



Marshall-Olkin Weibull Inverse Rayleigh Distributions: Some Properties and Application

Mushtaq J. Mohammed*, Mohammed T. Ahmed

College of Computer Science and Mathematics, Tikrit University

Keywords:

Marshall Olkin Weibull-G Family, Inverse Rayleigh Distribution, Quantile Function, Order Statistics, Maximum Likelihood Estimation (MLE).

ARTICLE INFO

Article history:

Received 20 Apr. 2023

Accepted 29 Apr. 2023

Available online 30 Aug. 2023

©2023 College of Administration and Economy, Tikrit University. THIS IS AN OPEN ACCESS ARTICLE UNDER THE CC BY LICENSE

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



*Corresponding author:

Mushtaq J. Mohammed

College of Computer Science and Mathematics, Tikrit University

Abstract: In this paper, a new distribution of continuous distributions based on the Marshall-Olkin weibull family is introduced, so the proposed distribution will be obtained by fitting the family with an inverse Rayleigh distribution. Thus, the proposed distribution contains four parameters, of variably form and is called the Marshall-Olkin- weibull inverse Rayleigh distribution. The cumulative distribution function, the probability density function of the new distribution, is introduced. In addition, the most important statistical properties of the new distribution were obtained, for example, the quantity function, ordered statistics, where the method of greatest likelihood was used, in order to estimate the parameters of the new distribution(MLES), establish preference, and obtain high flexibility in dealing with different types of data, so it was Testing the new distribution on a set of real data, which represents the tensile strength of glass fibers with a diameter of 1.5 cm. Through the test, Notice, that the new distribution is more closely related to the data than the other distributions, using several statistical criteria.

بعض خصائص توزيع مارشال أولكن وبيل معكوس رالي مع التطبيق

محمد طه أحمد

مشتاق جاسم محمد

كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة تكريت

المستخلص

في هذا البحث، تم تقديم توزيع جديد للتوزيعات المستمرة بناءً على عائلة مارشال أولكن وبيل، لذا سوف يتم الحصول على التوزيع المقترن من خلال تركيب العائلة بتوزيع معكوس رالي. وبهذا فإن التوزيع المقترن يحتوي على أربعة معالم مختلفة الشكل ويسمى توزيع مارشال أولكن وبيل معكوس رالي.

يتم تقديم دالة التوزيع التراكمي، دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الجديد. فضلاً عن ذلك، تم الحصول على أهم الخصائص الإحصائية للتوزيع الجديد مثل على ذلك الدالة التجزئية، الإحصاءات المرتبة، حيث تم استخدام طريقة الامكان الأعظم، من أجل تقدير معلمات التوزيع الجديد وإثبات الأفضلية والحصول على مرونة عالية في التعامل مع أنواع مختلفة من البيانات، لذلك تم اختبار التوزيع الجديد على مجموعة من البيانات الحقيقية الذي تمثل قوة شد الألياف الزجاجية بقطر 1.5 سم، ومن خلال الاختبار نلاحظ التوزيع الجديد وثيق الارتباط بالبيانات مقارنة بالتوزيعات الأخرى، باستخدام بعض المعايير الإحصائية.

الكلمات المفتاحية: عائلة مارشال أولكن وبيل، توزيع معكوس رالي، الدالة التجزئية، الإحصاءات المرتبة، تقدير المعالم باستخدام دالة الإمكان الأعظم.

1. المقدمة :Introduction

بالإمكان إدخال معلمة أو أكثر مختلفة الشكل على مجموعة توزيعات معروفة مسبقاً، لكي يتم الحصول على عائلة جديدة من التوزيعات. قد قام العالم مارشال وأولكن سنة 1997 من خلال اقتراح طريقة عامة لإدخال معلمة الشكل في عائلة التوزيعات. ولقد سميت 'معلمة الإمالة' (Tilt). ذلك لأنَّ معدل الخطأ يتغير فوق أو أسفل للعائلة المقترنة بحسب قيمة معلمة الشكل، فإن كانت قيمة معلمة الشكل كبيرة أو تساوي واحد تتغير باتجاه الأسفل وإذا أصبحت أقل أو متساوية للواحد وأكبر من الصفر فإنها تكون باتجاه الأعلى للمعدل التوزيع الأساسي. وتعطى عائلة مارشال أولكن بالشكل الآتي:

$$F^{MO}(x) = \frac{G(x; \tau)}{\alpha + \bar{\alpha}G(x; \tau)} \quad (1)$$

$$f^{MO}(x) = \frac{\alpha g(x; \tau)}{(\alpha + \bar{\alpha}G(x; \tau))^2} \quad (2)$$

حيث ان $\alpha = 1 - \bar{\alpha}$ $x < \infty, \bar{\alpha} > 0, -\infty < x < \infty$.

قامت غيتاني وكوتز عام 2007 دراسة الخصائص للموثوقية، كذلك بينت غيتاني وآخرين في سنة 2005، إن مارشال أولكن هي ممتدة للتوزيع وبيل Weibull. يمكن الحصول عليه بتوزيع مركب عند مزجه مع التوزيع الرئيسي، للعثور على تطبيق في النمذجة العمرية للبيانات، خاصة في النماذج الاحتمالية النسبية. إن العائلة الذي تم توسيعها تعطي مدى أوسع في سلوك من التوزيعات الرئيسية (Zhang et al 2007) درسوا خصائص مختلفة للنموذج من خلال توزيع (We) الذي جعلوه توزيعاً أساسياً في دراستهم. درس العديد من الباحثين، وأجرروا مقارنات لهذه العائلة من أجل

الكشف عن خصائصها. هناك عديد من التعميمات حول هذه العائلة ولإيجاد بعض الدراسات والتعميمات المطبقة على العائلة المقترحة، نقدم الدراسات الآتية وعلى النحو الآتي:

قام E. Krishna et al., 2013 بدراسة توزيع يربط عائلة مارشال مع التوزيع فرشت أطلق عليه The Marshall-Olkin Frechet Distribution. ودرس Morad et al (2015) The Kumaraswamy Marshal-Olkin Family of بالعمل على توليد توزيع جديد اسمه The Kumaraswamy Marshal-Olkin Family of .Distributions

كما قام Tibor et al (2015) بربط التوزيع الأسوي مع مارشال ولكن وذلك بأخذ التوزيع الأساسي توزيع (We) لذا أطلق عليه اسم The Marshall–Olkin exponential Weibull distribution. كذلك قدمت Lishamol (2018) توزيعا باسم The Marshall-Olkin.IKum Distribution

