

تحديد توزيع الاحتمال لوقت الاشتغال لحين حصول توقفات في مكائن الطواحين للخطوط الإنتاجية لمعمل الاسمنت الأبيض في الفلوجة

م.م. قاسم ناصر حسين

جامعة تكريت / الإدارة والاقتصاد

Email : gasimalnasir67@yahoo.com

الملخص:

يتناول هذا البحث تقدير المعالم ودالة المعولية للتوزيع الاحتمالي الذي يدرس نسب الفشل التي تظهر في التجارب الحياتية (توزيع ويبيل للفشل). حيث اختبر توزيع البيانات ووجد انه توزيع ويبيل بمعلمة قياس (θ) ومعلمة شكل (λ) والتي سنعتبرها معلومة.

وطرائق تقدير المعالم هي طريقة الإمكان الأعظم، ومقدر بيز، ومقدرات وايت يتم تقدير متوسط وقت الاشتغال لحين الفشل، وكذلك تقدير معولية التوزيع. إن تقدير متوسط وقت الاشتغال لحين الفشل يعد مهما جدا لتحديد سياسة الصيانة التي يجب أن تقوم بها المنشأة للحد أو منع تكرار مثل هذه التوقفات.

Determine the probability distribution of the time to engage until get stops in the mills machines for production lines for white cement plant in Fallujah

Qassim Nasser

Abstract

This paper deals with estimating the parameters and reliability function of the well-known distribution of studying of failure rate which appears in life testing experiments (Weibull Failure Model). The estimation method are maximum likelihood and white estimator and bayes estimator using proposed prior distribution for scale parameter (θ) where the shape parameter (λ) is considered known. All the results are obtained through simulation experiment which is designed for the purpose.

1- المقدمة:

إن البيانات المتجمعة لدينا والتي تمثل أوقات اشتغال مكائن الطواحين بالساعات لحين حصول الفشل ولمدة شهر في معمل الفلوجة وهو من المعامل الحكومية التابعة لوزارة الصناعة والمعادن التي تنتج مادة الاسمنت الأبيض وبعد اختبار رسم هذه البيانات واختبار المنحنى الناتج وجد انه يمثل توزيع ويبل ذي المعلمتين (θ, λ) حيث تشير (θ) إلى معلمة القياس و (λ) إلى معلمة الشكل وكما سنوضح في الجانب التطبيقي من البحث . لذا ارتأينا استخدام توزيع ويبل ذي المعلمتين ومن ثم تقدير معلمته بطريقة الإمكان الأعظم ومقدرات وايت المستندة على المربعات الصغرى ومقدرات بيز ، ومن ثم افترضنا ان معلمة الشكل (λ) معلومة وان معلمة القياس (θ) متغير عشوائي له توزيع أولي مقترح ، ثم تم اشتقاق مقدر بيز باعتماد دالة خسارة تربيعية وكذلك قدرت دالة المعولية بعد استخراج المعلمات المقدرة (Stone, G.C., and G. Van Heeswijk, 1977) . إن الهدف الأساسي من هذه المقدرات هو التوصل إلى أفضل تقدير لمتوسط وقت الفشل حيث وجدنا أن متوسط وقت الفشل $E(T)$ يعتمد على المعلمات المقدرة (θ, λ) (Paritosh Bahattachrya, 2010) وان تقدير هذا المتوسط مهم جدا لكي تتمكن الإدارة من رسم سياسة خاصة بالصيانة الوقائية لمنع تكرار هذه التوقفات ثم اعتماد الجانب التجريبي أولا للحصول على أفضل المقدرات ثم عكس هذه المقدرات ذات اقل متوسط مربعات خطأ ممكن على الجانب التطبيقي من البحث .

2- هدف البحث

يهدف البحث الى تقدير معلمات توزيع الوقت المستغرق لحين الفشل للمعدات التي تشمل الطواحين في معمل الاسمنت الأبيض في الفلوجة ، وقد وجد أن اختبار توزيع هذا الوقت هو توزيع ويبل ذي المعلمتين (θ, λ) ، حيث يتم تقدير المعلمات بطريقة الإمكان الأعظم ومقدر بيز من خلال توزيع أولي مقترح لمعلمة القياس (θ) ومقدرات وايت للمعلمتين (θ, λ) ، ثم تقدر دالة المعولية وكذلك يستخرج متوسط توزيع الفشل لكونها مؤشراً مهماً جداً في عمليات الصيانة .

