي في العديد من المجالات، على سبيل المثال في علم البيئة والمعلومات الكمية، حيث يتم استخدامه في الإحصاء كمؤشر إحصائي للتنوع، ويستخدم أيضًا كمقياس للتشابك. يشير إلى اليقين في البيانات كلما كانت قيمة الانتروبي صغيرة. التي يشير إليها بالرمز $I_R(\rho)$ هو مقياس لعدم اليقين أو اليقين.ريني انتروبي يعرف. (Handique et al., 2019) بالشكل التالي:

$$I_R(\rho) = \frac{1}{1-\rho}\left[\log\left[\int_0^{\infty}[g(x;\lambda,\vartheta,c,\omega,v)]^{\rho}\, dx\right]\right] \qquad \rho > 0 \text{ and } \rho \neq 1$$

بتعويض المعادلة (14) في التكامل السابق ينتج ما يلي:

$$I_R(\rho) = \frac{1}{1-\rho} log\left[\int_0^{\infty} \Theta^{\rho} \sum_{l=0}^{\infty} x^{\rho(v-1)} e^{-(\omega x)^{v} \rho(l+1)} \quad dx\right]$$

تحويل التكامل إلى دالة كاما، ومن خلال إجراء بعض العمليات الحسابية على المعادلة السابقة، توصلنا إلى الصيغة العامة لدالة الانتروبيا للتوزيع المقترح (MOEEWe).

$$I_R(\rho) = (1-\rho)^{-1} log\left[\int_0^{\infty} \mathcal{H} y^{(\rho-\frac{\rho}{v}+1)-1} e^{-y} \; dy\right] =$$

$$I_R(\rho) = (1-\rho)^{-1} log\left\{\mathcal{H}\Gamma(\rho-\frac{\rho}{v}+1)\right\} \qquad \ldots(23)$$

حيث ان: $\mathcal{H} = \frac{\Theta^{\rho}}{v\left[\omega(\rho l+\rho)^{\frac{1}{v}}\right]^{(\rho v-\rho)+1}}, \rho > 0, \rho \neq 1$

٤. تقدير المعالم Estimation Parameters:

في هذا الجزء، ندرس طريقة الامكان الاعظم لتقدير معالم التوزيع الغير معروفة من عينات كاملة. تتم مناقشة هذه الطريقة الحصول على MLEs من معلمات التوزيع المقترح MOEEW. هناك العديد من الطرق لتقدير المعالم لكن، من بين هذه الأساليب تعتبر طريقة الامكان الاعظم الأكثر شيوعًا في الاستخدام، حيث تتميز طريقة MLEs بخصائص جيدة يمكن استخدامها لبناء فترات الثقة والمناطق وتحديد نوع الاختبار الإحصائي. افرض ان $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متغيرات عشوائية تتبع التوزيع المقترح MOEEWe. (Oguntunde et al., 2018) فان دالة الامكان تعطى بالشكل الاتي:

$$L = = \prod_{i=1}^{n} g(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda, \vartheta, c, \omega, v)$$

بتعويض المعادلة (10) ينتج ما يلي:

$$L = \prod_{i=0}^{n} \left\{\frac{\lambda \vartheta c\, f(x)\; e^{-\lambda F(x)}(1-e^{-\lambda F(x)})^{\vartheta-1}}{\left[1-\bar{c}\,(1-(1-e^{-\lambda F(x)})^{\vartheta}\right]^{2}}\right\}$$

$$L = \frac{\lambda^n \vartheta^n c^n [f(x)]^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} F(x)} \left[1-e^{-\lambda F(x)}\right]^{n(\vartheta-1)}}{[1-\bar{c}\,(1-(1-e^{-\lambda F(x)})^{\vartheta})]^{2n}}$$

وبأخذ اللوغارتم لطرفي المعادلة الاخيرة نتوصل الى الشكل التالي:

$$log\, L = n log\, \lambda + n$$
$$log\, \vartheta + n\, log\, c + n\, log[f(x)] - \lambda \sum_{i=1}^{n} F(x) + n(\vartheta-1) log\left[1-e^{-\lambda F(x)}\right]$$
$$- 2n log\left[1-\bar{c}(1-(1-e^{-\lambda F(x)})^{\vartheta})\right]$$