كما اقترح The Exponentiated Laba et al (2018) توزيع جديدا أطلق عليه Generalized Marshall–Olkin Family of Distribution المقترحة عائلة مارشال ولكن ويشار إلى عائلة التوزيعات Hadeel Klakattaw et al.(2022). هي مزدوج من تحول عائلة مارشال ولكن وعائلة وييل الذي قدم من قبل Marcelo Bourguignon et al. (2014) والمتولدة من عائلة T-X استناداً إلى توزيع وييل مع المعلمات (c, β) ومحمد عام، أي بالنسبة لأي توزيع باستخدام ناقل المعلمات τ ويمكن التعبير عن عائلة وييل لكل من الدالة التراكمية ودالة الكثافة على النحو الآتي وعلى التوالي:

$$F^{WG}(x; c, \beta, \tau) = 1 - e^{-\left(\frac{-\log(1-G(x; \tau))}{\beta}\right)^c} \quad (3)$$

$$f^{WG}(x; c, \beta, \tau) = \frac{c}{\beta} \frac{g(x; \tau)}{1 - G(x; \tau)} \left(\frac{-\log(1-G(x; \tau))}{\beta} \right)^{c-1} e^{-\left(\frac{-\log(1-G(x; \tau))}{\beta}\right)^c} \quad (4)$$

حيث إن: $c, \beta > 0$

ويمكن إيجاد العائلة المقترحة Marshall-Olkin Weibull-G family وذلك من خلال تعويض معادلة (1) في معادلة (3) حيث إن العائلة الجديدة تمتلك ثلاثة معلمات تضاف إلى التوزيع الأساسي المقترن وان دالة التوزيع الاحتمالي (CDF) ودالة الكثافة الاحتمالية (PDF) تكتب بالشكل الآتي وعلى التوالي:

$$F^{MOWG}(x; \zeta) = \frac{1 - e^{-\left(\frac{-\log(1-G(x; \tau))}{\beta}\right)^c}}{1 - \bar{\alpha} e^{-\left(\frac{-\log(1-G(x; \tau))}{\beta}\right)^c}}, \quad (5)$$

$$f^{MOWG}(x; \zeta) = \frac{\frac{\alpha c}{\beta} \frac{g(x; \tau)}{1 - G(x; \tau)} \left(\frac{-\log(1 - G(x; \tau))}{\beta} \right)^{c-1} e^{-\left(\frac{-\log(1-G(x;\tau))}{\beta}\right)^c}}{\left[1 - \bar{\alpha} e^{-\left(\frac{-\log(1-G(x;\tau))}{\beta}\right)^c} \right]^2}, \quad (6)$$

حيث إن: $\alpha, c, \beta > 0$

2. توزيع معكوس رالي **Inverse Rayleigh Distribution**: ليكن لدينا X متغير عشوائي وعلية فأن دالة التوزيع التراكمي (CDF) ودالة كثافة الاحتمال (PDF) للتوزيع بمعلمة الشكل λ وعلى التوالي:

$$G(x; \lambda) = e^{-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^2}; \quad x > 0, \lambda > 0 \quad (7)$$

$$g(x; \lambda) = \frac{2\lambda^2}{x^3} e^{-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^2}; \quad x > 0, \lambda > 0 \quad (8)$$

3. توزيع مارشال أول肯 وبيبل معكوس رالي: **MOWIRD**: في هذه الفقرة يتم إيجاد دراسة التوزيع الجديد وذلك بإيجاد دوال CDF, PDF وتمثل الدوال ببعض الرسوم الممكنة، كذلك التركيز على أهم الخصائص الاحصائية مثل الدالة التجزئية والاحصاءات المرتبة والعديد من الصفات الاحصائية الأخرى. ولغرض الحصول على توزيع جديد يمتاز بالمرونة في نمذجة أنواع مختلفة من البيانات الحقيقية ويكون من أربعة معالم، فعند تعويض معادلة (7) في معادلة (5) نحصل على (CDF) للتوزيع الجديد وكما يأتي:

$$F^{MOWIRD}(x; \alpha, \beta, c, \lambda) = \frac{1 - e^{-\left(\frac{-\log(1-e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta}\right)^c}}{1 - (1-\alpha)e^{-\left(\frac{-\log(1-e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta}\right)^c}}, \quad (9)$$

إن دالة الكثافة الاحتمالية PDF للتوزيع الجديد يمكن ايجادها باستقاق معادلة (9) وكما يأتي:

$$f^{MOWIR}(x; \zeta) = \frac{\frac{\alpha c}{\beta} \frac{2\lambda^2 x^{-3} e^{-\lambda^2 x^{-2}}}{1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}}} \left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta} \right)^{c-1} e^{-\left(\frac{-\log(1-e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta}\right)^c}}{\left[1 - (1-\alpha)e^{-\left(\frac{-\log(1-e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta}\right)^c} \right]^2}, \quad (10)$$

حيث إن $x > 0, \alpha, \beta, c, \lambda > 0$:
 وإن دالة البقاء (Survival Function) لتوزيع MOWIR الجديد هي كالتالي:

$$S(x; \alpha, \beta, c, \lambda)_{MOWIR} = 1 - \frac{1 - e^{-\left(\frac{-\log(1-e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta}\right)^c}}{1 - (1-\alpha)e^{-\left(\frac{-\log(1-e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta}\right)^c}} \quad (11)$$

حيث يمكن تبسيط معادلة (11) بالشكل الآتي:

$$S(x; \alpha, \beta, c, \lambda)_{MOWIR} = \frac{\alpha}{e^{\left(\frac{\log(1-e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta}\right)^c} + \alpha - 1} \quad (12)$$

كذلك يمكن الحصول على دالة المخاطرة أو دالة معدل الفشل (hazard function) لتوزيع MOWIR الجديد هي كالتالي:

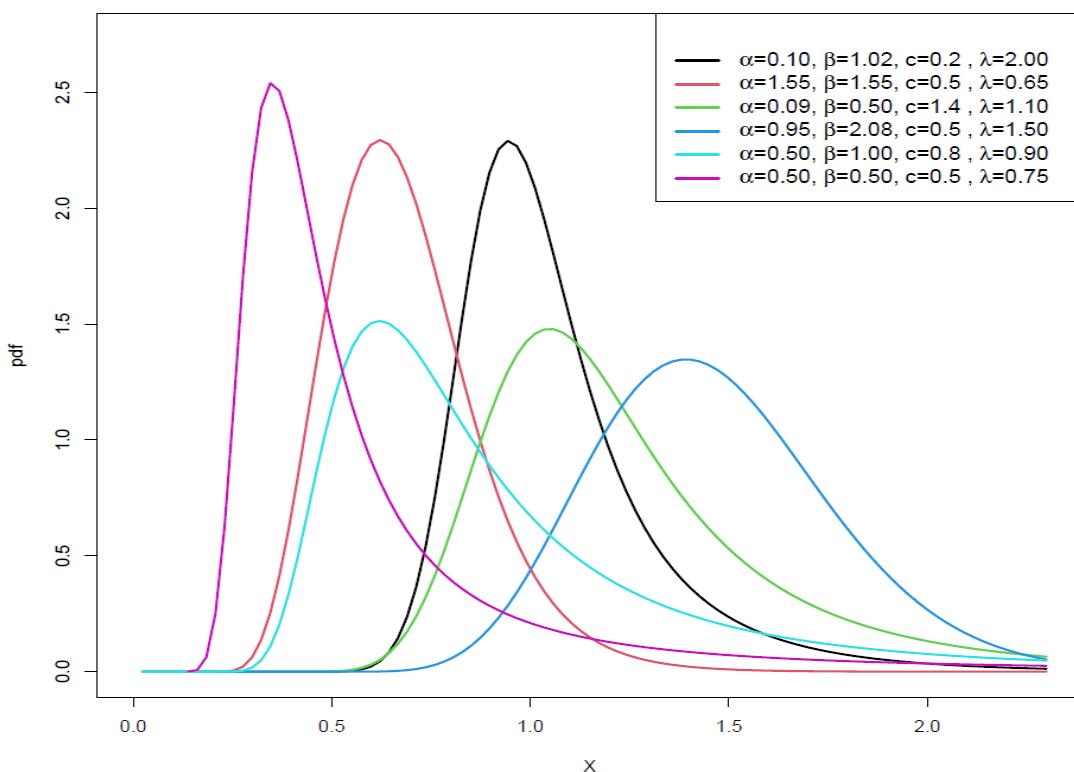
$$h(x; \alpha, \beta, c, \lambda)_{MOWIR} = \frac{\frac{\alpha c}{\beta} \frac{2\lambda^2 x^{-3} e^{-\lambda^2 x^{-2}}}{1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}}} \left(\frac{-\log(1-e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta} \right)^{c-1} e^{-\left(\frac{-\log(1-e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta}\right)^c}}{\left[\frac{\alpha}{e^{\left(\frac{\log(1-e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta}\right)^c} + \alpha - 1} \right]^2} \quad (13)$$

ويمكن تبسيطها بالشكل الآتي:

$h(x; \alpha, \beta, c, \lambda)$ MOWIR

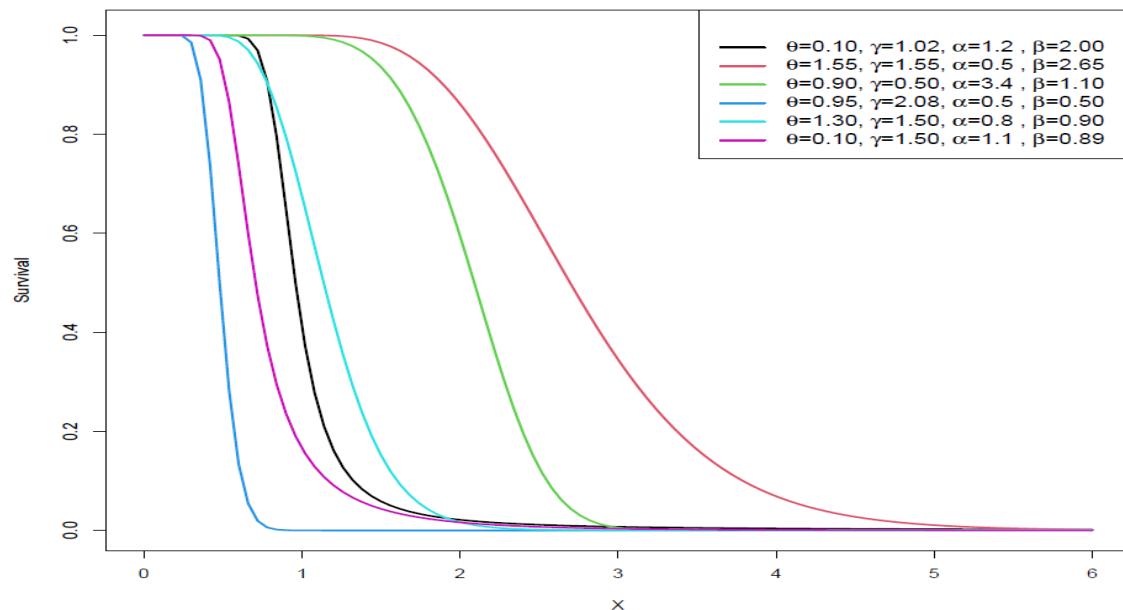
$$= \frac{2c\lambda^2 e^{2\left(\frac{\ln\left(1-e^{\frac{-\lambda^2}{x^2}}\right)}{\beta}\right)^c + \alpha - 1} \left(-\frac{\ln\left(1-e^{\frac{-\lambda^2}{x^2}}\right)}{\beta}\right)^c}{x^3 \left(e^{\frac{\lambda^2}{x^2}} - 1\right) \left(e^{\left(\frac{\ln\left(1-e^{\frac{-\lambda^2}{x^2}}\right)}{\beta}\right)^c + \alpha - 1}\right)^{2\ln\left(1-e^{\frac{-\lambda^2}{x^2}}\right)}} \quad (14)$$

الشكل رقم (1) التالي الذي يمثل عرض بعض المنحنيات الممكنة لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع MOWIR وذلك باختيار قيم مختلفة للمعلمات الأربع، وتم ذلك باستعمال البرنامج الحاسوبي الجاهز حزمة R.