3- الجانب النظري:

تعرف الدالة الاحتمالية لتوزيع ويبل المستمر (وهو احد التوزيعات الاحتمالية الممثلة لتوزيع أوقات فشل المعدات وغيرها) (Johanson , 1995) بالدالة رقم (1)

$$f(t; (\theta, \lambda)) = \frac{\lambda}{\theta} (t^{\lambda-1}) e^{-\frac{t^\lambda}{\theta}} \quad \lambda > 0, \theta > 0 \quad \dots 1$$

وان الدالة الاحتمالية التجميعية هي :

$$F(t; (\theta, \lambda)) = 1 - e^{-\frac{t^\lambda}{\theta}} \quad \dots 2$$

وان دالة المعولية

$$R(t) = \Pr(T > t) = \int_t^{\infty} f(t) dt = e^{-\frac{t^\lambda}{\theta}} \quad \dots 3$$

وكذلك تعرف دالة معدل الفشل (Hazard rate) لهذا التوزيع بالمعادلة

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \\ = \frac{\lambda}{\theta} t^{\lambda-1} \quad \dots 4$$

وهي دالة متزايدة عندما $\lambda > 1$

ومتناقصة عندما $\lambda < 1$

وثابتة عندما $\lambda = 1$

إن الصيغة العامة للعزم للرأي لهذا التوزيع هي :

$$E(T^r) = \theta^{\frac{r}{\lambda}} \Gamma\left(1 + \frac{r}{\lambda}\right)$$

$$\mu = E(T) = \theta^{\frac{1}{\lambda}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\text{Var}(T) = E(T^2) - (E(T))^2 = \theta^{\frac{2}{\lambda}} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\lambda}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \right]$$

طرائق تقدير معلمة القياس ودالة المعولية :

3-1 - مقدر الإمكان الأعظم

لنكن لدينا عينة عشوائية تمثل أوقات الفشل $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ من توزيع ويبل المعروف بالدالة (1) فان دالة الإمكان الأعظم (Kundu, and Raqap, , (2005), pp.187-200)

هي :

$$L((t_1, t_2, \dots, t_n), (\lambda, \theta)) = \prod_{i=1}^n f(t_i, (\lambda, \theta))$$

$$= \frac{\lambda^n}{\theta^n} \prod_{i=1}^n t_i^{\lambda-1} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{t_i^\lambda}{\theta}}$$

وبإدخال اللوغاريتم نحصل على :

$$\ln L = n \ln \lambda - n \ln \theta + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^n \ln t_i - \sum_{i=1}^n \frac{t_i^\lambda}{\theta} \quad \dots \dots \dots 5$$

وعند اشتقاق المعادلة (5) بالنسبة الى (θ) باعتبار λ معلومة فان :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{t_i^\lambda}{\theta^2} - \frac{n}{\theta} \quad \dots \dots \dots 6$$

وعند مساواة المعادلة رقم (6) مع الصفر يكون مقدر الإمكان الأعظم هو :

$$\hat{\theta}_{MLE} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^\lambda}{n}$$

ولكن أن افترضنا أن (λ) هي الأخرى غير معلومة) فان مقدرها بطريقة الإمكان الأعظم هو

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} + \sum_{i=1}^n \ln t_i + \frac{\sum_{i=1}^n t_i^\lambda \ln(t_i)}{\theta} = 0 \quad \dots \quad 7$$

والمعادلة (7) غير خطية يمكن حلها بالطرائق العددية لإيجاد المقدر $\hat{\lambda}$ ولكن إذا افترضنا أن λ معلومة فان مقدر دالة المعولية بطريقة الإمكان الأعظم هو :

$$\hat{R}(t) = e^{\left(\frac{t^\lambda}{\hat{\theta}_{MLE}}\right)}$$

3-2- مقدرات وايت:

تعتمد هذه المقدرات على توظيف أسلوب الانحدار الخطي البسيط واعتماد مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية لتقدير المعلمتين (θ, λ) حيث أن الدالة الاحتمالية التراكمية لتوزيع ويبيل هي (c)

: (. d . f

$$F(t_i) = 1 - e^{-\frac{t_i^\lambda}{\theta}}$$

$$e^{-\frac{t_i^\lambda}{\theta}} = 1 - F(t_i)$$

وبأخذ اللوغاريتم للطرفين :

$$-\frac{t_i^\lambda}{\theta} = \text{Log}(1 - F(t_i))$$

$$\frac{t_i^\lambda}{\theta} = -\text{Log}(1 - F(t_i))$$

وبأخذ اللوغاريتم ثانيا :

$$\lambda \text{Log } t_i - \text{Log } \theta = \text{Log}(-\text{Log}(1 - F(t_i)))$$

$$\text{Log}(-\text{Log}(1 - F(t_i))) = -\text{Log } \theta + \lambda \text{Log } t_i$$

وعند المقارنة مع معادلة الانحدار الخطي البسيط :

$$E(Y_i) = \alpha + \beta x_i \quad \dots \dots \quad 8$$

نجد أن :

$$Y_i = \text{Log} \left(-\text{Log} (1 - F(t_i)) \right) \quad \dots \dots \dots 9$$

$$x_i = \text{Log } t_i$$

$$\alpha = -\text{Log } \theta \Rightarrow \theta^{\wedge} = e^{-\alpha^{\wedge}}$$

$$\beta = \lambda \Rightarrow \beta^{\wedge} = \lambda^{\wedge}$$

علما أن مقدري المربعات الصغرى لنموذج الانحدار الخطي البسيط هو :

$$\beta^{\wedge} = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2} \quad \dots \quad 10$$

$$\alpha^{\wedge} = \bar{y} - \beta^{\wedge} \bar{x} \quad \dots \quad 11$$

بعد تطبيق البرنامج تقدر $\alpha^{\wedge}, \beta^{\wedge}$ ومن ثم نعتد عليهما في الحصول على $\lambda^{\wedge}, \theta^{\wedge}$