وبإدخال المعادلات (7) و (8) في المعادلة اعلاه نحصل على المعادلة التالية:

$$log\, L = n log\, \lambda + n$$
$$log\, \vartheta + n\, log\, c + n\, log\left[\omega^{v}\, v\, x^{v-1} e^{-(\omega x)^{v}}\right] - \lambda \sum_{i=1}^{n}\left(1-e^{-(\omega x)^{v}}\right) + n(\vartheta -$$
$$1) log\left[1-e^{-\lambda(1-e^{-(\omega x)^{v}})}\right]$$
$$- 2n log\left[1-\bar{c}(1-(1-e^{-\lambda(1-e^{-(\omega x)^{v}})})^{\vartheta})\right] \qquad \ldots(24)$$

بإخذ المشتقات الجزئية للمعادلة (22) بالنسبة $v, \omega, c, \vartheta, \lambda$ على التوالي ومن ثم جعل المعادلة الناتجة من الاشتقاق تساوي الصفر نحصل على المعادلات الاتية:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} + \sum_{i=1}^{n}\left(1 - e^{-(\omega x)^{v}}\right) + \frac{e^{-(\omega x)^{v}}\left(e^{(\omega x)^{v}} - 1\right)}{1 - e^{-\lambda(1 - e^{-(\omega x)^{v}})}} +$$

$$\frac{2n\overline{c\vartheta}\left(e^{-(\omega x)^{v}} - 1\right)e^{-\lambda\left(1 - e^{-(\omega x)^{v}}\right)}\left(1 - e^{-\lambda(1 - e^{-(\omega x)^{v}})}\right)^{\vartheta - 1}}{1 - \bar{c}\left(1 - \left(1 - e^{-\lambda(1 - e^{-(\omega x)^{v}})}\right)^{\vartheta}\right)}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \vartheta} = \left\{\frac{n}{\vartheta} + n\log\left(1 - e^{-\lambda\left(1 - e^{-(\omega x)^{v}}\right)}\right) - \frac{2n\left(\left(1 - e^{-\lambda\left(1 - e^{-(\omega x)^{v}}\right)}\right)^{\vartheta}\log\left\{1 - e^{-\lambda\left(1 - e^{-(\omega x)^{v}}\right)}\right\}\right.}{1 - \bar{c}\left(1 - \left(1 - e^{-\lambda(1 - e^{-(\omega x)^{v}})}\right)^{\vartheta}\right)}\right\}$$

$$+\left\{\frac{\left(1 - \left(1 - e^{-\lambda\left(1 - e^{-(\omega x)^{v}}\right)}\right)^{\vartheta}\right)}{1 - \bar{c}\left(1 - \left(1 - e^{-\lambda(1 - e^{-(\omega x)^{v}})}\right)^{\vartheta}\right)}\right\}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial c} = \left\{\frac{n}{c} - \frac{\left(1 - e^{-\lambda\left(1 - e^{-(\omega x)^{v}}\right)}\right)^{\vartheta} - 1}{1 - \bar{c}\left(1 - \left(1 - e^{-\lambda(1 - e^{-(\omega x)^{v}})}\right)^{\vartheta}\right)}\right\}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \omega} = \frac{n\left(v - v(\omega x)^{v}\right)}{\omega} - \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda v(\omega x)^{v}e^{-(\omega x)^{v}}}{\omega} + \frac{n(\vartheta - 1)\lambda v(\omega x)^{v}e^{-(\omega x)^{v}}}{\omega\left(e^{\lambda - \lambda e^{-(\omega x)^{v}}} - 1\right)}$$

