Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, Vol. 19, No. Special Issue, Part (5): 111-128
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.8

Tikrit Journal of Administrative and Economics Sciences
مجلة تكريت للعلوم الإدارية والاقتصادية
ISSN: 1813-1719 (Print)

Probability Model of Alpha Power and Failure Rate

Shahd Idris Hassan*, Muhammad Taha Ahmed
College of Computer Science and Mathematics, University of Tikrit

Keywords:
Linear Failure Rate Distribution; Maximum Likelihood Estimation; Alpha Power Family**.**

ARTICLE INFO

Article history:

Received	20 Apr. 2023
Accepted	30 Apr. 2023
Available online	30 Aug. 2023

*Corresponding author:
Shahd Idris Hassan
College of Computer Science and Mathematics, University of Tikrit

Abstract: In this paper we propose a new distribution with four parameters, called Linear Failure Rate of Alpha Power Distribution, this distribution is consists of the composition of Linear Failure Rate Distribution with Alpha Power Family, by adding the parameter of both models, so that we have a new distribution and can be used effectively in modeling survival data and reliability problems. This model has a batter feature or the probability distribution (PowLFR) it has a better feature and effectively than other distributions in the application to the real data. Statistical properties and we use the maximal likelihood to estimate parameter we derive and study some statistical properties and the proposed model; the practicability of the model is illustrated in the application on real data to show the fitting through some statistical criterion of gaudiness of fit.

Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, Vol. 19, No. Special Issue, Part (5): 111-128
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.8

نموذج احتمالي من قوى ألفا ومعدل الفشل

شهد إدريس حسن   محمد طه أحمد
كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة تكريت

المستخلص

نقدم في هذا البحث نموذجاً احتمالياً جديدا يحتوي أربعة معالم أسميناه نموذج إحتمالي من قوى ألفا ومعدل الفشل (PowLFR)، وهذا التوزيع يتكون من تركيب توزيع معدل الفشل الخطي مع عائلة قوى ألفا وذلك بإضافة معالم التوزيع الاصلي (توزيع معدل الفشل الخطي) إلى معالم عائلة قوى ألفا، نتج عن هذه العملية توزيعاً جديداً مرناً ويمكن استخدامه بفعالية في نمذجة بيانات البقاء وحل مشاكل المعولية. الهدف من اقتراح النموذج الجديد (PowLFR) أن يكون ذا مميزات جيدة يمتلك كفاءة أفضل من توزيعات أخرى في التطبيق على البيانات الحقيقية. فضلا عن ذلك تم دراسة بعض الخصائص الرياضية والإحصائية للنموذج ثم أجرينا تقدير المعالم باستخدام طريقة الإمكان الأعظم المعروفة، كما وقمنا بإجراء تطبيقاً للنموذج المقترح على بيانات حقيقية.

الكلمات المفتاحية: توزيع معدل الفشل الخطي؛ أقصى تقدير احتمال؛ عائلة ألفا باور.

1. المقدمة Introduction:

نقدم في بحثنا هذا نموذج احتمالي جديد وذلك بالاعتماد على تحويل قوى ألفا والتي استخدمت لها توزيعات فرعية وتطبيقات جيدة وكانت ناجحة. وبالاستناد إلى العائلة (Modified Alpha Power) المقترحة من قبل (Mohamed Hussein el at.) في عام (2022) حيث إننا نضيف لها توزيعاً أخر مما يزيد فرصة النجاح. إن عائلة قوى ألفا (MAP) هذه لها توزيعات فرعية وذات تطبيقات جيدة وناجحة. ومن جانب آخر فقد اخترنا توزيع معدل الفشل الخطي الذي قدمه (L. J. Bain) في عام (1974) وذلك لملائمته للنموذج وأدى دوراً ناجحاً في إنشاء النموذج الاحتمالي. إن دالة التوزيع التراكمي لعائلة قوى ألفا (MAP) تعطى بالصيغة الآتية:

$$F(x) = \frac{\beta^{G^2(x)}\alpha^{G(x)} - 1}{\alpha\beta - 1} \qquad (1)$$

$$\text{If } \alpha, \beta \geq 1, \alpha\beta \neq 1. F: \mathbb{R} \to [0,1], (\text{for } x \in \mathbb{R})$$

وتقابلها دالة الكثافة الاحتمالية لعائلة قوى ألفا (MAP) والتي تعطى بالصيغة الآتية:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha\beta - 1}\beta^{G^2(x)}\alpha^{G(x)}[\ln\alpha + 2G(x)\ln\beta]\, g(x) \qquad (2)$$

على أساس أن G(x) هي دالة التوزيع التراكمي لمعدل الفشل الخطي المقدم من قبل (A. A. Jafari, E Mahmoudi) في عام (2012) والتي تعطى بالصيغة الآتية:

$$G(x) = 1 - e^{\left(-\theta x - \frac{\gamma x^2}{2}\right)} \qquad (3)$$

$$(\text{for } x > 0, \theta, \gamma > 0)$$

أما دالة الكثافة الإحتمالية لمعدل الفشل الخطي فتعطى بالصيغة الاتية:

$$g(x) = (\theta + \gamma x)e^{\left(-\theta x - \frac{\gamma x^2}{2}\right)} \qquad (4)$$