3-3 - مقدر بيز للمعلمة θ :

أما المقدر الثالث للمعلمة θ فإذا اعتبرنا أن λ معلومة ، والمعلمة θ هي متغير عشوائي له توزيع

أولي (Prior Distribution) فهو مقدر بيز فإذا افترضنا أن التوزيع الأولي هو

$$g(\theta) = k \frac{e^{-\frac{a}{\theta}}}{\theta^c} \quad a, c > 1, \quad \theta > 0 \quad \dots \quad 12$$

فان المقدر بيز للمعلمة θ هو

$$d_1 = \theta^{\wedge}_{Bayes} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^{\lambda} + a}{n + c - 2} \quad \dots \dots \dots 13$$

وان مقدر دالة المعولية لتوزيع ويبل عندما λ معلومة و θ مقدر بحسب مقدر بيز هو:

$$\begin{aligned} R^{\wedge}_{\text{Bayes}} &= E \left[e^{-\frac{t^{\lambda}}{\theta}} \mid t_1, t_2, \dots, t_n \right] \\ &= \int_0^{\infty} h(\theta) (t_1, t_2, \dots, t_n, p) e^{-\frac{t^{\lambda}}{\theta}} d\theta \\ R^{\wedge}_{\text{Bayes}} &= \left(1 + \frac{t^{\lambda}}{\sum_{i=1}^n t_i^{\lambda} + a} \right) \dots \quad 14 \end{aligned}$$

ولبرهان مقدر بيز نعرف أولا دالة الإمكانات الأعظم

$$L(t_1, t_2, \dots, t_n \mid \lambda, \theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \lambda, \theta)$$

أما الدالة الاحتمالية المشتركة $(\theta, t_1, t_2, \dots, t_n)$ joint p.d.f فهي :

$$\begin{aligned} H(\theta, t_1, t_2, \dots, t_n) &= [\prod_{i=1}^n f(t_i \mid \theta)] g(\theta) \\ &= \frac{\lambda^n}{\theta^n} \prod_{i=1}^n t_i^{\lambda-1} e^{-\frac{\sum t_i^{\lambda}}{\theta}} k \frac{e^{-\frac{a}{\theta}}}{\theta^c} \\ &= \frac{\lambda^n k}{\theta^{n+c}} \prod_{i=1}^n t_i^{\lambda-1} e^{-\frac{(\sum t_i^{\lambda} + a)}{\theta}} \dots \quad 15 \end{aligned}$$

ومنها نجد الدالة الحدية of marginal p.d.f $(t_1, t_2, \dots, t_n, \theta)$

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_0^{\infty} H(t_1, t_2, \dots, t_n, \theta) d\theta$$

وبعد استخراج هذه الدالة نوجد التوزيع اللاحق

Posterior distribution of θ given the data $(t_1, t_2, \dots, t_n)$

$$H(\theta \mid t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{H(t_1, t_2, \dots, t_n, \theta)}{P(t_1, t_2, \dots, t_n)}$$

الآن نبين كيفية تكامل المعادلة رقم (15) بالنسبة لـ θ لإيجاد الدالة الحدية:

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \lambda^n k \prod t_i^{\lambda-1} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\sum(t_i^\lambda + a)}{\theta}}}{\theta^{n+c}} d\theta$$

لتكن :

$$Z = \frac{\sum(t_i^\lambda + a)}{\theta}$$

$$\theta = \frac{\sum(t_i^\lambda + a)}{Z} \Rightarrow d\theta = \frac{-\sum(t_i^\lambda + a)}{Z^2} dz$$

وعليه فإن:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-Z}}{\left(\frac{\sum(t_i^\lambda + a)}{Z}\right)^{n+c}} \left(-\frac{\sum(t_i^\lambda + a)}{Z^2}\right) dz$$

$$= \frac{-1}{\sum(t_i^\lambda + a)^{n+c-1}} \int_0^\infty Z^{n+c-2} e^{-Z} dZ$$

$$= \frac{-1}{\sum(t_i^\lambda + a)^{n+c-1}} \Gamma(n+c-1)$$

وطبقاً لذلك يكون التوزيع اللاحق:

$$H(\theta|t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\lambda^n k \prod t_i^{\lambda-1} e^{-\frac{\sum(t_i^\lambda + a)}{\theta}}}{\lambda^n k \prod t_i^{\lambda-1} \frac{\Gamma(n+c-1)}{\sum(t_i^\lambda + a)^{n+c-1}}}$$

$$H(\theta|t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\sum(t_i^\lambda + a)^{n+c-1}}{\Gamma(n+c-1)\theta^{n+c}} e^{-\frac{\sum(t_i^\lambda + a)}{\theta}} \quad \dots \quad 16$$

