استخدام مفهوم تحليل التباين في المقارنات الزوجية

عبود محمد جميل ألمشهداني

جامعة جيهان–أربيل

المستخلص

إنَّ الفكرة الأساسية فى هذا البحث هو التمييز بين أنواع مختلفة من السلع من خلال حساب ما يعرف بدرجات التفضيل التي سوف نرمز لها بالرمز (S_j) من خلال وجود (L) من السلع او المواد(objects) تعرض للتقييم والتفضيل عن طريق مقارنتها مع بعضها بعضاً باسلوب يسمى المقارنات الزوجية(paired comparisons) وقد أفترضنا وجود 6 أنواع من عصير البرتقال رمزنا لها بالرموز A, B, C, D, E ,and F إذ يتم عرض كل زوج من السلع او المواد ، على مجموعتين متساويتين (2n) من الحكام (judges)، وكل مجموعة مكونة من 15 حكم، بهدف تفضيل أحداهما على الأخرى. ويقوم الحكم عادة في مثل هذه المقارنات بالجواب علي السؤال التالي: أ يهما تفضل؛ السلعة او المادة (O_j) او (O_k) ؟ ويستخدم في جوابه على هدا السؤال سلم درجات التفضيل المؤلف من سبع 7 درجات (7- point scale). إنَّ الطريقة الملائمة لجدولة البيانات (وضعها في جدول) النانجة من تلك المقارنات الزوجية يمكن ان تكون كما في جدول رقم (1) . لقد تم أستخدام عدد من الأساليب ألأحصائية، منها :

1- تحليل التباين الثنائي 2- أسلوب المقارنات الزوجية للحصول على تقييمات رقمية 3- وأسلوب الرتب للأجابة على السؤال : أيهما تفضل ألسلعة الأُولى أو ألسلعة الثانية. وقد تمت الأجابة علي هدا السؤال ودلك بأيجاد تقدير لدرجة التفضيل النهائية (S_j).

وقد تبيين أن السلع المفضلة في المثال التوضيحي هي: أنَ عصير العنب (B) هو أكثر ألأنواع تفضيلاً ، يليه العصير (D) ثم العصير (C) ، وهكذا . وأقل ألأنواع تفضيلاً هو العصير (F) .

Analysis of Variance Technique for Paired Comparisons

Aboud Mohammed Jamil al-Mashhadani
University of Ceyhan - Erbil

Summary

Analysis of variance is a statistical technique that can be used to measure and explore the variation among deferent types of variables.We will use this technique to measure the variation among different types of brands of Grape juice for paired comparison taste – testing experiment, in which judges express their preferences for those brands presented to them in pairs and in different order on a scale of 7-points.

A convenient way of tabulating the data obtained from the taste – testing experiment is shown in table (1). Theoretical approach has been developed for two – way Analysis of variance for paired comparisons experiment.

A practical example for taste-testing paired comparison experiment for 6 brands of Grape juice is given, were presented to 15 judges in the order (j,k) and presented to another 15 judges in the order (j,k) and is analyzed by the developed analysis of variance technique. There are significance differences between the 6 brands of Grape juice. Order effect of presentation is not significant here, which is an illustration of the consistency of the judges. Rank method is used to decide which brand of Grape juice is the best brand.

المقدمة :

تحليل التباين أسلوب أحصائي شائع ومعروف من قبل كثير من الباحثين والأحصائيين خاصةً ، يستخدم لقياس وتوضيح التباين أو الأختلاف بين أنواع المتغييرات (سواء كانت متغييرات مستقلة أو معتمدة) الموجودة في جميع البحوث التي يقدمها الباحثون والدارسون في مختلف العلوم. وسنستخدم في هدا البحث أسلوب تحليل التباين لقياس الاختلافات الناتجة من المقارنات الزوجية للمتغييرات فضلا عن بعض الاساليب الاحصائية الاخرى. وأول من أستخدم أسلوب تحليل التباين الثنائي في هدا المجال هو هنري شفيه عام 1952 . ان الفكرة الأساسية هنا فى هذا البحث هى وجود (L) من السلع او المواد(objects) تعرض للتقييم والتفضيل عن طريق مقارنتها مع بعضها البعض باسلوب يسمى المقارنات الزوجية(paired comparisons).إذ يتم عرض كل زوج من السلع او المواد ، مثلا O_j ، O_k على مجموعتين متساويتين (2n) من الحكام (judges)او المقيمين بهدف تفضيل احداهما على الأخرى. هنا يبرز تأثير ترتيب (order effect) السلع او المواد المعروضة للتقييم والتفضيل، وعليه فيعرض هذا الزوج علي (n) من الحكام او المقيمين بالترتيب (j , k) ، ويعرض على (n) اخرى من الحكام او المقيمين بالترتيب (k , j) حيث ($j, k = 1,2,3,\ldots,L$) اى ان الترتيب فى تقديم السلع للتقييم والتفضيل يؤخذ بنظر الأعتبار. وكل حكم او مقييم يعطى رايه بعدة أزواج من السلع او المواد وليس رأيه بزوج واحد فقط . ويقوم الحكم او المقييم عادة في مثل هذه المقارنات بالجواب علي السؤال التالي: ايهما تفضل؛ السلعة أو المادة (O_j) او (O_k) ؟ويستخدم في جوابه على هذا السؤال سلم درجات التفضيل المؤلف من سبع (7) درجات أو نقاط التالي :