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.8

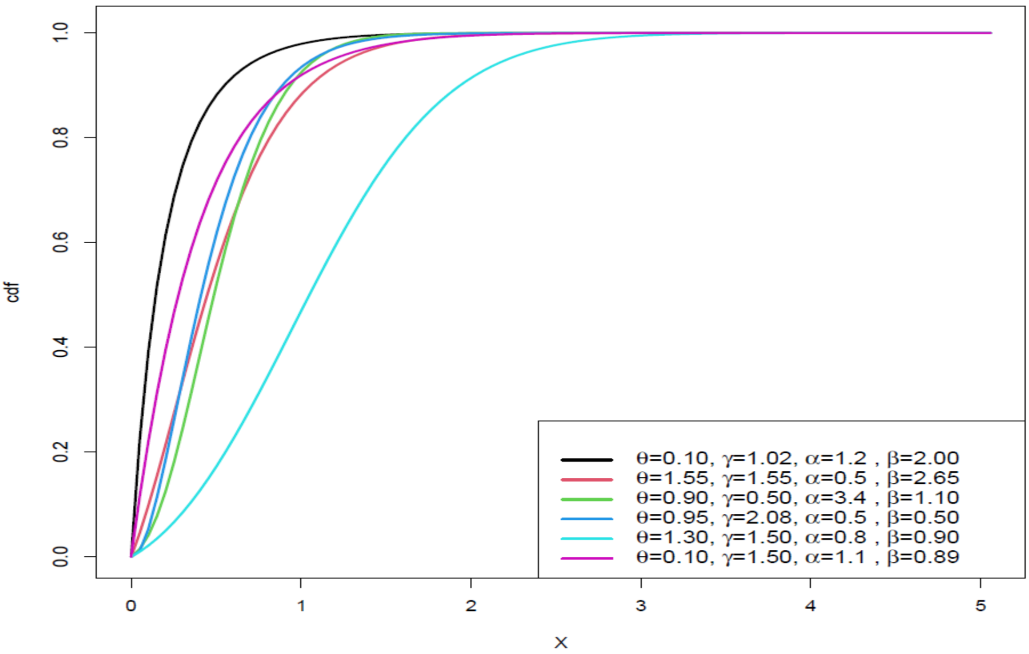
2. نموذج احتمالي من قوى ألفا ومعدل الفشل PowLFR: في هذه الفقرة نقوم بإضافة معالم توزيع معدل الفشل الخطي إلى معالم عائلة قوى ألفا مما يساعدنا في الحصول على توزيع احتمالي ذا أربعة معالم فضلا عن ذلك فأنه يحسن من جودة توثيق النموذج للبيانات الحقيقية. وللحصول على دالة التوزيع التراكمي للتوزيع المقترح نقوم بتعويض معادلة (3) في معادلة(1) وكما يأتي:

$$F(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta)=\frac{\beta^{(1-e^{(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2})})^2}\alpha^{(1-e^{(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2})})}-1}{\alpha\beta-1} \qquad (5)$$

وبتعويض المعادلتين (3) و(4) في المعادلة (2) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المقترح وكما يأتي:

$$f(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta)$$
$$=\frac{1}{\alpha\beta-1}\beta^{\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)^2}\alpha^{\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)}$$
$$\times\left[\ln\alpha+2\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)\ln\beta\right]$$
$$\times(\theta+\gamma x)e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)} \qquad (6)$$

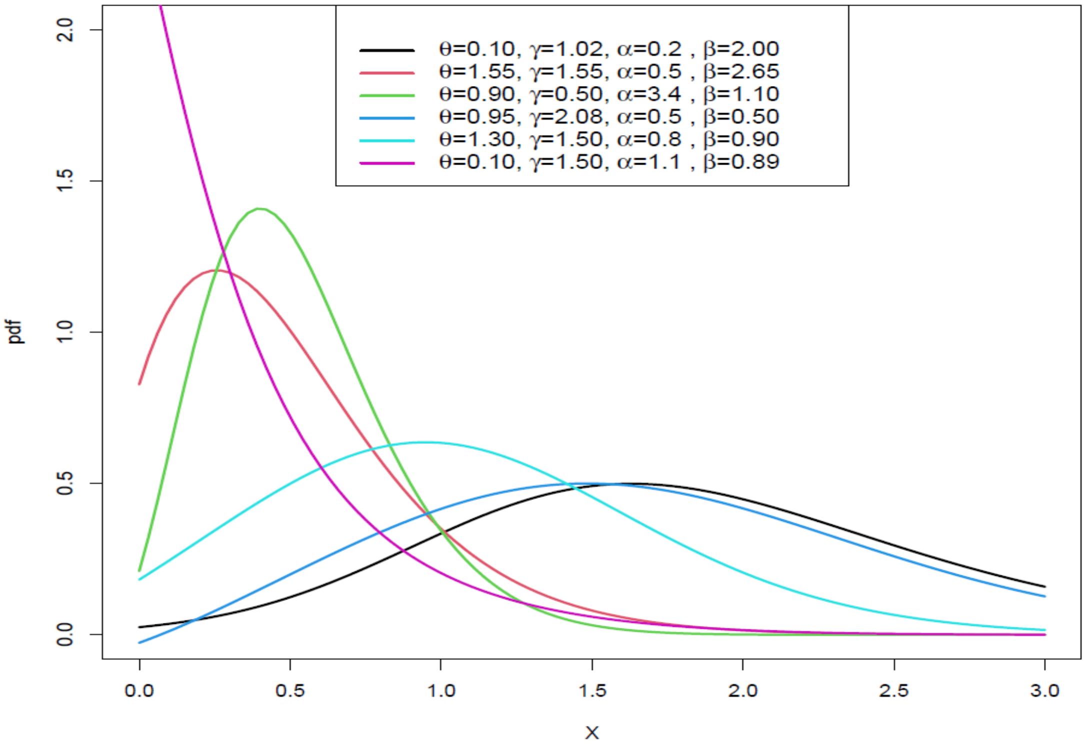
وفيما يأتي الرسم البياني لدوال التوزيع المقترحة CDF وPDF على التوالي نعرض بيان أشكال الدوال وسلوكها. في الشكل رقم (1) الرسم البياني لدالة التوزيع التراكمي للتوزيع المقترح (PowLFR) والذي نلاحظ عليه خصائص الدالة التوزيعية التراكمية حيث يبدأ المنحنى من الصفر وتتزايد مع زيادة قيم المتغير (x) حتى تصل إلى الواحد. كما في الشكل أدناه:



الشكل (1): رسم دالة التوزيع التراكمي للتوزيع المقترح (PowLFR)

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.8

من الشكل رقم (2) نلاحظ أنّ المجموعة (الأولى، الرابعة والخامسة) تكون ذات انماط متقاربة فيما بينها وتمتلك قمة واحدة، ولها إلتواء شبه معتدل وتفلطح قليل (شبه مسطح)، أما بالنسبة للمجموعة (الثانية والثالثة) فإنها تأخذ النمط ذاته مع وجود فارق قليل ويكون المنحنى ذا قمة واحدة ونلاحظ زيادة الإلتواء نحو اليمين وكثير التدبب. نلاحظ في المجموعة السادسة نمط منفرد يختلف عن المنحنيات سابقة الذكر حيث إنه يأخذ شكل الحرف L.



الشكل (2): رسم دالة الكثافة الإحتمالية للتوزيع المقترح (PowLFR)

3. دالة البقاء Survival Function: هي دالة متممة لدالة التوزيع التراكمي أي إن زيادة دالة البقاء تؤدي إلى نقصان دالة التوزيع التراكمي والعكس صحيح، ويمكن تعريفها بأنها احتمال بقاء كائن ما حياً بعد مرور بعض الوقت من(x) وتعرف رياضياً بالشكل الآتي:

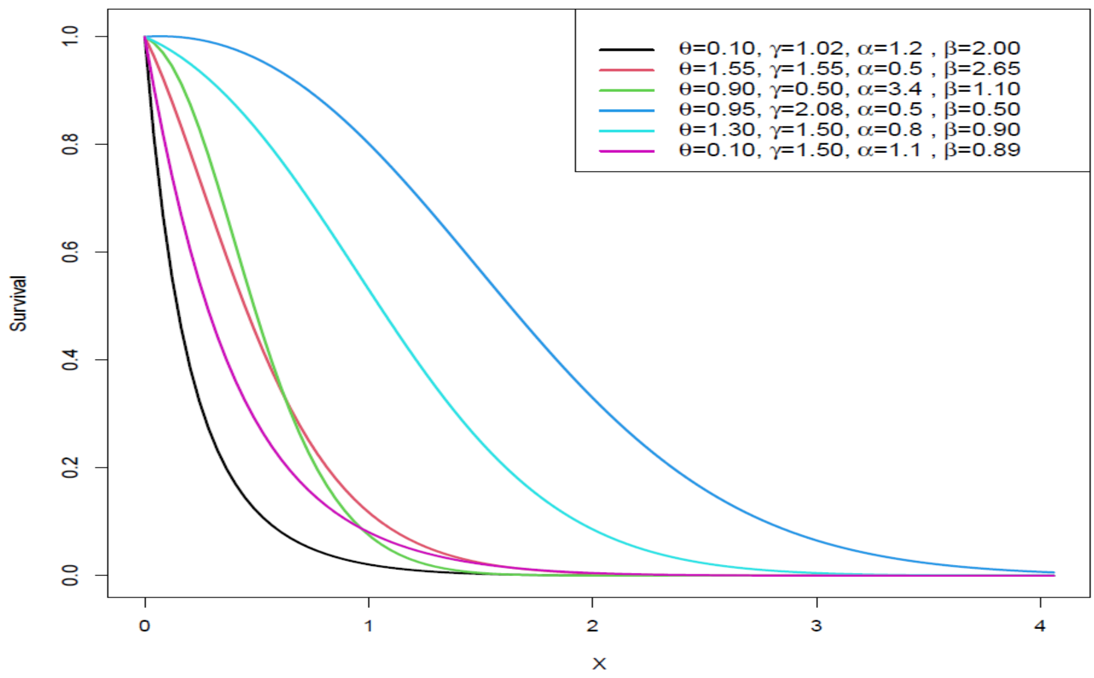
$$S(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta) = 1 - F(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta) \qquad (7)$$

وبتعويض معادلة (5) في معادلة (7) نحصل على:

$$S(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta) = 1 - \frac{\beta^{\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)^2} \alpha^{\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)} - 1}{\alpha\beta - 1} \qquad (8)$$

من الشكل رقم (3) يتبين لنا أنّ رسم دالة البقاء لمجموعات المعالم المُختارة إنّ هناك تقارب بين أنماط الدالة والفروق الموجودة ناتجة عن زيادة قيم المعالم θ, γ ونقصان في قيم α, β. كما في الشكل أدناه:

Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, Vol. 19, No. Special Issue, Part (5): 111-128
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.8



الشكل (3): رسم دالة البقاء Survival للتوزيع المقترح (PowLFR)

4. دالة الخطر Hazard Function: يمكن تعريفها بأنها احتمال موت الكائن الحي أو فشل نظام معين خلال فترة زمنية محددة، وتعطى دالة الخطر بالصيغة الآتية:

$$h(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta)=\frac{f(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta)}{S(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta)} \qquad (9)$$