وطبقا لدالة الخسارة التربيعية $^2\text{Loss} = (\hat{\theta} - d)$ يكون مقدر بيز للمعلمة θ باعتبار أن المعلمة λ معلومة هو :

$$d_2 = \theta_{Bayes}^{\wedge} = \frac{\sum(t_i^{\wedge} + a)}{n+c-2} \quad \dots \quad 17$$

4- الجانب التطبيقي:

في خط إنتاجي لإنتاج الاسمنت الأبيض في معمل الاسمنت الأبيض في الفلوجة / قسم الطواحين سحبت بيانات تمثل أوقات الاشتغال (بالساعات) لحين حصول الفشل في الطواحين الخاصة بالمعمل مكونة من (50) مشاهدة مدرجة في الجدول أدناه :

جدول رقم (1) اوقات الفشل بالساعات

$X_1 = 0.1707$	$X_{26} = 2.4932$	$X_{45} = 8.3961$
$X_2 = 0.1711$	$X_{27} = 2.5407$	$X_{46} = 8.7991$
$X_3 = 0.2296$	$X_{28} = 3.1654$	$X_{47} = 9.0179$
$X_4 = 0.3403$	$X_{29} = 3.2169$	$X_{48} = 9.3794$
$X_5 = 0.3881$	$X_{30} = 3.2528$	$X_{49} = 10.6381$
$X_6 = 0.4128$	$X_{31} = 3.2977$	$X_{50} = 13.0483$
$X_7 = 0.5118$	$X_{32} = 3.3370$	$X_{45} = 8.3961$
$X_8 = 0.7897$	$X_{33} = 3.6377$	$X_{46} = 8.7991$
$X_9 = 1.0281$	$X_{34} = 3.6508$	$X_{47} = 9.0179$
$X_{10} = 1.1611$	$X_{35} = 3.9253$	$X_{48} = 9.3794$
$X_{11} = 1.1705$	$X_{36} = 3.9984$	$X_{49} = 10.6381$

$X_{12} = 1.2200$	$X_{37} = 4.0501$	$X_{50} = 13.0483$
$X_{13} = 1.3529$	$X_{38} = 4.0535$	$X_{45} = 8.3961$
$X_{14} = 1.4339$	$X_{39} = 4.3865$	$X_{46} = 8.7991$
$X_{15} = 1.6652$	$X_{40} = 4.7968$	$X_{47} = 9.0179$
$X_{16} = 1.8150$	$X_{41} = 4.8111$	$X_{48} = 9.3794$
$X_{17} = 1.8182$	$X_{42} = 6.0944$	$X_{49} = 10.6381$
$X_{18} = 1.8723$	$X_{43} = 6.6311$	$X_{50} = 13.0483$
$X_{19} = 1.9905$	$X_{44} = 8.1778$	

وقد تم اجراء اختبار حسن المطابقة للبيانات المذكورة في جدول رقم (1) ووجد انها تتبع توزيع ويبل ذي المعلمتين (λ, θ) WE وقد قدرت معلمة القياس θ بطرائق مختلفة هي (الامكان الاعظم ، مقدر بيز ، مقدر وايت) اما معلمة الشكل λ فقد اعتبرت معلومة ، وبعد الحصول على افضل المقدرات للمعلمة θ ، قدرت معولية المكانن وكما هو مبين في الجدول ادناه :