" سلم درجات التفضيل"

1- أُفضل السلعة او المادة (O_j)علي السلعة او المادة (O_k) بشكل بسيط (درجة واحدة) (1)
2- أفضل السلعة او المادة (O_j) علي السلعة او المادة (O_k) بشكل متوسط (درجتان)(2)
3- أفضل السلعة او المادة (O_j) علي السلعة او المادة (O_k) بشكل قوي (ثلاث درجات)(3)
4- لإأفضَل أيً من السلعتين (0)
5- أفضل السلعة او المادة (O_k) على السلعة أو المادة (O_j) بشكل بسيط (درجة واحدة) (-1)
6- أفضل السلعة او المادة (O_k) علي السلعة او المادة (O_j) بشكل متوسط (درجتان) (-2)
7- أفضل السلعة أو المادة (O_k) علي السلعة او المادة (O_j) بشكل قوى (ثلاث درجات)(-3)

إنّ الأرقام الموجودة بين قوسين تمثل درجات التقييم او التفضيل التى يخصصها الحكم او المقييم (judge)

عند مقارنته المادتين أو السلعتين (O_j , O_k) لتفضيل أحداهما على الأُخرى. فالدرجات الموجبة (1 , 2، 3) تعطى للسلعة أو المادة المقدمة للتقييم أولا، والدرجات السالبة (1-، 2- ،3-) تعطى للسلعة المقدمة للتقييم ثانيا". وبهذا الأُسلوب نستطيع أن نحصل على البيانات الخاصة بمثل هذه التجارب بشكل عام والتي تسمى تجارب أختبارات التذوق.

أهداف البحث

1- تحديد نوع السعة او المادة الأكثر تفضيلا من بين أنواع المواد او السلع.
2- أيجاد تقدير لدرجات التفضيل النهائية لكل مادة (او سلعة) من المواد المقدمة للتقييم أو ألتفضيل.
3- معرفة فيما إذ كان هناك فرق معنوي أو حقيقي بين درجات التفضيل.
4- معرفة ثبات ومتانة او تجانس أراء الحكام او المقييمين في هذه التجارب.

فرضيات البحث

1- عدم وجود فرق حقيقي أو جوهري بين أنواع السلع أو المواد المقدمة للتقييم أو التفضيل.

2- تجانس أو ثبات آراء الحكام أو المقيمين عند تقييمهم أو تفضيلهم ألسلع أو المواد المقدمة للتقييم .

3-عدم وجود تأثير حقيقي أو معنوي للترتيب عند تقديم السلع أو المواد للتقييم \او التفضيل، حيث تقدم في حالتين أو ترتيبين كما بينا سابقا.

الأساليب الاحصائية المستخدمة في هذا البحث

1-المقارنات الزوجية. (Paired comparison)

2- الأوساط ألحسابية المرجحة (ألموزونة). (Weighted Mean)

3- تحليل التباين. (Analyses of Variance)

4- استخدام سلم تقييم مكوّن من سبع درجات. (7-Point Scale)

5- أختبار الفرضيًات. (Hypotheses Testing)

5- أسلوب أو طريقة الرتب. (Rank Method)

الطريقة الحسابية

نفرض أنَ :-

عدد الحكام أو المقيمين n = Number of judges

L = Number of Objects

O_j = Object j , j = 1, 2… L

O_k = Object k, k = 1, 2… L

Y_{ijk} = the response of the judge i who prefer the O_j to O_k ,

i = 1, 2, 3… n

$$X_{jk}=n_1*(-1)+n_{2*}(-2)+n_{3*}(-3)+n_{4*}(0)+n_{5*}(1)+n_{6*}(2)+n_{7*}(3) \quad \dots (1)$$