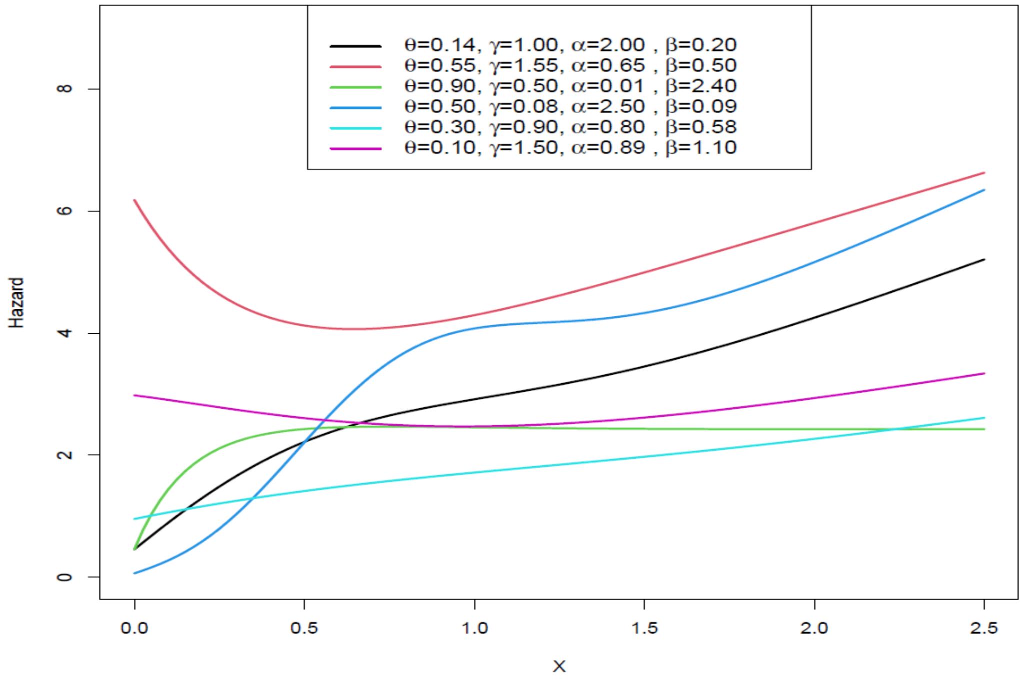
وبتعويض المعادلتين (6) و(8) في معادلة (9) نحصل على:

$$h(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta)=$$

$$\frac{\frac{1}{\alpha\beta-1}\beta^{\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)^2}\alpha^{\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)}\left[\ln\alpha+2\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)\ln\beta\right](\theta+\gamma x)e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}}{1-\frac{\beta^{\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)^2}\alpha^{\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)}-1}{\alpha\beta-1}} \qquad (10)$$

من الشكل رقم (4) نلاحظ أنّ دالة الخطر تأخذ ثلاثة أشكال منها نمط المنحنى للمجموعة (الأولى، الثالثة، الرابعة). ونمط شبيه الحوض للمجموعة الثانية، أما بالنسبة للمجموعة الخامسة فتأخذ نمط الإستقامة.

Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, Vol. 19, No. Special Issue, Part (5): 111-128
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.8



الشكل (4): رسم دالة الخطر Hazard للتوزيع المقترح (PowLFR)

5. الخصائص الإحصائية والرياضية Statistical and Mathematical Properties

5-1. سلوك الدالة Function Description: لمعرفة سلوك الدالة نأخذ الغاية لدوال التوزيع التراكمي والكثافة الاحتمالية وكما يأتي:

$$\lim_{x\to 0} F(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta) = 0 \text{ and } \lim_{x\to\infty} F(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta) = 1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta) = \frac{\theta \ln \alpha}{\alpha\beta-1} \text{ and } \lim_{x\to\infty} f(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta) = 0$$

5-2. توسيع دالة الكثافة الاحتمالية: لفك وتبسيط دالة الكثافة الاحتمالية وذلك بالاستناد على معادلة (4) في (A New Family of Continuous Distribution Properties and Estimation) المقدم من قبل (Mohamed Hussein el at) وكما يأتي:

$$f(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha\beta-1}\left[\sum_{i,j=0}^{\infty} \psi_{i,j}(\alpha,\beta)(2i+j)G^{2i+j-1}(x)\right] g(x) \qquad (11)$$

نقوم بتعويض المعادلتين (3) و(4) في المعادلة (11) نحصل على:

$$f(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha\beta-1}\left[\sum_{i,j=0}^{\infty} \psi_{i,j}(\alpha,\beta)(2i+j)\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)^{2i+j-1}\right] * (\theta+\gamma x)e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)} \qquad (12)$$

باستخدام مفكوك ذي الحدين نحصل على:

Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, Vol. 19, No. Special Issue, Part (5): 111-128
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.8

$$\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)^{2i+j-1}=\sum_{p=0}^{\infty}\binom{2i+j-1}{p}\left(e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)^{p}(-1)^{p}$$

باستخدام مفكوك الدالة الاسية نحصل على:

$$e^{\left(-\theta px-\frac{\gamma px^2}{2}\right)}=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(-\theta px-\frac{\gamma x^2}{2}\right)^{q}}{q!}$$

باستخدام مفكوك ذي الحدين نحصل على:

$$\left(-\theta px-\frac{\gamma x^2}{2}\right)^{q}=\sum_{s=0}^{\infty}\binom{q}{s}(-\theta p)^{s}\left(\frac{-\gamma p}{2}\right)^{(q-s)}x^{(2q-s)}$$

لتصبح المعادلات الثلاث السابقة بالصورة الآتية:

$$\sum_{p,q,s=0}^{\infty}\binom{2i+j-1}{p}\frac{\binom{q}{s}(-\theta p)^{s}\left(\frac{-\gamma p}{2}\right)^{q-s}}{q!}(-1)^{p}x^{(2q-s)} \qquad (13)$$