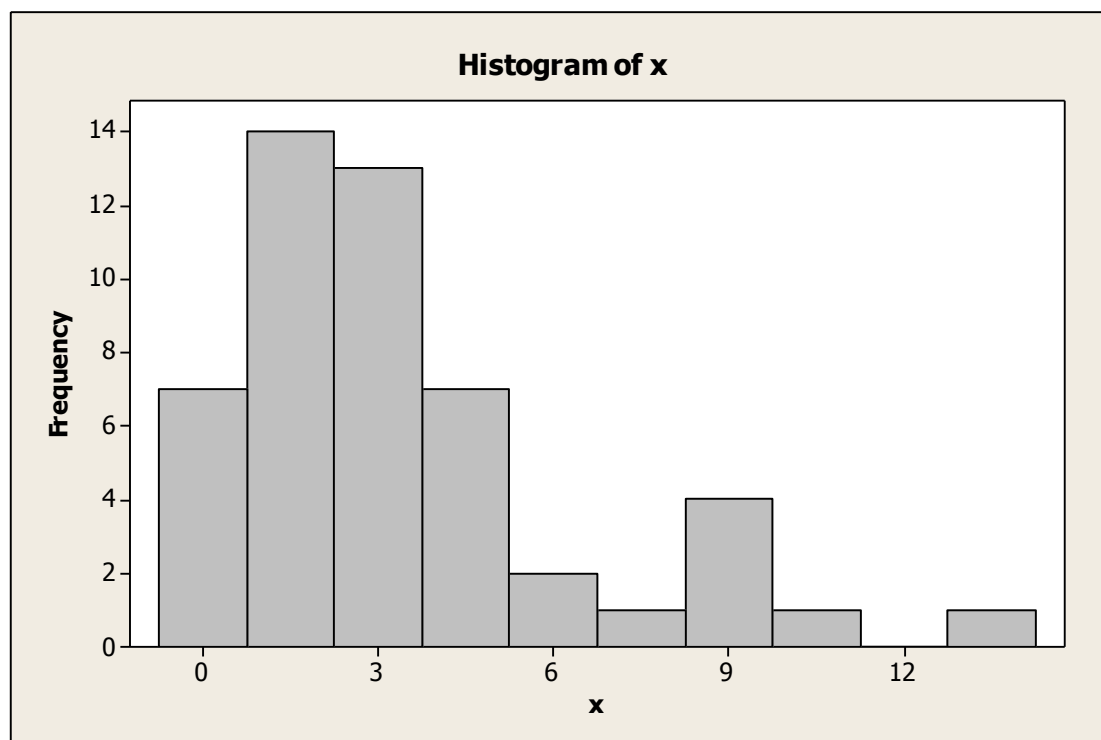
جدول رقم (2) مقدرات معولية المكانن

$\hat{R}_{MLE} = 49.4175 \%$
$\hat{R}_{Bayas} = 48.1488 \%$
$\hat{R}_W = 45.9621 \%$

Descriptive Statistics: x

Variable	N	CumPct	Mean	SE Mean	TrMean	StDev
X	50	100	3.442	0.422	3.147	2.986

Variance	CoefVar	Sum of Squares	Minimum	Median	Maximum
8.914	86.73	1029.292	0.171	2.492	13.048

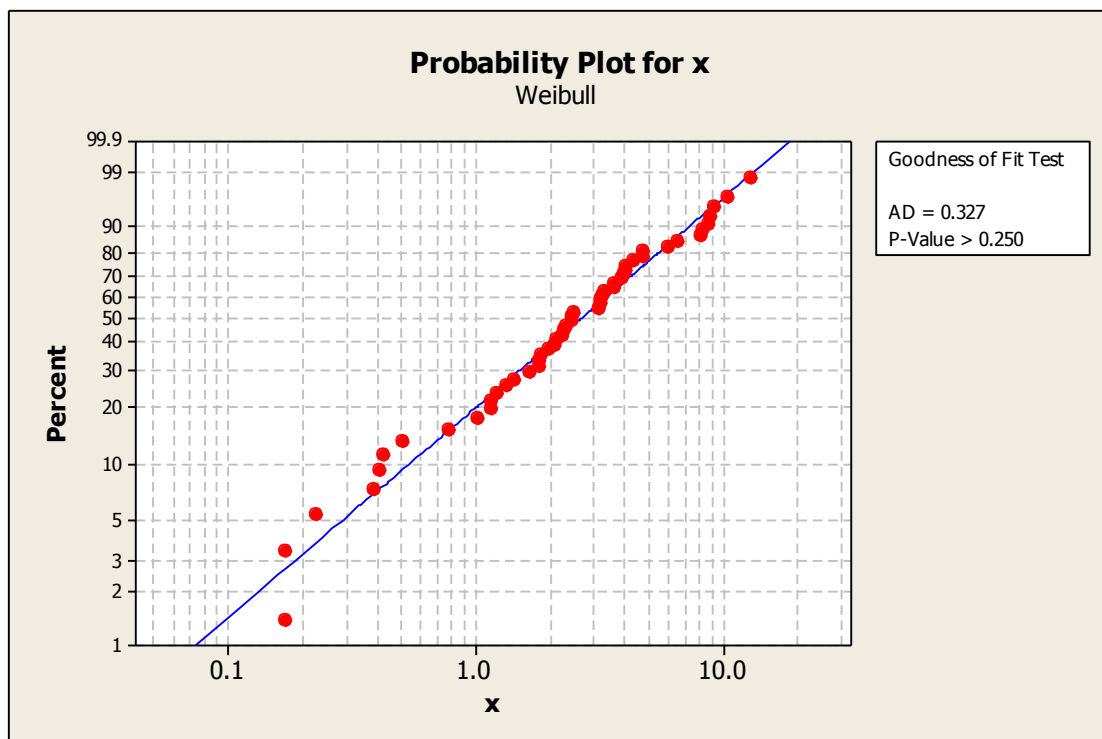


Goodness of Fit Test :

Distribution	AD	P
Weibull	0.327	> 0.250

ML Estimates of Distribution Parameters :

Distribution	Shape	Scale
Weibull	1.17888	3.64630



4- نتائج المحاكاة:

تم إجراء تجارب المحاكاة لمقارنة معلمة القياس (θ) للتوزيع الاحتمالي ومن ثم تقدير دالة المعولية . تمت مقارنة معلمة القياس باستخدام متوسط مربعات الخطأ (MSE) ولدالة المعولية متوسط مربعات الخطأ المتكامل (IMSE) ومن خلال جدول رقم (3) ولحجم عينة ($n=10$) نلاحظ أن المقدّر الذي حصل على أقل (MSE) هو (d_2) ويليه (MLE) ويليه (مقدّرات وايت (White estimator (WE)) والأخير هو (d_1) وهو مقدّر بيز لذلك يكون (d_2) ذو التقدير الأدنى هو الأفضل من بين المقدّرات الأربعة ولحجم عينة ($n = 10$) . ومن جدول رقم (4) نفس النتائج عكست على تقدير المعولية حيث امتلك (d_2) أقل (IMSE) ثم (MLE) ثم (WE) وأخيرا (d_1) . ولكل القيم المختارة للمعالم كانت (d_2) والتي تمتلك أقل (MSE) هي الأفضل ثم الإمكانا لأعظم ثم (WE) وأخيرا (d_1) كذلك تقدير المعولية أخذ الترتيب (WE , d_1 , d_2 , MLE) ولحجم عينة ($n = 100$)

5- الاستنتاجات:

ان ساعات الفشل او التوقف تتبع توزيع ويبل لذلك تعد مؤثرة في عملية الانتاج وان تقدير متوسط وقت الاشتغال لحين الفشل يعتبر مهم جدا لتحديد سياسة الصيانة التي يجب ان تقوم بها المنشأة للحد من تكرار هذه التوقفات مع مراعات جدولة الاوقات اللازمة لاجراء الصيانة بناءً على ساعات التوقف .

المصادر

- 1-Johanson, N., L., Kotz, S. and Blackrishnan , N. (1995) , " continuous univariate distributions " , Vol.1, Second Edition , Johan Wiley and Sons Inc. , Newyork .
- 2-Kundu, D. and Raqap, M.Z., (2005), "Generalized Rayleigh distribution" different methods of estimation. Computational statistic and data analysis, vol. 49, pp.187-200.
- 3- Stone, G.C., and G. Van Heeswijk, "Parameter estimation for the Weibull distribution", IEEE trans. On Elect. Insul. , Vol.EI – 12, No. 4 August1977.

4- Paritosh Bahattachrya, (2010), "A study on Weibull distribution for estimating the parameters", Vol. 5, No.2, Journal of applied quantitative methods.

الجدول

Table (3): Estimator of (θ) by MLE, WE, d_1 and d_2 with MSE for each ($n = 10$).

A	θ	β	Methods of Estimations							
			MLE	MSE	WE	MSE	d1	MSE	d2	MSE
0.01	0.5	0.01	0.196987	0.009269	1.727740	0.151556	5.467630	2.467840	4.947160	1.977800
		0.05	0.195113	0.009393	1.734610	0.153396	1.257350	0.057470	1.137660	0.040750
		1.00	0.194049	0.009448	1.736650	0.153787	0.256760	0.006010	0.232320	0.007240
		1.50	0.196688	0.009288	1.728920	0.151902	0.242000	0.006750	0.218960	0.007980
	1.5	0.01	0.197512	0.169750	1.727940	0.006201	5.468190	1.574760	4.947650	1.188730
		0.05	0.197513	0.169737	1.726670	0.006021	1.259880	0.005870	1.139950	0.013050
		1.00	0.199737	0.169163	1.720280	0.005724	0.262740	0.153180	0.237730	0.159420
		1.50	0.197492	0.169737	1.725650	0.005839	0.242850	0.158140	0.219730	0.163990
	2.5	0.01	0.197397	0.530293	1.727420	0.060604	5.468070	0.881050	4.947540	0.599130
		0.05	0.197703	0.530147	1.725880	0.060775	1.260080	0.153840	1.140130	0.185010
		1.00	0.198258	0.529889	1.723980	0.061039	0.261190	0.501330	0.236320	0.512500

	3	1.50	0.198260	0.529892	1.724370	0.061017	0.243650	0.509210	0.220460	0.519710
		0.01	0.196549	0.786022	1.729260	0.162333	5.467170	0.608790	4.946740	0.379060
		0.05	0.198047	0.785198	1.726700	0.163173	1.260440	0.302720	1.140450	0.345890
		1.00	0.197319	0.785611	1.729140	0.162563	0.260200	0.750770	0.235430	0.764380
		1.50	0.195983	0.786344	1.731480	0.161825	0.241260	0.761170	0.218290	0.773870
0.05	0.5	0.01	0.195331	0.009384	1.734340	0.153351	5.454420	2.454740	4.936180	1.968060
		0.05	0.195203	0.009395	1.734980	0.153534	1.254810	0.057090	1.135580	0.040490
		1.00	0.196861	0.009284	1.728830	0.151895	0.259170	0.005900	0.234550	0.007130
		1.50	0.196225	0.009318	1.730480	0.152291	0.241010	0.006810	0.218110	0.008030
	1.5	0.01	0.198377	0.169519	1.724460	0.005927	5.457610	1.566380	4.939070	1.182810
		0.05	0.196324	0.170053	1.730670	0.006245	1.255980	0.006060	1.136650	0.013290
		1.00	0.196241	0.170071	1.730540	0.006205	0.258520	0.154230	0.233960	0.160370
		1.50	0.196574	0.169990	1.730070	0.006220	0.241370	0.158520	0.218440	0.164330
	2.5	0.01	0.194267	0.531744	1.738000	0.059126	5.453300	0.872310	4.935170	0.593100
		0.05	0.196656	0.530632	1.729770	0.060303	1.256330	0.154770	1.136970	0.185870
		1.00	0.194556	0.531601	1.736140	0.059314	0.256750	0.503320	0.232360	0.514310
		1.50	0.197734	0.530139	1.726330	0.060748	0.242590	0.509700	0.219540	0.520140