$$+\frac{2n\left(\vartheta\lambda v(\omega x)^{v}e^{-(\omega x)^{v}}\left(1 - e^{\lambda\left(e^{-(\omega x)^{v}} - 1\right)}\right)^{\vartheta}\left(1 - \left(1 - e^{\lambda\left(1 - e^{-(\omega x)^{v}} - 1\right)}\right)^{\vartheta}\right)\right)}{\left(\omega\left(e^{\lambda - \lambda e^{-(\omega x)^{v}}} - 1\right)\bar{c}\left(1 - \left(1 - e^{\lambda\left(e^{-(\omega x)^{v}} - 1\right)}\right)^{\vartheta}\right) - 1\right)}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial v} = \omega^{v}\ x^{v-1}e^{-(\omega x)^{v}} + \omega^{v}vx^{v-1}e^{-(\omega x)^{v}} + \omega^{v}\ x^{v-1}e^{-(\omega x)^{v}}\log(x) -$$

$$\omega^{v}vx^{v-1}e^{-(\omega x)^{v}}(\omega x)^{v}\log(\omega x) - \lambda\sum_{i=1}^{n}e^{-(\omega x)^{v}}(\omega x)^{v}\log(\omega x) +$$

$$\frac{n(\vartheta - 1)\lambda(\omega x)^{v}e^{-(\omega x)^{v}}\log(\omega x)}{e^{\lambda\left(1 - e^{-(\omega x)^{v}}\right)} - 1} - \frac{2n\left(\vartheta\lambda e^{-(\omega x)^{v}}(\omega x)^{v}\log\left(\omega x\left(1 - e^{\lambda\left(e^{-(\omega x)^{v}} - 1\right)}\right)^{\vartheta}\right)\right)}{\left(\left(e^{\lambda\left(1 - e^{-(\omega x)^{v}}\right)} - 1\right)\right)\left(\bar{c}\left(1 - \left(\left(1 - e^{\lambda\left(e^{-(\omega x)^{v}} - 1\right)}\right)^{\vartheta}\right) - 1\right)\right)}$$

من خلال حل المعادلات أعلاه باستخدام برنامج R الاحصائي وذلك لصعوبة حل المعادلات بالطرق المعتادة، نحصل على تقديرات لمعالم التوزيع المقترح.

٥. التطبيق Application:

في هذا القسم، سوف نعرض الجانب التطبيقي للتوزيع المقترح MOEEWe لبيانات حقيقية، وقد تم استخدام البيانات المتعلقة بقوة الألياف الزجاجية 1.5 سم والتي تم الحصول عليها من قبل العاملين في المختبر الفيزيائي الوطني البريطاني. تم استخدام هذا البيانات سابقًا من قبل الباحثان (Khaleel., 2018) و (Oguntunde et al., 2018). (Abdullah et al., 2019) وتعطى البيانات على النحو التالي.

تم الحصول على هذه البيانات من البحوث السرية المنشورة في مستوعبات سكوباس، حيث أن طريقة الحصول على بيانات حقيقية في بلدنا تحتاج إلى وقت بالإضافة إلى التكلفة المالية،

وبالنظر إلى الظروف التي يمر بها العراق، أردنا الاعتماد على هذه البيانات. تم ايجاد مقدرات لمعالم التوزيع المقترح MOEEW بعض التوزيعات القريبة من التوزيع المقترح بطريقة الامكان الاعظم التي سيرد ذكر النتائج في الجدول (١). استخدمت بعض المعايير الاحصائية الاكثر استخداما في تقييم النماذج مثل: AIC, CAIC, BIC, HQIC, w, A. لغرض مقارنة أداء التوزيع MOEEW مع التوزيعات المختارة الأخرى، والتي يتم حسابها من تطبيق النماذج على البيانات، ويتم ذلك كله عن طريق حزم خاصة في برنامج *R*. فكلما كانت قيمة هذه المقاييس الإحصائية قليلة تدل على مدى ملاءمة التتوزيع البيانات المستخدمة. يظهر الجدوالجدول التالي النتائج التي يعتمد عليها في اختيار التوزيع الافضل من بين التوزيعات المدروسة.