بتعويض المعادلة (13) في المعادلة (12) نحصل على:

$$f(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta)=\frac{1}{\alpha\beta-1}\left[\sum_{i,j=0}^{\infty}\psi_{i,j}(\alpha,\beta)*(2i+j)\sum_{p,q,s=0}^{\infty}\binom{2i+j-1}{p}\frac{\binom{q}{s}(-\theta p)^{s}\left(\frac{-\gamma p}{2}\right)^{q-s}}{q!}(-1)^{p}x^{(2q-s)}\right]*(\theta+\gamma x)e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)} \qquad (14)$$

باستخدام مفكوك الدالة الاسية لآخر حد في المعادلة (14)

$$e^{\left(-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}=\sum_{u=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{-\gamma}{2}\right)^{u}}{u!}x^{2u} \qquad (15)$$

بتعويض المعادلة (15) في المعادلة (14) نحصل على:

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.8

$$f(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha\beta-1}\left[\sum_{i,j=0}^{\infty}\psi_{i,j}(\alpha,\beta) * (2i+j)\sum_{p,q,s=0}^{\infty}\binom{2i+j-1}{p}\frac{\binom{q}{s}(-\theta p)^{s}\left(\frac{-\gamma p}{2}\right)^{q-s}}{q!}(-1)^{p}x^{(2q-s)}\right] * (\theta+\gamma x)e^{(-\theta x)}\sum_{u=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{-\gamma}{2}\right)^{u}}{u!}x^{2u} \quad (16)$$

$$f(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha\beta-1}\left[\sum_{i,j=0}^{\infty}\psi_{i,j}(\alpha,\beta) * (2i+j)\sum_{p,q,s,u=0}^{\infty}\varphi_{p,q,s,u}(\theta,\gamma)(\theta+\gamma x)x^{(2q-s+2u)}e^{(-\theta x)}\right]$$

حيث إن:

$$\varphi_{p,q,s,u}(\theta,\gamma) = \binom{2i+j-1}{p}\frac{\binom{q}{s}(-\theta p)^{s}\left(\frac{-\gamma p}{2}\right)^{q-s}}{q!}(-1)^{p}\frac{\left(\frac{-\gamma}{2}\right)^{u}}{u!}$$

لتصبح الصيغة النهائية لدالة الكثافة الاحتمالية بعد اجراء عملية التبسيط عليها بالشكل الآتي:

$$f(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha\beta-1}\left[\mathcal{M}_{i,j,p,q,s,u}(\theta,\gamma,\alpha,\beta)(\theta+\gamma x)x^{(2q-s+2u)}e^{(-\theta x)}\right] \quad (17)$$

حيث إنّ:

$$\mathcal{M}_{i,j,p,q,s,u}(\theta,\gamma,\alpha,\beta) = \sum_{i,j=0}^{\infty}\psi_{i,j}(\alpha,\beta)(2i+j)\sum_{p,q,s,u=0}^{\infty}\varphi_{p,q,s,u}(\theta,\gamma)$$

5-3. العزوم Moment: تعطى العزوم بالصيغة الرياضية الاتية:

$$\mu_r = E(x^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta)dx \quad (18)$$

بتعويض المعادلة (17) في المعادلة (18) نحصل على المعادلة الآتية:

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.8

$$\mu_r = \frac{1}{\alpha\beta - 1}\int_0^\infty x^r \left[\mathcal{M}_{i,j,p,q,s,u}(\theta,\gamma,\alpha,\beta)(\theta+\gamma x)x^{(2q-s+2u)}e^{(-\theta x)}\right]dx$$

بسحب الثوابت خارج عملية التكامل وبإجراء عملية التوزيع نحصل على المعادلة الآتية:

$$\mu_r = \frac{1}{\alpha\beta - 1}\mathcal{M}_{i,j,p,q,s,u}(\theta,\gamma,\alpha,\beta)\left[\theta\int_0^\infty x^{(2q-s+2u+r)}e^{(-\theta x)}dx + \gamma\int_0^\infty x^{(2q-s+2u+1+r)}e^{(-\theta x)}dx\right]$$

وعليه فإن الصيغة النهائية للعزوم من الدرجة r تكون كالآتي:

$$\mu_r = \frac{1}{\alpha\beta-1}\mathcal{M}_{i,j,p,q,s,u}(\theta,\gamma,\alpha,\beta)\left[\theta\left(\Gamma(2q-s+2u+r)\left(\frac{1}{\theta}\right)^{(2q-s+2u+r)}\right) + \gamma\left(\Gamma(2q-s+2u+1+r)\left(\frac{1}{\theta}\right)^{(2q-s+2u+1+r)}\right)\right] \quad (19)$$

من خلال المعادلة (19) يمكننا إيجاد العزم الأول μ_1 والذي يمثل المتوسط (mean) والعزم الثاني μ_2 والعزم الثالث μ_3 والعزم الرابع μ_4 على التوالي:

$$\mu_1 = \frac{1}{\alpha\beta - 1}\mathcal{M}_{i,j,p,q,s,u}(\theta,\gamma,\alpha,\beta)\left[\theta\left(\Gamma(2q-s+2u+1)\left(\frac{1}{\theta}\right)^{(2q-s+2u+1)}\right) + \gamma\left(\Gamma(2q-s+2u+2)\left(\frac{1}{\theta}\right)^{(2q-s+2u+2)}\right)\right] \quad (20)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\alpha\beta - 1}\mathcal{M}_{i,j,p,q,s,u}(\theta,\gamma,\alpha,\beta)\left[\theta\left(\Gamma(2q-s+2u+2)\left(\frac{1}{\theta}\right)^{(2q-s+2u+2)}\right) + \gamma\left(\Gamma(2q-s+2u+3)\left(\frac{1}{\theta}\right)^{(2q-s+2u+3)}\right)\right] \quad (21)$$