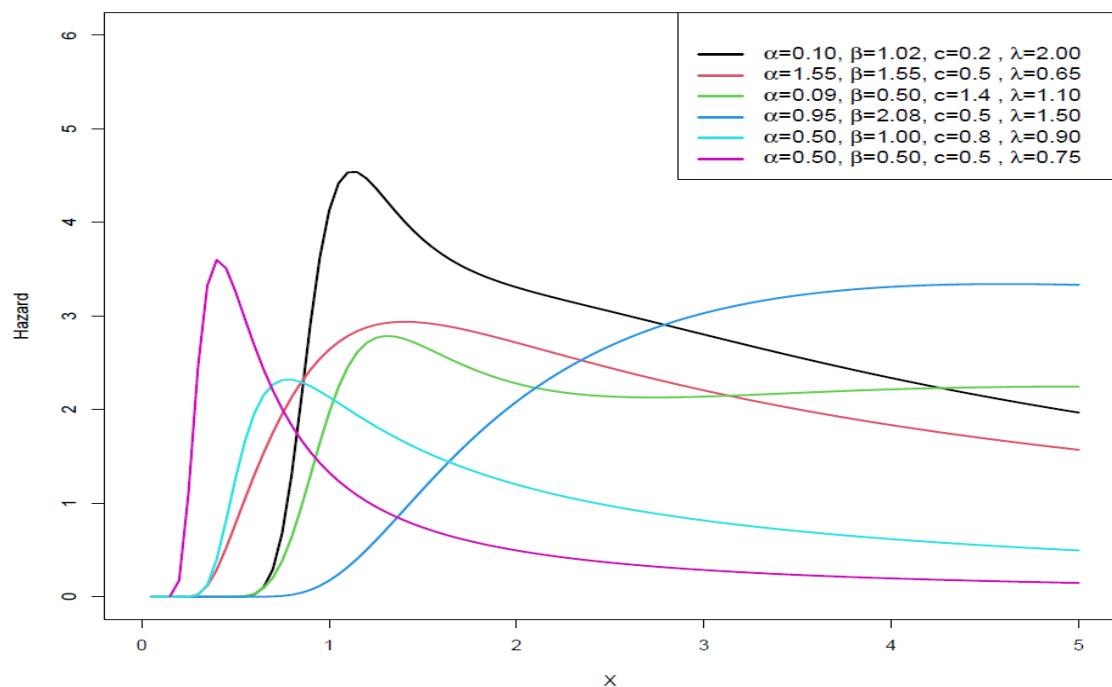


الشكل (1): بعض أشكال الدالة الاحتمالية للتوزيع MOWIR لقيم مختارة للمعلمات ($\alpha, \beta, c, \lambda$)

يتضح من الشكل رقم (1) ان دالة pdf تكون متزايدة ثم متناقصة وتمتلك نهايات عظمى فقط، وتكون متناقصة احياناً عندما تأخذ المعالم $\alpha, \beta, c, \lambda$ القيم الآتية وعلى الترتيب (0.95, 2.08, 0.5, 1.50) وتكون شبة متماثلة عندما تأخذ المعالم القيم الآتية وعلى الترتيب (0.50, 0.50, 0.5, 0.75) ويكون الوسط قريب نوعاً ما من الوسيط والمنوال وقليلة التقطح وقريبة إلى التوزيع الطبيعي. أما عند تغيير قيم المعالم إلى القيم التالية (0.10, 1.02, 0.2, 2.00) فإن التقطح يزداد وتكون ملتوية إلى اليسار. ومن الجدير بالذكر إن زيادة قيمة المعالم تزيد من قيمة المنوال.



الشكل (2): رسم دالة البقاء $S(x; \alpha, \beta, c, \lambda)$ لتوزيع MOWIR لقيم معالم مختلفة.



الشكل رقم (3) رسم دالة الخطر $h(x; \alpha, \beta, c, \lambda)$ لتوزيع MOWIR لقيم معالم مختلفة.

4. توسيع الدوال Extension Functions: في هذا القسم سيتم إعادة الصياغة بفك وتوسيع دالة التوزيع الجديد وهي مفيدة لدراسة خصائصها الاحصائية، وذلك بأخذ معادلة رقم (10) وباستخدام سلسلة ثانوي الحدين ومفكوك الصيغة الاسية نحصل على الشكل الآتي:

$$f(x) = \alpha c \beta^{-1} \sum_{j,i=0}^{\infty} \frac{2\lambda^2 x^{-3} e^{-\lambda^2 x^{-2}}}{1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}}} \frac{(-1)^i (j+1)^{1+i} (1-\alpha)^j}{i!} \left[\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta} \right]^{ci+c-1} \quad (15)$$

وباستخدام الصيغة $(a-1) \log(1-x)$ وسلسلة ثانوي الحدين مرة أخرى للمعادلة 15 نحصل على الآتي:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2\alpha c \lambda^2}{\beta^{c(i+1)} (c(i+1) + m + r)} \frac{(-1)^{i+m+t} (j+1)^{1+i} (1-\alpha)^j (c(i+1)-1)}{i! (c(i+1)-1-t)} \cdot \binom{m-c(i+1)-1}{m} \binom{m}{t} p_{t,m} \\ &\times \sum_{j,i,m=0}^{\infty} \sum_{t=0}^m \sum_{r=0}^{\infty} (c(i+1)+m \\ &\quad + r) 2\lambda^2 x^{-3} e^{-\lambda^2 x^{-2}} (e^{-\lambda^2 x^{-2}})^{c(i+1)+m+r-1} \quad (16) \end{aligned}$$

ويمكن كتابتها بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi_{j,i,m,t,r} (c(i+1)+m \\ &\quad + r) 2\lambda^2 x^{-3} e^{-\lambda^2 x^{-2}} (e^{-\lambda^2 x^{-2}})^{c(i+1)+m+r-1} \quad (17) \end{aligned}$$

حيث إن:

$$\varphi_{j,i,m,t,r} = \frac{\binom{m-c(i+1)-1}{m} \binom{m}{t} p_{t,m} (-1)^{i+m+t} (j+1)^{1+i} (1-\alpha)^j (c(i+1)-1)}{\beta^{c(i+1)} (c(i+1)+m+r) i! (c(i+1)-1-t)}$$

ويمكن تبسيط معادلة رقم (17) عدة مرات لتصبح بالشكل الآتي:

$$f(x) = \varphi_{j,i,m,t,r} 2q\lambda^2 x^{-3} e^{-q\lambda^2 x^{-2}} \quad (18)$$

حيث إن: $q = c(i+1) + m + r$

إن المعادلة (18) تعتبر من النتائج الرئيسية لهذا البحث حيث يمكن استخدامها في ايجاد العديد من الخصائص الرياضية كما سنوضح ذلك:

5. الخصائص الرياضية Mathematical Properties: في هذا القسم، يتم ايجاد بعض الخصائص الرياضية الهامة للتوزيع MOWIR وتحديداً دالة الكمية، الاحصاءات المرتبة أ. **الدالة التجزئية Quantile Function:** هي معكوس دالة التوزيع التراكمية CDF، وتعد طريقة من طرق تحديد دالة الاحتمال. وتعد ضرورية لتوليد البيانات لدراسة المحاكاة، وتعطى بالصيغة الرياضية الآتية (Gilbert Bassett et al., 2012)

$$Q(U) = F^{-1}(x), 0 < U < 1 \quad (19)$$

يمكنا إيجاد الدالة الكمية لتوزيع MOWIR المرن كالتالي، بتعويض معادلة رقم (9) في العلاقة أعلاه وباستخدام بعض العمليات الجبرية نحصل على الصيغة الآتية:

$$Q(u)_{MOWIR} = \left(-\frac{1}{\lambda^2} \ln \left[1 - e^{-\beta \left[-\ln \left(\frac{1-u}{1-u \bar{\alpha}} \right) \right]^{\frac{1}{c}}} \right] \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (20)$$

والأخرية تعد من الصيغ المهمة، لإيجاد بعض القياسات الأساسية مثل الالتواء والتقطح. لهذا تستخدم هذه المقاييس لإيجاد التوزيعات ذات الالتواء، وأيضاً لإيجاد التوزيعات التي لا يمكن إيجاد العزم الثالث والرابع لها، وتعد هذه المقاييس ذات حساسية قليلة للقيم الشاذة، قياساً بالمقاييس الأصلية. حيث يتم المحاكاة للمتغير العشوائي على وفق التوزيع المقترن MOWIR في حال إذا كان u ذات المتغير العشوائي المنتظم على الفترة (0, 1) وذلك من خلال استخدام في توليد اعداد عشوائية لدراسة محاكاة من توزيعنا الجديد MOWIR، عندما تكون جميع تلك المعالم ذات الأشكال المختلفة معلومة

$$X = \left(-\frac{1}{\lambda^2} \ln \left[1 - e^{-\beta \left[-\ln \left(\frac{1-u}{1-u \bar{\alpha}} \right) \right]^{\frac{1}{c}}} \right] \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (21)$$

على وجه الخصوص، القيم الثلاثة الأولى لدالة الكمية تمثل قيم الربعات: (Q_1, Q_2, Q_3) عن طريق وضع $u = 0.25, u = 0.5, u = 0.75$ في المعادلة أعلاه على التوالي، هذا فضلاً عن أن (21) نستطيع بواسطتها توليد قيم للمتغيرات العشوائية تتبع توزيعنا المقترن MOWIR.

بـ الاحصاءات المرتبة Order Statistics: يمكننا الحصول على الاحصاءات المرتبة ذي الرتبة s من العلاقة الآتية:

$$f_{s:n}(x) = \frac{n!}{(s-1)! (n-s)!} f(x)_{MOWIR} [F(x)_{MOWIR}]^{s-1} [1 - F(x)_{MOWIR}]^{n-s} \quad (22)$$

$$f_{s:n}(x) = \sum_{m=0}^{n-s} \binom{n-s}{m} \frac{n! (-1)^m}{(s-1)! (n-s)!} f(x)_{MOWIR} [F(x)_{MOWIR}]^{s+m-1} \quad (23)$$

وعند تعويض معادلة (9) ومعادلة (10) في معادلة (23) نحصل على الآتي:
 أي:

$$f_{s:n}(x) = \sum_{m=0}^{n-s} \binom{n-s}{m} K(-1)^m \left[\frac{1 - e^{-\left(\frac{-\log(1-e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta} \right)^c}}{1 - \bar{\alpha} e^{-\left(\frac{-\log(1-e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta} \right)^c}} \right]^{s+m-1}$$

$$\times \left[\frac{\frac{\alpha c}{\beta} \frac{2\lambda^2 x^{-3} e^{-\lambda^2 x^{-2}}}{1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}}} \left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta} \right)^{c-1} e^{-\left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta} \right)^c}}{\left[1 - (1 - \alpha) e^{-\left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta} \right)^c} \right]^2} \right] \quad (24)$$

$$K = \frac{n!}{(s-1)!(n-s)!}$$

في حال إذا كانت قيمة $s = 1$ نحصل على أصغر أحصاء مرتبة

$$f_{s:n}(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} n(-1)^m \left[\frac{1 - e^{-\left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta} \right)^c}}{1 - \bar{\alpha} e^{-\left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta} \right)^c}} \right]^m \\ \times \left[\frac{\frac{\alpha c}{\beta} \frac{2\lambda^2 x^{-3} e^{-\lambda^2 x^{-2}}}{1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}}} \left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta} \right)^{c-1} e^{-\left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta} \right)^c}}{\left[1 - (1 - \alpha) e^{-\left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta} \right)^c} \right]^2} \right] \quad (25)$$

أما في حال إذا كانت قيمة $s = n$ نحصل على أعلى قيمة

$$f_{s:n}(x) = n \left[\frac{1 - e^{-\left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta} \right)^c}}{1 - \bar{\alpha} e^{-\left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta} \right)^c}} \right]^{n+m-1} \\ \times \left[\frac{\frac{\alpha c}{\beta} \frac{2\lambda^2 x^{-3} e^{-\lambda^2 x^{-2}}}{1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}}} \left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta} \right)^{c-1} e^{-\left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta} \right)^c}}{\left[1 - (1 - \alpha) e^{-\left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x^{-2}})}{\beta} \right)^c} \right]^2} \right] \quad (26)$$

6. مقدرات الامكان الأعظم **MLE**: الطريقة الأكثر استخداماً لتقدير معلمات التوزيع هي طريقة تقدير الإمكان الأعظم (MLE). نحن نوظف لتقدير المعلمة غير المعروفة لتوزيع MOWIR.. افرض أن x_1, x_2, \dots, x_n متغيرات عشوائية تتبع التوزيع المقترن MOWIR. فإن دالة الإمكان تكتب بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \varphi) &= f(x_1; \varphi) \cdot f(x_2, \varphi) \cdots \cdot f(x_n, \varphi) \\ L(x_1, x_2, \dots, x_n; \varphi) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \varphi) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{\frac{\alpha c}{\beta} \frac{2\lambda^2 x_i^{-3} e^{-\lambda^2 x_i^{-2}}}{1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}}} \left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}})}{\beta} \right)^{c-1} e^{-\left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}})}{\beta} \right)^c}}{1 - (1 - \alpha) e^{-\left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}})}{\beta} \right)^c}} \right)^2 \end{aligned}$$