الجدول (١): الوصف الاحصائي للبيانات الحقيقية

n	mean	var	median	sd	sk	Kurtosis	max	min	mod
63	1.5	0.1	1.59	0.32	-0.89	0.92	2.24	0.55	1.7

الجدول (٢): قيم تقديرات المعالم وقيم المعايير الاحصائية للبيانات الحقيقية

models		MOEEWe	BWe	KuWe	WeWe	EGWe	GaWe
Estimation Parameters	$\hat{\theta}$	0.32	0.67	1.05	4.42	0.18	0.97
	$\hat{\lambda}$	7.32	0.19	0.16	3.86	0.92	0.61
	$\hat{c}$	9.06	0.75	0.86	1.72	0.81	5.75
	$\hat{\omega}$	0.50	6.77	5.31	1.30	5.77	
	$\hat{\nu}$	7.11					
Criteria Values	AIC	32.40	35.58	39.20	38.41	38.25	36.41
	CAIC	33.45	36.27	39.89	39.10	38.94	36.81
	BIC	43.12	44.15	47.77	46.98	46.82	42.84
	HQIC	36.61	38.95	42.57	41.78	41.62	38.94
	w	0.05	0.17	0.26	0.23	0.23	19.50
	A	0.34	0.97	1.43	1.30	1.29	124.3

في الجدول (١) تظهر بعض مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وغيرها من المقاييس ذات الاهمية التي وجدت باستخدام برنامج R. من خلال هذه النتائج نتعرف على خواص البيانات المدروسة وتبين ان هناك التواء سالب وتفلطح قيمته 0.92 ممايدل على تدبب منحنى البيانات المدروسة وذات شكل قريب للتوزيع الطبيعي، كانت قيمة الانحراف ليست كبيرة. كما حصلنا على الوسيط المنوال والوسط وتقارب قيمهما.

ومن الجدول (٢) وحسب القيم الظاهر يتضح تفوق التوزيع المقترح MOEEWe على التوزيعات الأخرى مثل:

Exponential-Gamma Distribution,Kumaraswamy- Weibull,Beta- Weibull, Exponential-G Weibul, Gamma- Weibul, Weibul- Weibul.

في مدى افضلية الملائمة لهذه البيانات، كما يعرض في الجدول تقدير لمعالم التوزيع الجديد المقترح بطريقة تقدير الامكان الاعظم المذكورة في الجء الثالث، كما يمكن اعطاء رسم توضيحي لمنحنيات

دالة الكثافة للتوزيع التي تم مقارنتها مع التوزيع المقترح ويظهر الشكل (٣) مدى تطابق التوزيعات المستخدمة في البحث مع المدرج التكراري للبيانات المدروسة وتبين ان التوزيع MOEEWe له تطابق ومدى ملائمة عالية للبيانات أكثر من التوزيعات الاخرى مما يدل على فعالية هذا التوزيع في نمذجة بيانات من هذ النوع في العديد من المجالات.