$$\mu_3 = \frac{1}{\alpha\beta - 1}\mathcal{M}_{i,j,p,q,s,u}(\theta,\gamma,\alpha,\beta)\left[\theta\left(\Gamma(2q-s+2u+3)\left(\frac{1}{\theta}\right)^{(2q-s+2u+3)}\right) + \gamma\left(\Gamma(2q-s+2u+4)\left(\frac{1}{\theta}\right)^{(2q-s+2u+4)}\right)\right] \quad (22)$$

$$\mu_4 = \frac{1}{\alpha\beta - 1}\mathcal{M}_{i,j,p,q,s,u}(\theta,\gamma,\alpha,\beta)\left[\theta\left(\Gamma(2q-s+2u+4)\left(\frac{1}{\theta}\right)^{(2q-s+2u+4)}\right) + \gamma\left(\Gamma(2q-s+2u+5)\left(\frac{1}{\theta}\right)^{(2q-s+2u+5)}\right)\right] \quad (23)$$

Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, Vol. 19, No. Special Issue, Part (5): 111-128
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.8

ولغرض الحصول على التباين (Variance) للتوزيع المقترح والذي يعطى بالصيغة الآتية:

$$Var(x) = E(x^2) - \left(E(x)\right)^2 \qquad (24)$$

وبتعويض المعادلتين (20) و(21) بالمعادلة (24) لنحصل على التباين للتوزيع المقترح:

$$Var(x) = \frac{1}{\alpha\beta-1}\mathcal{M}_{i,j,p,q,s,u}(\theta,\gamma,\alpha,\beta)\left[\theta\left(\Gamma(2q-s+2u+2)\left(\frac{1}{\theta}\right)^{(2q-s+2u+2)}\right)+\gamma\left(\Gamma(2q-s+2u+3)\left(\frac{1}{\theta}\right)^{(2q-s+2u+3)}\right)\right]-\left[\frac{1}{\alpha\beta-1}\mathcal{M}_{i,j,p,q,s,u}(\theta,\gamma,\alpha,\beta)\left[\theta\left(\Gamma(2q-s+2u+1)\left(\frac{1}{\theta}\right)^{(2q-s+2u+1)}\right)+\gamma\left(\Gamma(2q-s+2u+2)\left(\frac{1}{\theta}\right)^{(2q-s+2u+2)}\right)\right]\right]^2 \qquad (25)$$

4-5. الدالة المولدة للعزوم Moment Generating Function: تعطى الدالة المولدة للعزوم بالصيغة الرياضية الآتية:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x,\theta,\gamma,\alpha,\beta)dx \qquad (26)$$

باستخدام مفكوك الدالة الاسية:

$$e^{tx} = \sum_{v=0}^{\infty}\frac{t^v}{v!}x^v \qquad (27)$$

وبتعويض المعادلتين (17) و(27) في المعادلة (26) نحصل على:

$$M_x(t) = \frac{1}{\alpha\beta-1}\int_0^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{t^v}{v!}x^v\left[\mathcal{M}_{i,j,p,q,s,u}(\theta,\gamma,\alpha,\beta)(\theta+\gamma x)x^{(2q-s+2u)}e^{(-\theta x)}\right]dx$$

وبسحب الثوابت خارج عملية التكامل وباستخدام خاصية التوزيع نحصل على:

$$M_x(t) = \frac{1}{\alpha\beta-1}\Phi_v\mathcal{M}_{i,j,p,q,s,u}(\theta,\gamma,\alpha,\beta)\left[\theta\int_0^{\infty}x^{(2q-s+2u+v)}e^{(-\theta x)}dx+\gamma\int_0^{\infty}x^{(2q-s+2u+1+v)}e^{(-\theta x)}dx\right]$$

هذا وإنّ الصيغة النهائية للدالة المولدة للعزوم تكون كالآتي:

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.8

$$M_x(t) = \frac{1}{\alpha\beta - 1}\Phi_v \mathcal{M}_{i,j,p,q,s,u}(\theta,\gamma,\alpha,\beta)\left[\theta\left(\Gamma(2q - s + 2u + v)\left(\frac{1}{\theta}\right)^{(2q-s+2u+v)}\right) + \gamma\left(\Gamma(2q - s + 2u + 1 + v)\left(\frac{1}{\theta}\right)^{(2q-s+2u+1+v)}\right)\right]$$

حيث إنّ:

$$\Phi_v = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!}$$

5-5. تقدير المعلمات Parameter Estimation

نتناول في هذه الفقرة تقدير المعلمات لتوزيع (PowLFR) وذلك باستخدام طريقة الإمكان الأعظم وكما يأتي:

$$L(\theta,\gamma,\alpha,\beta;x) = \prod_{i=1}^{n} f(x;\theta,\gamma,\alpha,\beta) \qquad (28)$$

يمكن كتابة دالة الكثافة الاحتمالية بالصيغة الآتية:

$$f(x;\theta,\gamma,\alpha,\beta) = e^{-\ln(\alpha\beta-1)} e^{\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)^2 \ln\beta} e^{\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)\ln\alpha} * e^{\ln\left[\ln\alpha+2\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)\ln\beta\right]} e^{\ln(\theta+\gamma x)} e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}$$

$$f(x;\theta,\gamma,\alpha,\beta) = e^{-\ln(\alpha\beta-1)+\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)^2 \ln\beta+\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)\ln\alpha} * e^{\ln\left[\ln\alpha+2\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)\ln\beta\right]+\ln(\theta+\gamma x)+\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)} \qquad (29)$$