والآن بأخذ دالة اللوغاريتم للعلاقة السابقة نحصل على:

$$\begin{aligned} \log L(x_1, x_2, \dots, x_n; \varphi) &= n \log \alpha + n \log c - nc \log \beta + \sum_{i=1}^n \log(2\lambda^2 x_i^{-3} e^{-\lambda^2 x_i^{-2}}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}}) + (c-1) \sum_{i=1}^n \log(-\log(1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}})) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}})}{\beta} \right)^c \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^n \log \left[1 - \bar{\alpha} e^{-\left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}})}{\beta} \right)^c} \right] \quad (27) \end{aligned}$$

والآن نجد المشتقات الجزئية بالنسبة لكل معلمة من معلمات التوزيع وكالآتي:

$$\frac{\partial \log L(x_i; \varphi)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}})}{\beta} \right)^c}}{1 - \bar{\alpha} e^{-\left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}})}{\beta} \right)^c}} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L(x_i; \varphi)}{\partial c} = & \frac{n}{c} - n \log \beta + \sum_{i=1}^n \log \left(-\log(1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}}) \right) \\ & - \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}})}{\beta} \right) \left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}})}{\beta} \right)^c \\ & + 2\bar{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\log \left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}})}{\beta} \right) \left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}})}{\beta} \right)^c}{\bar{\alpha} - e^{\left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}})}{\beta} \right)^c}} \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L(x_i; \varphi)}{\partial \beta} = & -\frac{nc}{\beta} + \frac{c}{\beta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}})}{\beta} \right)^c \\ & + 2\bar{\alpha}c \sum_i^n \frac{\left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}})}{\beta} \right)^c}{\beta \left(e^{\left(\frac{-\log(1 - e^{-\lambda^2 x_i^{-2}})}{\beta} \right)^c} - \bar{\alpha} \right)} \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L(x_i; \varphi)}{\partial \lambda} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda^{-2} x_i^3 \left(4\lambda x_i^{-3} e^{-\left(\frac{\lambda}{x_i}\right)^2} - 4\lambda^3 x_i^{-5} e^{-\left(\frac{\lambda}{x_i}\right)^2} \right) e^{\left(\frac{\lambda}{x_i}\right)^2} \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{2\lambda}{x_i^2 \left(e^{\left(\frac{\lambda}{x_i}\right)^2} - 1 \right)} + (c-1) \sum_{i=1}^n \frac{2\lambda}{x_i^2 \left(e^{\left(\frac{\lambda}{x_i}\right)^2} - 1 \right) \log \left(1 - e^{-\left(\frac{\lambda}{x_i}\right)^2} \right)} \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{2c\lambda \left(-\frac{\log(1 - e^{-\left(\frac{\lambda}{x_i}\right)^2})}{\beta} \right)^c}{x_i^2 \left(e^{\left(\frac{\lambda}{x_i}\right)^2} - 1 \right) \log \left(1 - e^{-\left(\frac{\lambda}{x_i}\right)^2} \right)} \end{aligned}$$

$$-4 \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\alpha} c \lambda \left(-\frac{\log(1 - e^{-(\frac{\lambda}{x_i})^2})}{\beta} \right)^c}{x_i^2 \left(e^{(\frac{\lambda}{x_i})^2} - 1 \right) \left(e^{\left(-\frac{\log(1 - e^{-(\frac{\lambda}{x_i})^2})}{\beta} \right)^c} - \bar{\alpha} \right) \log\left(1 - e^{-(\frac{\lambda}{x_i})^2}\right)} \quad (31)$$

بمساواة المعادلات أعلاه بالصفر ثم محاولة حلها بالطرائق الاعتيادية يكون صعباً جداً لذا تكونت الحاجة إلى اللجوء حلها بالطرائق العددية مثل: طريقة نيوتن رافسن أو غيرها من الطرائق الأخرى التي يمكن أن تحل المعادلات باستخدام البرمجيات أو أحد البرامج المستخدمة في التقدير ونظرأً للميزات التي يقدمها برنامج R من برمجيات بسيطة وسهلة في الاستخدام اعتمدناه في تقدير معالم التوزيع MOWIR.

7. التطبيق Application: لغرض بيان قدرة التطبيق للتوزيع MOWIR، استخدمت في هذا الجزء عينة من البيانات الحقيقة بحجم 63 المتعلقة بقوه الألياف الزجاجية (1.5 سم) والتي تم الحصول عليها من قبل العاملين في المختبر الفيزيائي الوطني البريطاني. ومجموعة هذه البيانات Pragya et al (2017)

(0.55, 0.74, 0.77, 0.81, 0.84, 1.24, 0.93, 1.04, 1.11, 1.13, 1.30, 1.25, 1.27, 1.28, 1.29, 1.48, 1.36, 1.39, 1.42, 1.48, 1.51, 1.49, 1.49, 1.50, 1.50, 1.55, 1.52, 1.53, 1.54, 1.55, 1.61, 1.58, 1.59, 1.60, 1.61, 1.63, 1.61, 1.61, 1.62, 1.62, 1.67, 1.64, 1.66, 1.66, 1.66, 1.70, 1.68, 1.68, 1.69, 1.70, 1.78, 1.73, 1.76, 1.76, 1.77, 1.89, 1.81, 1.82, 1.84, 1.84, 2.00, 2.01, 2.24)

استخرجت بعض المقاييس لهذه العينة باستخدام دالة describe التي يوفرها برنامج R الإحصائي الجدول الآتي يظهر بعض الإحصاءات للعينة المدروسة.

الجدول (1): بعض الإحصاءات لبيانات الألياف الزجاج

Var.	n	Mean	S.D	Median	Min	Max	Skew	Kurtosis
	63	1.51	0.32	1.59	0.55	2.24	-0.88	0.8

من خلال الجدول أعلاه نلاحظ الآتي:

- ❖ إن قيمة التلواء سالبة، وهذا يشير إلى أن البيانات منحرفة إلى جهة اليسار أي قريبة إلى التماثل بسبب قرب قيمة التلواء إلى الصفر وهذا يعني أيضاً أن الوسط والوسيط متقاربان من حيث القيمة.
- ❖ إن قيمة التفطح موجبة أقل من 3 وهذا يعني أن البيانات مسطحة وقريبة من التوزيع الطبيعي.
- ❖ أما بالنسبة إلى قيمة التباين فيتبين أنها صغيرة وهذا يدل على أن تشتت البيانات صغيرة جداً بين أصغر قيمة وأعلى قيمة عن الوسط.