Where $n1+ n_2+ n_3+ n_4+ n_5+ n_6+ n_7 = n$

اي ان:- X_{jk} تساوي مجموع حاصل ضرب كل درجة من درجات سلم التفضيل السبع في عدد الحكام او المقيمين المقابل لتلك الدرجة عند مقارنة السلعة او المادة (O_j) مع السلعة او المادة(O_k) بالترتيب (j , k)

$$\bar{X}_{kj} = \sum {}^{x_{kj}}/_{n}$$

Mean preference … (2)

$$M_{jk} = \frac{(\bar{X}_{jk} - \bar{X}_{kj})}{2}$$

$$M_{kj} = \frac{(\bar{X}_{kj} - \bar{X}_{jk})}{2}$$ Average mean preference … (3)

$d_{jk} = (M_{jk} + M_{kj}) / 2$ Order effect … (4)

$d = \sum \sum d_{jk} / L (L-1)$ Average order effect … (5)

$S_j = \sum M_{jk} / L$ Final preference score … (6)

$S_k = \sum M_{kj} / L$

$\gamma_{jk} = M_{jk} - (S_j - S_k)$ Deviation from Subtraction … (7)

T_c , c = 1,2 ,...,7 vertical total sum of the number of Judges in each Cell of the 7- point scale

T_c = يمثل المجموع الكلي العمودي لعدد الحكام أو المقيمين الذين يمنحون درجة تفضيل معينة من إحدى درجات سلّم التفضيل السبعة لكلاً الترتيبين($_{j,k}$) , ($_{k,j}$) ولجميع المقارنات الزوجية الممكنة وعددها :2/ (L-1) L

وبعد هذه التعريفات الأساسيه يمكن، على ضوئها، صياغة المفاهيم الرئيسة في أسلوب تحليل التباين– ذو اتِجاهين كما يلي ووضعهاأو أستعمالها في جدول تحليل التباين رقم(2) فيمابعد .

1- مجموع المربعات الكلُي (Total sum square)

1) $SSt = T_1(-3)^2+T_2(-2)^2+T_3(-1)^2+T_4(0)^2+T_5(1)^2+T_6(2)^2+T_7(3)^2$.

2 – مجموع مربعات التأثيرات الرئيسية

2) $SS_j = 2nL \sum S_j^2$

3- مجموع مربعا ت متوسطات التفضيل

3) $SSx_{jk} = n \sum\sum X^2_{jk}$

4 - مجموع مربعات معدل متوسطات التفضيل

4) $SSm_{jk} = 2n \sum\sum M^2_{jk}$

5- مجموع مربعات متوسط تأثير الترتيب

5) $SSd = SSx_{jk} - SSm_{jk}$

مجموع مربعات التأثير المشترك

6) $SS\gamma_{jk} = SSm_{jk} - SS_j$.

7- مجموع مربعات الخطأ

7) $SSE = SSt - SSx_j$

وعليه ، يمكن كتابة الأُنموذج الرياضي لتحليل التباين- ذو اتجاهين في حالة المقارنات الزوجية كما يلي:-

8) $Y_{ijk} = (S_j - S_k) + (d_{jk} - d) + \gamma_{jk} + E_{ijk}$.

مثال تطبيقي:

أفترض أن لدينا (6) أنواع من عصير العنب و هي (A, B, C, D, E,F) . قدمت تلك الأنواع للتقييم و التفضيل ضمن تجربة تعرف بتجربة المقارنات الزوجية لاختبار التذوق -Taste) (Testing Paired Comparison Experiment في أحدى شركات الصناعات الغذائية (من الممكن أجراء مثل هذه التجربة في أي سوق للمواد الغذائية "سوبر ماركت " لمعرفة أي الأنواع أكثر تفضيلا من بين الأنواع الأخرى .

تم في هذه التجربة تعيين (30) حكماً أو مقيماً من بين العاملين في تلك الشركة والذين سبق لهم أن أشتركوا في مثل هذه التجارب ،إذ تم توجيه السؤال التالي الى هؤلاء الحكام أوالمقيِّمين : أي نوع أو عصير من هذين العصيرين تفضل؟، العصير الأول أم الثاني . نرجو اعطاء العصير الذي تفضله درجه من درجات سلم التفضيل السابق المكون من سبع درجات . من الواضح أن عدد المقارنات الزوجيه هنا هو (15) مقارنه.