										0
	3	0.01	0.194245	0.787332	1.738220	0.160275	5.453280	0.601970	4.935150	0.374580
		0.05	0.195538	0.786591	1.732440	0.161541	1.255160	0.304550	1.135900	0.347570
		1.00	0.197899	0.785275	1.726320	0.163176	0.260260	0.750720	0.235530	0.764320
		1.50	0.194496	0.787174	1.735480	0.160772	0.239190	0.762300	0.216470	0.774890
1.0	0.5	0.01	0.195562	0.009361	1.732860	0.152925	5.195560	2.204920	4.723240	1.783650
		0.05	0.197901	0.009223	1.726320	0.151357	1.197900	0.048800	1.089000	0.034770
		1.00	0.196307	0.009320	1.730690	0.152365	0.246310	0.006530	0.223920	0.007700
		1.50	0.195587	0.009373	1.734500	0.153525	0.228920	0.007450	0.208110	0.008610
	1.5	0.01	0.197154	0.169835	1.727690	0.006034	5.197150	1.366990	4.724690	1.039940
		0.05	0.197897	0.169656	1.727020	0.006141	1.197900	0.009240	1.089000	0.016980
		1.00	0.194294	0.170581	1.736760	0.006544	0.244290	0.157770	0.222090	0.163380
		1.50	0.195253	0.170329	1.733600	0.006362	0.228590	0.161740	0.207810	0.167050
	2.5	0.01	0.195982	0.530943	1.731530	0.059974	5.195980	0.726930	4.723620	0.494530
		0.05	0.195317	0.531250	1.733940	0.059679	1.195320	0.170310	1.086650	0.199830
		1.00	0.196782	0.530568	1.728330	0.060377	0.246780	0.507790	0.224350	0.517930
		1.50	0.197801	0.530116	1.727200	0.060731	0.231130	0.514880	0.210120	0.524440

	3	0.01	0.193726	0.787622	1.740520	0.159843	5.193720	0.481350	4.721570	0.296470
		0.05	0.196454	0.786074	1.729110	0.162313	1.196450	0.325360	1.087680	0.365770
		1.00	0.195525	0.786601	1.732910	0.161484	0.245520	0.758810	0.223200	0.771140
		1.50	0.194398	0.787248	1.738340	0.160321	0.227730	0.768660	0.207030	0.780160
1.5	0.5	0.01	0.195927	0.009335	1.731100	0.152407	5.069200	2.087840	4.618600	1.696360
		0.05	0.198719	0.009173	1.723580	0.150625	1.169480	0.044910	1.065530	0.032060
		1.00	0.196350	0.009313	1.730250	0.152243	0.240340	0.006830	0.218980	0.007970
		1.50	0.195920	0.009343	1.732070	0.152751	0.223660	0.007730	0.203780	0.008850
	1.5	0.01	0.196589	0.169988	1.730360	0.006273	5.069840	1.274470	4.619190	0.973010
		0.05	0.197793	0.169673	1.726690	0.006094	1.168580	0.011080	1.064700	0.019030
		1.00	0.198549	0.169471	1.723860	0.005913	0.242490	0.158220	0.220930	0.163680
		1.50	0.197028	0.169869	1.728430	0.006116	0.224740	0.162720	0.204770	0.167840
	2.5	0.01	0.196696	0.530616	1.729670	0.060288	5.069950	0.660550	4.619290	0.449210
		0.05	0.196994	0.530484	1.729210	0.060391	1.167800	0.177570	1.063990	0.206290
		1.00	0.197203	0.530394	1.729230	0.060435	0.241170	0.510330	0.219740	0.520050
		1.50	0.197505	0.530236	1.726270	0.060702	0.225210	0.517550	0.205190	0.526680

3	0.01	0.197435	0.785531	1.727250	0.162908	5.070670	0.428860	4.619940	0.262500
	0.05	0.199773	0.784218	1.719760	0.164726	1.170510	0.334790	1.066460	0.373930
	1.00	0.194799	0.787011	1.735480	0.160868	0.238830	0.762500	0.217600	0.774250
	1.50	0.198078	0.785163	1.724460	0.163520	0.225770	0.769720	0.205700	0.780880

Table (4): Integrated MSE for Reliability Estimator ($n = 100$).