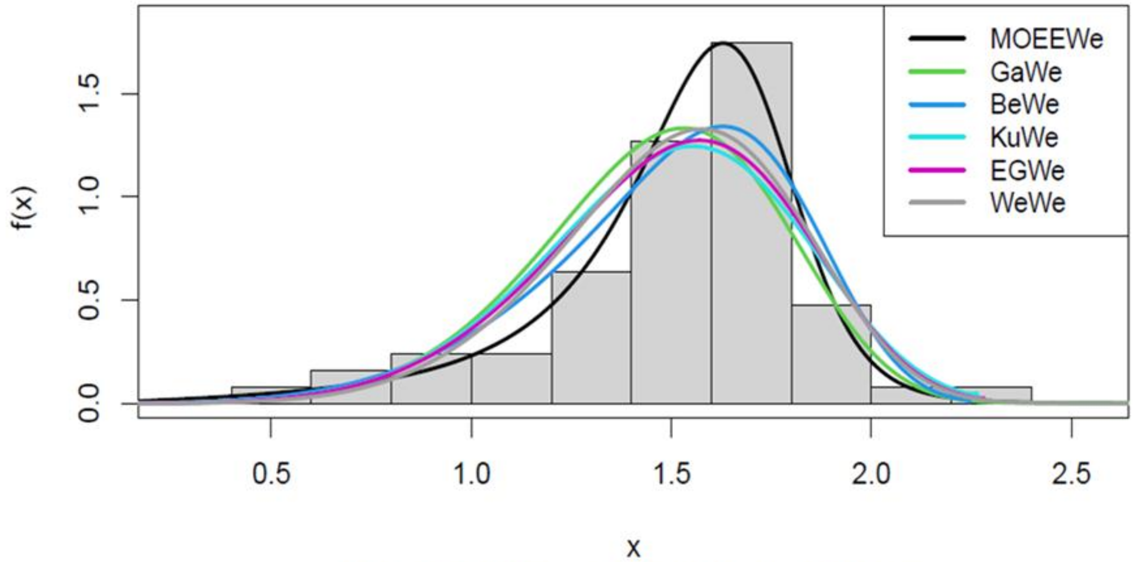
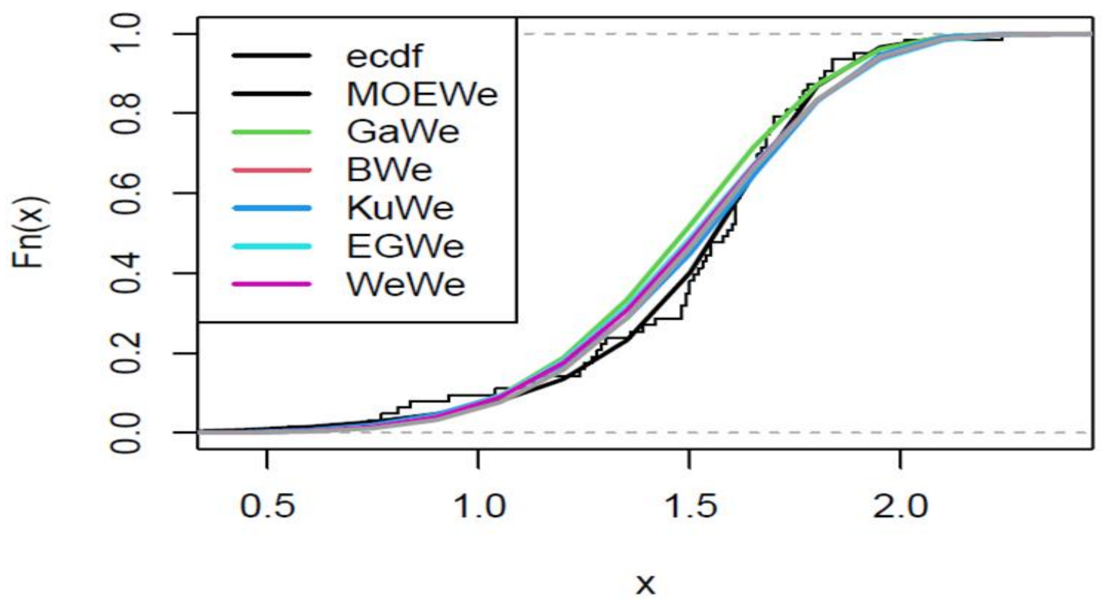


Figure 5:Histogram of fitted density functions

الشكل (٣): المدرج وال المقترح والتوزيعات الاخرى لبيانات الحقيقة



الشكل (٤): منحني الدالة التراكمية للتوزيع MOEEWe وتوزيعات المقارنة للبيانات الحقيقية

٦. الاستنتاجات والتوصيات Conclusions and recommendations:

تلعب التوزيعات الإحصائية دورًا حاسمًا في الاستدلالات والتطبيقات لتناسب ظواهر العالم الحقيقي المتقدم. في هذه الدراسة اقترح توزيع جديد يطلق عليه مارشال أولكين الاسي المعمم وتم تطبيقه على بيانات حقيقة مأخوذة من الوقع، واستخدمت عدة توزيعات اخرى في البحث لمعرفة مدى ملائمة التوزيع المقترح مع هذه التوزيعات. ومن خلال النظر في النتائج الظاهرة في الجزء

العملي تبين افضلية التوزيع المقترح الجديد على بقية التوزيعات المقارنة وقابيلة النموذج ومرونته العالية في نمذجة بيانات من هذا النوع.نوصي الباحثين في تجريب التوزيع على عدة بيانات مختلفة ونأمل ان تكون النتائج ايجابية او اجراء توسيع يحسن من دقة تطابق النموذج مع البيانات الحقيقية.