وبعد عرض أزواج العصائر على الحكام أو المقيِّمين الثلاثين ، خمسة عشر منهم عرضت عليهم الأزواج وفق الترتيب (j , k)، و الخمسة عشر الاخرين عرضت عليهم الأزواج وفق الترتيب (k , j) و تمكنا من تجميع و تلخيص و وضع أجاباتهم و أعدادهم في جدول رقم (1).

أن الجدول رقم(1) يبين، مثلا ، أن من بين الخمسة عشر (15) حكماً أو مقيماً الذين تذوقوا العصير (A) والعصير (B) بالترتيب (A اولا ثم B ثانياً) يوجد (3) حكَام منهم عبّرو عن تفضيلهم البسيط للعصير (A)على العصير (B) أي أعطو درجة تفضيل (1). وأن ثلاثة حكَام منهم قد عبّرو عن تفضيلهم بشكل قويُ للعصير (B) على العصير (A)، أي أعطوا درجة تفضيل (3-).

كما أنَ هناك (7) حكَام أو مقِيمين من بين الخمسة عشر الَذين تذوقوا العصير (B) والعصير(A) بالترتيب(B أولا ثمَ A ثانياً) قد عبَروا عن تفضيلهم للعصير B على العصير A بشكل متوسط ؛ أي أعطوا درجة تفضيل (2) ، وهكذا تكون قراءة بقية أرقام جدول رقم (1) .

أما الجزء الآخر من الجدول فيخص X_{jk} X_{jk} M_{jk} إذ تم حسابها وفق المعادلات (1)، (2) ، (3) على التوالي.

*** جدول رقم (1)**

يمثل جميع المقارنات الزوجية الممكنة وعدد الحكام أو المقيمين عند كل مستوى من مستويات سلَم التفضيل

Pair j , k k ,j	Preference Scale -3 -2 -1 0 1 2 3	Total Score X_{jk} X_{kj}	Mean Preference $\bar{X}_{jk}$ $\bar{X}_{kj}$	Average Mean Preference M_{jk} M_{kj}
A, B B, A	3 2 4 3 2 1 1 2 0 0 2 7 3	-3 18	-0.200 1.200	-0.7000 0.7000
A, C	3 5 2 1 2	-14	-0.933	-0.7330

C, A	1 1 1 2 2 1 3 4 2	8	0.533	0.7330
A, D D, A	1 2 2 2 3 2 3 2 5 2 2 2 2 0	7 -15	0.467 -1.000	0.7335 -0.7335
A, E E, A	3 1 3 3 1 2 2 2 2 2 1 1 6 1	-3 4	-0.200 0.267	-0.2335 0.2335
A, F F, A	2 5 1 3 1 2 1 2 2 1 2 3 2 1	-9 5	-0.600 0.333	-0.4665 0.4665
B, C C, B	1 1 1 3 2 5 2 3 3 3 2 1 2 1	12 -10	0.800 -0.667	0.7335 -0.7335
B, D D, B	1 3 3 3 1 3 1 1 1 1 1 4 3 4	-8 16	-0.533 1.067	-0.8000 0.8000
B, E E, B	1 1 2 2 3 3 3 4 4 1 1 2 2 1	11 -12	0.733 -0.800	0.7665 -0.7665
B, F F, B	1 1 1 2 2 5 3 4 3 1 3 1 2 1	15 -11	1.000 -0.733	0.8665 -0.8665
C, D D, C	3 3 2 2 2 2 1 1 1 2 1 3 3 4	-8 14	-0.533 0.933	-0.7330 0.7330
C, E E, C	1 1 3 2 1 2 5 4 3 2 2 2 1 1	12 -13	0.800 -0.867	0.8335 -0.8335
C, F F, C	1 2 2 2 2 2 1 3 3 3 1 3 1 1	9 -10	0.600 -0.667	0.6335 -0.6335
D, E	1 2 2 3 2	6	0.400	0.4665

E, D	2 3 3 2 2 4 2 1 1	-8	-0.533	-0.4665
D, F	1 1 2 6 2 1 2	3	0.200	0.2335
F, D	2 2 2 5 1 2 1	-4	-0.267	-0.2335
E, F	2 1 1 4 2 2 3	6	0.400	0.5000
F, E	4 2 2 1 1 2 2	-9	-0.600	-0.5000