بتعويض المعادلة (29) في المعادلة (28) نحصل على:

Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, Vol. 19, No. Special Issue, Part (5): 111-128
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.8

$$L(\theta,\gamma,\alpha,\beta;x) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\ln(\alpha\beta-1)+\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)^2 \ln\beta+\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)\ln\alpha} * e^{\ln\left[\ln\alpha+2\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)\ln\beta\right]+\ln(\theta+\gamma x)+\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}$$

$$L(\theta,\gamma,\alpha,\beta;x) = e^{\sum_{i=1}^{n}-\ln(\alpha\beta-1)+\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)^2 \ln\beta+\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)\ln\alpha} * e^{\sum_{i=1}^{n}\ln\left[\ln\alpha+2\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)\ln\beta\right]+\ln(\theta+\gamma x)+\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}$$

بإخذ ln للطرفين:

$$\ln L(\theta,\gamma,\alpha,\beta;x) = -n\ln(\alpha\beta-1) + \ln\beta\sum_{i=1}^{n}\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)^2 + \ln\alpha\sum_{i=1}^{n}\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln\left[\ln\alpha+2\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)\ln\beta\right] + \sum_{i=1}^{n}\ln(\theta+\gamma x)+\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)$$

بإخذ المشتقة الجزئية لدالة Likelihood كل معلمة على حدة وكما يأتي:

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.8

$$\frac{\partial \ln L(\theta,\gamma,\alpha,\beta;x)}{\partial\theta} = 2\ln\beta\sum_{i=1}^{n} xe^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)} + \ln\alpha\sum_{i=1}^{n} xe^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)} + 2\ln\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{xe^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}}{\left[\ln\alpha+2\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)\ln\beta\right]} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\theta+\gamma x)}-\theta$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta,\gamma,\alpha,\beta;x)}{\partial\gamma} = \ln\beta\sum_{i=1}^{n} x^2e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)} + \frac{\ln\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n} x^2e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)} + \ln\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{x^2e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}}{\left[\ln\alpha+2\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)\ln\beta\right]} + \sum_{i=1}^{n}\frac{x}{(\theta+\gamma x)}-\frac{1}{2}x^2$$

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.8

$$\frac{\partial \ln L(\theta,\gamma,\alpha,\beta;x)}{\partial\alpha} = \frac{-n\beta}{\alpha\beta-1} + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right) + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\frac{x^2 e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}}{\left[\ln\alpha + 2\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)\ln\beta\right]}$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta,\gamma,\alpha,\beta;x)}{\partial\beta} = \frac{-n\alpha}{\alpha\beta-1} + \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)^2 + \frac{2}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)}{\left[\ln\alpha + 2\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)\ln\beta\right]}$$

6. التطبيق Application: في هذه الفقرة نقوم بمقارنة توزيع PowLFR مع توزيعات أخرى تم دراستها سابقاً في بحوث أخرى، والغرض من المقارنة هو لتوضيح مدى مرونة التوزيع الذي اقترحناه مقارنةً بالتوزيعات الاخرى وهي توزيع بيتا لمعدل الفشل الخطي، التوزيع الأسي لمعدل الفشل الخطي المعمم، وتوزيع بيتا الأسي لمعدل الفشل الخطي. في بحثنا هذا سنكتفي بذكر دالة التوزيع التراكمي ودالة الكثافة الاحتمالية لكل توزيع، وعليه فإنّ التوزيعات المُقارنة هي:

توزيع بيتا لمعدل الفشل الخطي (BeLFR): حيث إنّ دوال CDF وPDF لتوزيع (BeLFR) المقدمة من قبل (A. A. Jafari, E. Mahmoudi) في عام (2012) تعطى بالصيغ الأتية:

$$F(x) = B\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)$$

$$f(x) = \frac{(\theta+\gamma x)}{B(\alpha,\beta)}\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)^{\alpha-1} e^{\left(-\theta\beta x-\frac{\gamma\beta}{2}x^2\right)}$$

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.8

التوزيع الأسي لمعدل الفشل الخطي المعمم (EGLFR): حيث إنّ دوال CDF وPDF لتوزيع (EGLFR) المقدمة من قبل (M. A. El-Damcese, M. Abdelfattah el at.) في عام (2015) تعطى بالصيغ الأتية:

$$F(x)=\left[1-e^{-\alpha\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right]^{\beta}, x>0, \theta,\gamma,\alpha,\beta>0$$

$$f(x)=\alpha\beta(\theta+\gamma x)e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}e^{-\alpha\left(e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}-1\right)}\left[1-e^{-\alpha\left(e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}-1\right)}\right]^{\beta-1}$$

توزيع بيتا الأسي لمعدل الفشل الخطي (BeELFR): حيث إنّ دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (BeELFR) المقدم من قبل (Robert L. Wolpert) تعطى بالصيغة الآتية:

$$f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)^{\alpha-1}\left(1-\left(1-e^{\left(-\theta x-\frac{\gamma x^2}{2}\right)}\right)\right)^{\beta-1}$$

قمنا باستخدام برنامج R وذلك لحساب قيم المعلمات المقدرة للتوزيع الجديد (PowLFR) وذلك باستخدام طريقة MLE وإحصائية اختبار Kolmogorov-Smirnov (K-S) وإنّ أهم المقاييس الإحصائية التي تستخدم في المقارنة بين التوزيعات المذكورة أعلاه مع التوزيع الجديد هي (AIC)، (BIC)، (CAIC)، (HQIC) وتشير أصغر القيم لهذه المقاييس الإحصائية (AIC)، (BIC)، (CAIC)، (HQIC) الى إنّ التوزيع الجديد (LFRAP) ذا بيانات حقيقية أفضل من البيانات الحقيقية للتوزيعات المُقارنة مع توزيعنا.