وللمقارنة بين أداء التوزيعات المذكورة تم توظيف بعض معايير حسن المطابقة المعروفة ومنها (-LL, AIC, BIC, CAIC) لإظهار أي التوزيعات أقرب وأفضل المتمثلة بالتوزيع المقترن MOWIR والتوزيعات الأخرى التي تشمل:

- ❖ *Gamma-Inverse Rayleigh(GamIR)*
- ❖ *Beta Inverse Rayleigh Distribution (BeIR)*
- ❖ *Kumaraswamy-Inverse Rayleigh Distribution (KuIR)*
- ❖ *Exponentiated Generalized Inverse Rayleigh Distribution (EGIR)*
- ❖ *Weibull Inverse Rayleigh Distribution (WeIR)*
- ❖ *Gompertz Inverse Rayleigh Distribution (GoIR)*
- ❖ *Marshal-Olkin Inverse Rayleigh Distribution (MOIR)*

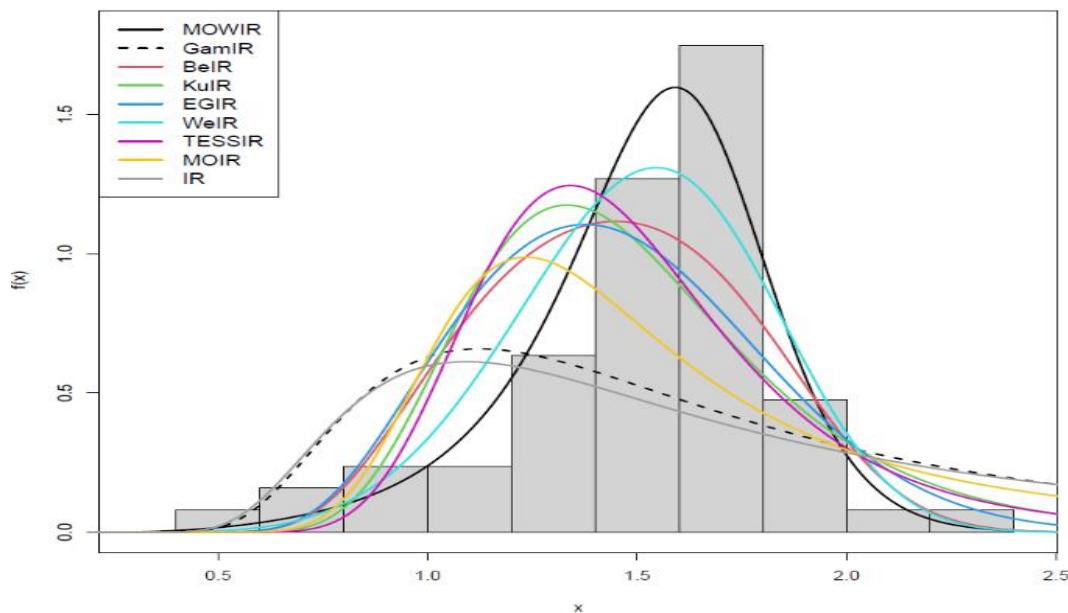
وكان النتائج على النحو الآتي:

الجدول (2): قيم تقديرات المعامل وقيم المعايير الاحصائية لبيانات الألياف الزجاجية للتوزيع مع التوزيعات المقارنة MOWIR.

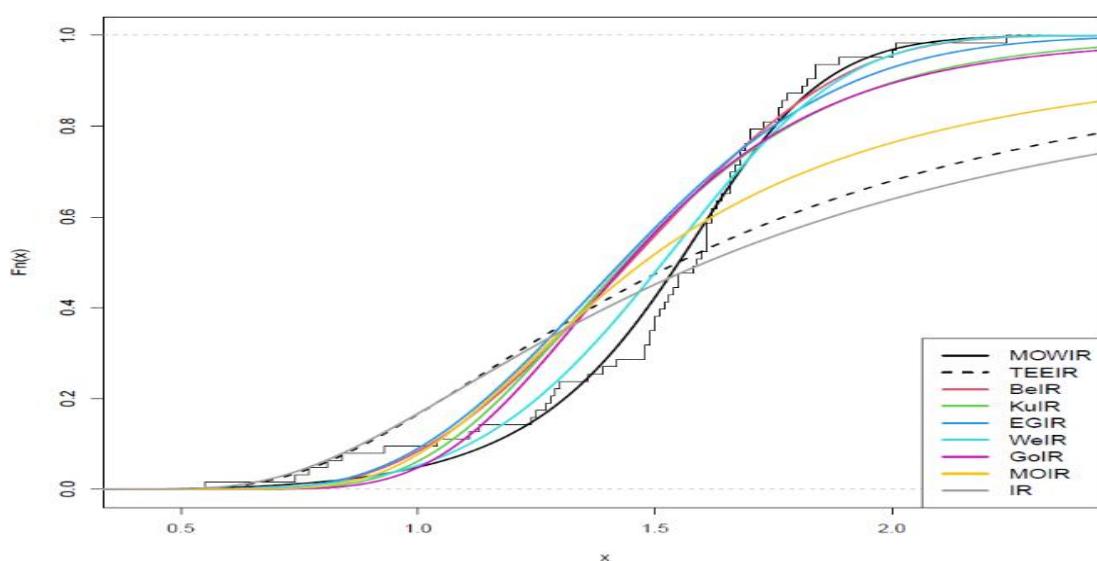
Model	Est. para	-LL	AIC	CAIC	BIC	HQIC
MOWIR	16.9 8.19 4.50 0.11	12.58	33.16	33.85	41.73	36.53
GamIR	0.28 2.59	49.79	103.59	103.79	107.88	105.28
BeIR	0.18 116.6 4.34	22.86	51.72	52.12	58.15	54.25
KuIR	1.88 5.79 1.54	33.66	73.33	73.74	79.76	75.86
EGIR	21.03 0.32 3.23	25.91	57.83	58.24	64.26	60.36
WeIR	17.98 6.42 0.06	16.72	39.45	39.86	45.88	41.98
TESSIR	8.03 2.25	36.66	77.32	77.52	81.61	79.01
MOIR	0.15 2.08	46.63	97.27	97.47	101.55	98.95
IR	1.33	54.65	111.3	111.37	113.4	112.1

من الجدول رقم (2) وبحسب القيم الظاهرة يتضح أن التوزيع المقترن MOWIR أقل نسبة خطاء في تحليل البيانات على التوزيعات الأخرى المستخدمة في المقارنة وبحسب قيم المعايير الإحصائية، يمكن الاعتماد على التوزيع المقترن MOWIR في تحليل الكثير من البيانات من هذا النوع وذلك لجودة ملائمتها، وجاء توزيع Gamma-Inverse Rayleigh في المرتبة الثانية من حيث الأفضلية في تمثيل البيانات، أما في المرتبة الثالثة Inverse Rayleigh Beta وعلى الترتيب تنازلياً كما مبين في الجدول أعلاه.