Total T_c	62 68 53 69 60 76 61			

* الأرقام في الجدول أعلاه أفتراضية

ومن معلومات جدول رقم (1) أيضاً يمكن حساب درجة التفضيل (S_j) لكل عصير من العصائر الستَّة المقدمة للمقارنة والتقييم وذلك بأستخدام المعادلة رقم (6) وكما يلي:

$$S_1 = (- 0.700 - 0.733 + 0.7335 – 0.2335 – 0.4665)/6 = - 0.23325$$

$$S_2 = (0.700 + 0.7335 – 0.800 + 0.7665 + 0.8665)/ 6 = 0.37775$$

$$S_3 = (0.733 – 0.7335 – 0.733 + 0.8335 + 0.6335)/ 6 = 0.12225$$

$$S_4 = (-0.7335 + 0.800 + 0.733 + 0.4665 + 0.2335)/6 = 0.24992$$

$$S_5 = (0.2335 – 0.7665 – 0.8335 – 0.4665 + 0.500)/6 = - 0.22217$$

$$S_6 = (0.4665 – 0.8665 – 0.6335 – 0.2335 – 0.500)/ 6 = - 0.2945$$

$$\sum S_j = 0 \ , \ j = 1,2 , 3, 4, 5, 6.$$

وبهذا يتحقق احد أهداف هذا البحث الخاص بإيجاد تقدير لدرجة التفضيل النهائية (S_j).
ولمعرفة فيما إذا كان هناك أختلاف معنوي أو حقيقي بين درجات التفضيل الستة اعلاه (S_j) " كهدف أخر" وغيره من الأهداف الأخرى في هذا البحث نلجأ الى أسلوب تحليل التباين ذي أتجاهين من خلال حساب مجاميع المربعات وكما يلي:-

1) $SSt_c = 62(-3)^2+68(-2)^2+53(1)^2+69(0)^2+60(1)^2+76(2)^2+61(3)^2 = 1805$
2) $SSs_j = 2(15)(6)\ [\ (-0.23325)^2 + ... + (-0.2945)^2\ ] = 73.9072$
3) $SSx_{jk} = 15\ [\ (0.200)^2 + \ldots + (-0.600)^2\ ] = 205.9417$
4) $SSm_{jk} = 2\ (15)\ [\ (-0.7)^2 + \ldots + (0.5)^2\ ] = 195.279$
5) $SS\gamma_{jk} = 195.279 - 73.9072 = 121.3718$

جدول رقم (2)
جدولُ تحليل التباين- ذوُ أتَجاهين الخاص بالمقارنات الزوجية
Paired comparison Two- Analysis of Variance Table

مصدر ألأختلاف Source of Variation	مجموع المربعاتS.S	درجة الحرية D.F	متوسط المربعات M.S	F – Ratio
Among brands (main effect) بين ألأنواع	SSs_j = 73.9072	(L – 1)= 5	MSS=14.7814	MSS/MSE = 3.8824 **
Deviation from Subtraction ألتأثير ألمشترك	$SS\gamma$ = 121.3718	(L-1)(L-2)= 20	$MS\gamma$ =6.0686	$MS\gamma$/MSE = 1.5939 *
Average Mean Preference معدل متوسط ألتفضيل	SSm_{jk} =195.2710	L(L-1)/2 =15	MSM= 13.0186	MSM/MSE =3.4194 **
Mean Order Effect متوسط تأثير ألترتيب - ---------- Mean Preference متوسط ألتفضيل	SSd =10.6627 ---------- SSx_{jk} = 205.9417	L(L-1)/2 =15 ---------- L(L-1) =30	MSD =0.7108 ---------- - MSx = 6.864	MSD/MSE = 0.1867 † ---------- MSx/MSE = 1.8030 **
Error ألخطأ ---------- Total ألكلُي	SSE ---------- SST	L(L-1)(n-1) = 420 ---------- nL(L-1) = 450	MSE = SSE / L(L-1)(n-1) = 3.8073 ----------	

6) SSd = 205.9417 – 195.279 = 10.6627

7) SSe = 1805 - 205.9417 = 1599.058

يمكن تلخيص مجاميع المربعات أعلاه ودرجات الحرية الخاصة بها وأختبارات المعنوية المرافقة لها في جدول تحليل التباين- ذي أتَجاهين رقم (2) التالي:-

معنوي جداً Highly Significant ** ، غير معنوي Not Significant *

D.F of Mean preference + D.F of Error = D.F Total = 30 + 420 = 450

الاستنتاجات

بعد الاطلاع على نتائج الجدول (2) جدولُ تحليل التباين- ذوُ أتَجاهين الخاص بالمقارنات الزوجية وقد تبيين مايلي:-

1- تعد الأختلافات معنوية جداً(جوهرية/أساسية) بين درجات التفضيل النهائية (S_j) الخاصة بالعصائر الستة. بمعنى آخر أن هناك فروقاً حقيقة بين درجات التفضيل النهائية مما يدل على أن العصائر تختلف عن بعضها بعضاً اختلافاً حقيقياً من حيث المذاق.