المصادر References:

1. Abdullah, Z. M., Khaleel, M. A., Abdal-hameed, M. K., & Oguntunde, P. E. (2019). Estimating Parameters for Extension of Burr Type X Distribution by Using Conjugate Gradient in Unconstrained Optimization. Kirkuk university journal for scientific studies, 14(3), 33-49.
2. Ahmed, M. T., Khaleel, M. A., & Khalaf, E. K. (2020). The new distribution (Topp Leone Marshall Olkin-Weibull) properties with an application. Periodicals of Engineering and Natural Sciences, 8(2), 684-692
3. Ahmedd, M. T. (2019). Exponential Distribution (Topp Leone Marshall-Olkin) Properties with Application. Tikrit Journal of Administration and Economics Sciences, 15(47 Part 2), 242-255
4. Alizadeh, M., Cordeiro, G. M., De Brito, E., & Demétrio, C. G. B. (2015). The beta Marshall-Olkin family of distributions. Journal of Statistical Distributions and Applications, 2(1), 4.
5. Alizadeh, M., Tahir, M. H., Cordeiro, G. M., Mansoor, M., Zubair, M., & Hamedani, G. (2015). The Kumaraswamy marshal-Olkin family of distributions. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 23(3), 546-557.
6. Chakraborty, S., & Handique, L. (2017). The generalized Marshall-Olkin-Kumaraswamy-G family of distributions. Journal of data Science, 15(3), 391-422.
7. Gupta, R. C., Gupta, P. L., & Gupta, R. D. (1998). Modeling failure time data by Lehman alternatives. Communications in Statistics-Theory and methods, 27(4), 887-904.
8. Handique, L., Chakraborty, S., & de Andrade, T. A. (2019). The Exponentiated Generalized Marshall–Olkin Family of Distribution: Its Properties and Applications. Annals of Data Science, 6(3), 391-411.
9. Hogg, R. V., Tanis, E. A., & Zimmerman, D. L. (2013). Probability and statistical inference. Upper Saddle River, NJ, USA:: Pearson/Prentice Hall.
10. Ibrahim, N. A., Khaleel, M. A., Merovci, F., Kilicman, A., & Shitan, M. (2017). Weibull Burr X Distribution Properties and Application. Pakistan Journal of Statistics, 33(5)..
11. Khaleel, M. A., Ibrahim, N. A., Shitan, M., & Merovci, F. (2016, June). Some properties of Gamma Burr type X distribution with application. In AIP Conference proceedings (Vol. 1739, No. 1, p. 020087). AIP Publishing LLC.
12. Khaleel, M. A., Ibrahim, N. A., Shitan, M., & Merovci, F. (2018). New extension of Burr type X distribution properties with application. Journal of King Saud University-Science, 30(4), 450-457.
13. Malinova, A., Rahneva, O., terzieva, T., & Angelova, E. Investigations on A" Exponential–Exponentiated–Exponential" Growth Model. Neural, Parallel, and Scientific Computations, 27, 177-184.

14. Marshall, A. W., & Olkin, I..(1997). A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the. exponential and Weibull families. Biometrika, 84(3), 641-652
15. Maxwell, O., Chukwu, A. U., Oyamakin, O. S., & Khaleel, M. A. (2019). The Marshall-Olkin inverse Lomax distribution (MO-ILD) with application on cancer stem cell. Journal of Advances in Mathematics and Computer Science, 1-12.
16. Oguntunde, P. E., Adejumo, A. O., Khaleel, M. A., Okagbue, H. I., & Odetunmibi, O. A. (2018, October). The logistic inverse exponential distribution: Basic structural properties and application. World Congress on Engineering.
17. Oguntunde, P. E., Khaleel, M. A., Adejumo, A. O., Okagbue, H. I., Opanuga, A. A., & Owolabi, F. O. (2018). The Gompertz inverse exponential (GoIE) distribution with applications. Cogent Mathematics & Statistics, 5(1), 1507122.
18. Yousof, H. M., Rasekhi, M., Alizadeh, M., & Hamedani, G. G. (2018). The Marshall-Olkin exponentiated generalized G family of distributions: properties, applications and characterizations. Journal of Nonlinear Sciences and Applications forthcoming.