A	θ	B	IMSE of Reliability			
			MLE	WE	d1	d2
0.01	0.5	0.01	0.0013555	0.0022873	0.0003098	0.0002928
		0.05	0.0013521	0.0022853	0.0006430	0.0006629
		1.00	0.0013540	0.0022863	0.0013173	0.0013299
		1.50	0.0013554	0.0022872	0.0013292	0.0013414
	1.5	0.01	0.0066957	0.0000084	0.0007526	0.0007797
		0.05	0.0066795	0.0000081	0.0049428	0.0049978
		1.00	0.0066973	0.0000084	0.0066162	0.0066439
		1.50	0.0066895	0.0000083	0.0066311	0.0066584
	2.5	0.01	0.0081091	0.0000295	0.0012713	0.0013065
		0.05	0.0081038	0.0000296	0.0061786	0.0062400
		1.00	0.0081112	0.0000294	0.0080213	0.0080521
		1.50	0.0081128	0.0000294	0.0080486	0.0080786
	3	0.01	0.0084121	0.0000509	0.0013930	0.0014298
		0.05	0.0084149	0.0000508	0.0064506	0.0065134
		1.00	0.0084147	0.0000508	0.0083227	0.0083543

		1.50	0.0084235	0.0000505	0.0083582	0.0083888
0.05	0.5	0.01	0.0013553	0.0022872	0.0003095	0.0002925
		0.05	0.0013502	0.0022845	0.0006416	0.0006615
		1.00	0.0013559	0.0022874	0.0013196	0.0013321
		1.50	0.0013527	0.0022859	0.0013267	0.0013390
	1.5	0.01	0.0066891	0.0000083	0.0007509	0.0007780
		0.05	0.0066887	0.0000083	0.0049560	0.0050109
		1.00	0.0066821	0.0000082	0.0066007	0.0066288
		1.50	0.0066831	0.0000082	0.0066250	0.0066525
	2.5	0.01	0.0081118	0.0000294	0.0012729	0.0013082
		0.05	0.0081125	0.0000294	0.0061922	0.0062535
		1.00	0.0081114	0.0000295	0.0080221	0.0080529
		1.50	0.0081169	0.0000293	0.0080535	0.0080834
	3	0.01	0.0084164	0.0000507	0.0013954	0.0014323
		0.05	0.0084053	0.0000511	0.0064404	0.0065032
		1.00	0.0084118	0.0000509	0.0083204	0.0083520
		1.50	0.0084086	0.0000510	0.0083433	0.0083742
1.0	0.5	0.01	0.0013508	0.0022847	0.0003033	0.0002865
		0.05	0.0013570	0.0022880	0.0006587	0.0006785
		1.00	0.0013547	0.0022868	0.0013244	0.0013367
		1.50	0.0013543	0.0022865	0.0013341	0.0013462
	1.5	0.01	0.0066739	0.0000081	0.0007593	0.0007865
		0.05	0.0066801	0.0000081	0.0049703	0.0050248
		1.00	0.0066918	0.0000083	0.0066243	0.0066517
		1.50	0.0066774	0.0000081	0.0066323	0.0066595

	2.5	0.01	0.0081168	0.0000293	0.0012913	0.0013267
		0.05	0.0081085	0.0000295	0.0062164	0.0062772
		1.00	0.0080931	0.0000299	0.0080178	0.0080485
		1.50	0.0081061	0.0000296	0.0080567	0.0080864
	3	0.01	0.0084205	0.0000506	0.0014145	0.0014515
		0.05	0.0084175	0.0000507	0.0064863	0.0065485
		1.00	0.0084209	0.0000506	0.0083450	0.0083758
		1.50	0.0084175	0.0000507	0.0083672	0.0083974
1.5	0.5	0.01	0.0013552	0.0022870	0.0002973	0.0002807
		0.05	0.0013582	0.0022886	0.0006649	0.0006847
		1.00	0.0013543	0.0022866	0.0013270	0.0013392
		1.50	0.0013514	0.0022850	0.0013343	0.0013463
	1.5	0.01	0.0066847	0.0000082	0.0007690	0.0007963
		0.05	0.0066793	0.0000081	0.0049833	0.0050376
		1.00	0.0066946	0.0000083	0.0066341	0.0066612
		1.50	0.0066842	0.0000082	0.0066461	0.0066728
	2.5	0.01	0.0081189	0.0000293	0.0013009	0.0013364
		0.05	0.0081095	0.0000295	0.0062323	0.0062928
		1.00	0.0080985	0.0000298	0.0080312	0.0080615
		1.50	0.0081019	0.0000297	0.0080599	0.0080894
	3	0.01	0.0084183	0.0000507	0.0014228	0.0014599
		0.05	0.0084132	0.0000508	0.0064964	0.0065583
		1.00	0.0084170	0.0000507	0.0083488	0.0083794
		1.50	0.0084156	0.0000508	0.0083729	0.0084028