2- تعد الأختلافات معنوية جداً(جوهرية/أساسية) بين متوسطات التفضيل (Mean Preference) ومعدلات متوسطات التفضيل Average Mean Preference .

3- أنَ معدل تأثير الترتيب (d) Average order effect يمثل، كما عرفنا سابقاً ، معدَل الفرق بين تقديم العصير للتقييم أو التفضيل اولاً أو ثانياًعندالمقارنة . فعندما نقدم زوج من العصائر (A, B) مثلاً إلى الحكام للتقييم نقدمه في صورتين أو حالتين، الحالة الأولى في الصورة (A, B) والحالة الثانية في الصورة (B, A) آخذين الترتيب بنظر الأعتبار. فقد تبين بأن تأثير ترتيب تقديم العصائر للتقييم غير معنوي أي أنه لايؤثر بشكل جوهري على قرار الحكام في هذه التجربة ، مما يوضح ويدل على متانة وتجانس أو ثبات آراء الحكَام عند تفضيلهم عصير على آخر.

4- تبين أنَّ مصدر ألأختلافات بين مجموع مربعات التأثير المشترك أو التفاعل غير معنوي أو غير حقيقي. أي عدم وجود أختلاف بين بيانات المجتمع الأصلي لمثل هذه التجارب والبيانات التي نحصل عليها من آراء الحكَام بأستخدام سلَّم الدرجات. (أختبار حسن المطابقة Goodness of fit test).

إنّ القول بأن هناك اختلافات حقيقية (معنوية جداً) بين أنواع العصائر الستَة لايحدد أيَهما أكثر تفضيلاً من ألأنواع الاخرى من أجل أتِخاذ قرار تحديد الكمِيات المطلوبة من ذلك النوع المفضَل في المستقبل. لذلك نلجأ الى ما يسمَى بطريقة الرتب لتحديد أيَهما أكثر تفضيل ،نرتب درجات التفضيل النهائية (S_j) ترتيباً تنازلياً وكما يلي:

Object	S_j= Score	Rank
B	0.37775	1
D	0.24992	2

C	0.12225	3
E	-0.22217	4
A	-0.23325	5
F	-0.29450	6

من الواضح أنَ عصير العنب (B) هو أكثر ألأنواع تفضيلاً ، يليه العصير (D) ثم العصير (C) ، وهكذا . وأقل ألأنواع تفضيلاً هو العصير (F) .

1- Scheff 'e , H. 1952. An analysis of variance for paired comparisons. JASA. Pp.381.
2- Bradley, R,A . and Terry, M,E. 1952. The rank analysis of incomplete block designs. Biometrika, pp.324.
3- Bradley, R,A. 1953. Some statistical methods in taste-testing and quality evaluation. Biometrics, pp. 22.
4- Buhlman, H,. And Huber, P,J. 1963.Pair wise comparison and ranking in tournaments. Ann. Math.statistics. pp.501.
5- Shelly, M, W. and Bryan, G, L. 1964. Human Judgments and optimality, Willey.
6- Starks, T. H. and David, H. A. 1961. Significance taste for paired comparisons experiments, Biometrika, pp.95.
7- Wierengs, B. 1974. Paired comparison product testing-when individual preferences are stochastic. App. Statistics. Pp. 384.

8- Pearman, D. and Kroes, E. 1990. Stated preference techniques : Aguide to practice. Davies and Gleave Ltd.
9- David R. Anderson, Dennis J. Sweeney & Thomas A. Williams.1999. Statistics for Business & Economics, 6Th Ed. West P. Company.
10- Gerald Keller, and Brian Warrack. 2003. Statistics For Management and Economics, 6th, Thomson Learning Inc.

11- Dr. P.N. Arora , S. Arora, and Amit Arora. 2007. Statistical Methods . S. Chand & Company LT