وللوضوح مرورة التوزيع المقترن فلما برسم المدرج التكراري للبيانات ومنحنيات التوزيعات عليه وكما يظهر في الشكل أدناه:



الشكل (4): المدرج والمنحنيات للتوزيع MOWIR والتوزيعات الأخرى لبيانات الألياف الزجاجية



الشكل (5): منحني الدالة التراكمية للتوزيع MOWIR والتوزيعات الأخرى لبيانات الألياف الزجاجية

8. الاستنتاجات **Conclusions**: في بحثنا هذا، قمنا باقتراح ايجاد توزيع جديد من التوزيعات المستمرة بناءً على عائلة مارشال اولكين وبيل مع توزيع معكوس رالي، وأطلق عليه تحت اسم: (Marshall-Olkin Weibull Inverse Rayleigh Distribution). يمتاز التوزيع الجديد بالمرونة العالية لتوافق أنواع مختلفة من البيانات وايجاد بعض الخصائص الرياضية والاحصائية له مثل الدالة التجزئية والاحصاءات المرتبة، حيث تم ايجاد دالة الكثافة الاحتمالية والدالة التراكمية للتوزيع المقترن وتوسيع دالة الكثافة الاحتمالية لأهميتها في ايجاد بعض الخصائص وتطبيقاتها على مجموعة من البيانات الحقيقية حيث لاحظنا أن التوزيع المقترن MOWIR يمتاز بمرونة عالية تفوق سابقيه من التوزيعات المقارنة كما أظهرت الاشكال أن دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمية للتوزيع المقترن MOWIR ملائمة وواضحة وذات فارق عالٍ لجميع البيانات المستخدمة في الدراسة مقارنة بالتوزيعات المستخدمة في المقارنة .

المصادر :References

1. Rao, G. S., & Mbwambo, S., (2019), Exponentiated inverse Rayleigh distribution and an application to coating weights of iron sheets data. *Journal of probability and statistics*, 2019.
2. Klakattawi, H., Alsulami, D., Elaali, M. A., Dey, S., & Baharith, L., (2022), A new generalized family of distributions based on combining Marshal-Olkin transformation with TX family. *PloS one*, 17(2), e0263673.
3. Rhen, T., Grissom, S., Afshari, C., & Cidlowski, J. A., (2003), Dexamethasone blocks the rapid biological effects of 17β -estradiol in the rat uterus without antagonizing its global genomic actions. *The FASEB journal*, 17(13), 1849-1870.
4. Marshall, A. W., & Olkin, I., (1997), A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika*, 84(3), 641-652.
5. Cordeiro, G. M., & Lemonte, A. J., (2013), On the Marshall–Olkin extended Weibull distribution. *Statistical papers*, 54, 333-353.
6. Nadarajah, S., Cordeiro, G. M., & Ortega, E. M., (2012), General results for the Kumaraswamy-G distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 82(7), 951-979.
7. Najarzadegan, H., Alamatsaz, M. H., & Hayati, S., (2017), Truncated Weibull-G more flexible and more reliable than beta-G distribution. *International Journal of Statistics and Probability*, 6(5), 1-17.
8. Torabi, H., & Hedesh, N. M., (2012), The gamma-uniform distribution and its applications. *kybernetika*, 48(1), 16-30.
9. Banerjee, P., & Bhunia, S., (2022), Exponential Transformed Inverse Rayleigh Distribution: Statistical Properties and Different Methods of Estimation. *Austrian Journal of Statistics*, 51(4), 60-75.
10. Bourguignon, M., Silva, R. B., & Cordeiro, G. M., (2014), The Weibull-G family of probability distributions. *Journal of data science*, 12(1), 53-68.

11. Aljarrah, M. A., Lee, C., & Famoye, F., (2014), On generating TX family of distributions using quantile functions. *Journal of Statistical Distributions and Applications*, 1, 1-17.
12. Krishna, E., Jose, K. K., Alice, T., & Ristić, M. M., (2013), The Marshall-Olkin Fréchet distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 42(22), 4091-4107.
13. Alizadeh, M., Tahir, M. H., Cordeiro, G. M., Mansoor, M., Zubair, M., & Hamedani, G., (2015), The Kumaraswamy marshal-Olkin family of distributions. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 23(3), 546-557.
14. Pogány, T. K., Saboor, A., & Provost, S., (2015), The Marshall–Olkin exponential Weibull distribution. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 44(6), 1579-1594.
15. Tomy, L., & Gillariose, J., (2018), The Marshall-Olkin IKum Distribution. *Biom Biostat Int J*, 7(1), 00186.
16. Handique, L., Chakraborty, S., & de Andrade, T. A., (2019), The exponentiated generalized Marshall–Olkin family of distribution: its properties and applications. *Annals of Data Science*, 6, 391-411.
17. Bourguignon, M., Silva, R. B., & Cordeiro, G. M., (2014), The Weibull-G family of probability distributions. *Journal of data science*, 12(1), 53-68
18. Fatima, K., Naqash, S., & Ahmad, S. P., (2018), Pak. J. Statist. 2018 Vol. 34 (5), 425-439 Exponentiated Generalized Inverse Rayleigh Distribution with Applications in Medical Sciences. *Pak. J. Statist*, 34(5), 425-439.
19. Rashwan, N. I., Nofal, Z. M., El Gebaly, Y. M., & Awad, G. M., (2021), Beta Exponentiated Inverse RAyleigh Distribution: Statistical Properties, Bayesian, and NON-Bayesian Estimation with Application.
20. Yusuf, H. O., & Bashiru, S. O., (2022), A Classical and Bayesian Estimation Techniques for Gompertz Inverse Rayleigh Distribution: Properties and Application. *Pakistan Journal of Statistics*, 38(1).