.7 البيانات الحقيقية The Real Data: تمثل هذه البيانات المقدمة من قبل (Haitham M. Yousof el at.) في عام (2017) أوقات الفشل ل 50 جهاز، فضلا عن ذلك فإنّ هذه البيانات توضح لنا إنّ توزيع PowLFR يمكن أن يكون أفضل نموذج مقارنةً مع العديد من التوزيعات من بينها توزيع بيتا لمعدل الفشل الخطي BeLFR، التوزيع الأسي لمعدل الفشل الخطي ELFR وتوزيع بيتا الأسي لمعدل الفشل الخطي BeELFR

0.4365, 0.4260, 0.5140, 0.6907, 0.7471, 0.2605, 0.6196, 0.8781, 0.4990, 0.6058, 0.6891, 0.5770, 0.5394, 0.1479, 0.2356, 0.6012, 0.1525, 0.5483, 0.4800, 0.5707, 0.7131, 0.5853, 0.6768, 0.5350, 0.3323, 0.0671, 0.2361, 0.4151, 0.6789, 0.4576, 0.3259, 0.2303, 0.7687, 0.4371, 0.3383, 0.6114, 0.1131, 0.5481, 0.5744, 0.5912, 0.4823, 0.3406, 0.7804, 0.4564, 0.3480, 0.1167, 0.3175, 0.3134, 0.4752, 0.3891, 0.5529, 0.4530, 0.0168, 0.7290, 0.4553, 0.3945, 0.5150, 0.0776, 0.5627, 0.4143, 0.5447, 0.5113, 0.6750, 0.3906, 0.3627, 0.8147, 0.8492, 0.0650, 0.6465, 0.5232, 0.5285, 0.4470, 0.6844, 0.4675, 0.5629, 0.6220, 0.6707, 0.2160, 0.3188, 0.4612, 0.4438, 0.0854, 0.3821, 0.4694, 0.3635, 0.4111, 0.5349, 0.3751, 0.4332, 0.3413,

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.8

0.1546, 0.4517, 0.2681, 0.4049, 0.5553, 0.5878, 0.4741, 0.3598, 0.7629, 0.5941, 0.6174, 0.6860, 0.0609, 0.6488, 0.2747

الجدول (1): نتائج ملائمة مجموعة البيانات الحقيقية مع التوزيع المقترح (PowLFR) والتوزيعات المقارنة معه

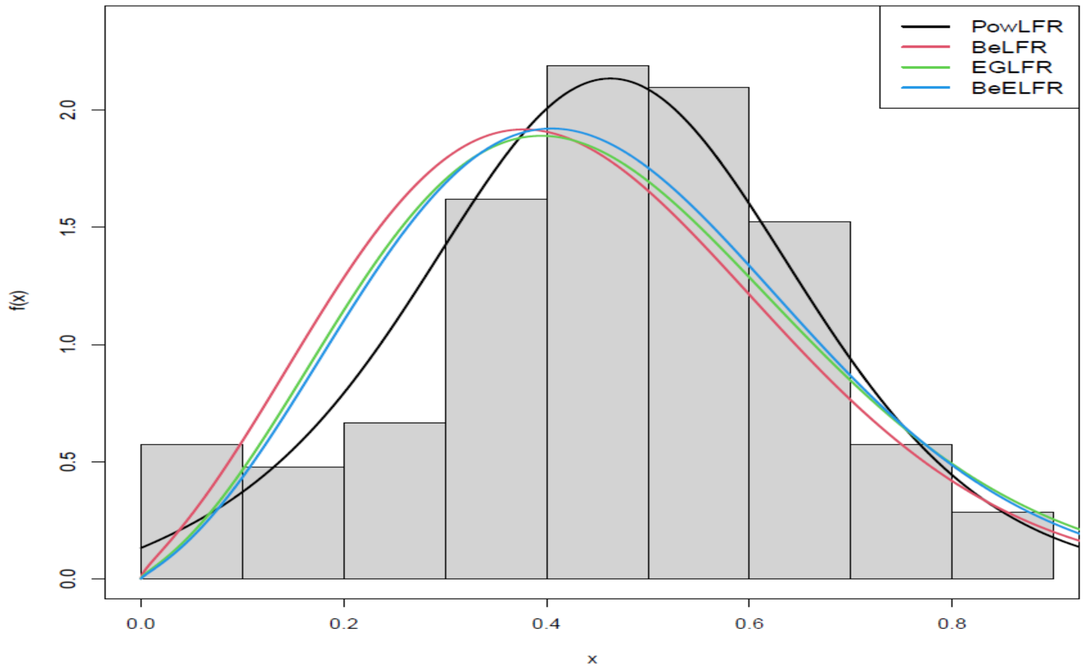
Distribution	AIC	CAIC	BIC	HQIC	MLE	K-S	P-Value
PowLFR	-44.71	-44.31	-34.09	-40.41	-26.35	0.055	0.905
BeLFR	-33.43	-33.03	-22.82	-29.13	-20.71	0.103	0.210
EGLFR	-31.61	-31.21	-20.99	-27.31	-19.80	0.110	0.156
BeELFR	-31.46	-30.86	-18.19	-26.09	-20.73	0.129	0.059

عند ملاحظة القيم في الجدول رقم (1) يتبين لنا إنّ التوزيع المقترح (PowLFR) قد تفوق على التوزيعات الأخرى المقارنة معه لأنّه يحتوي على أدنى القيم للمقاييس الإحصائية (AIC)، (BIC)، (CAIC)، (HQIC)، ويعرض تمثيلاً دقيقاً لبيانات المحركات.

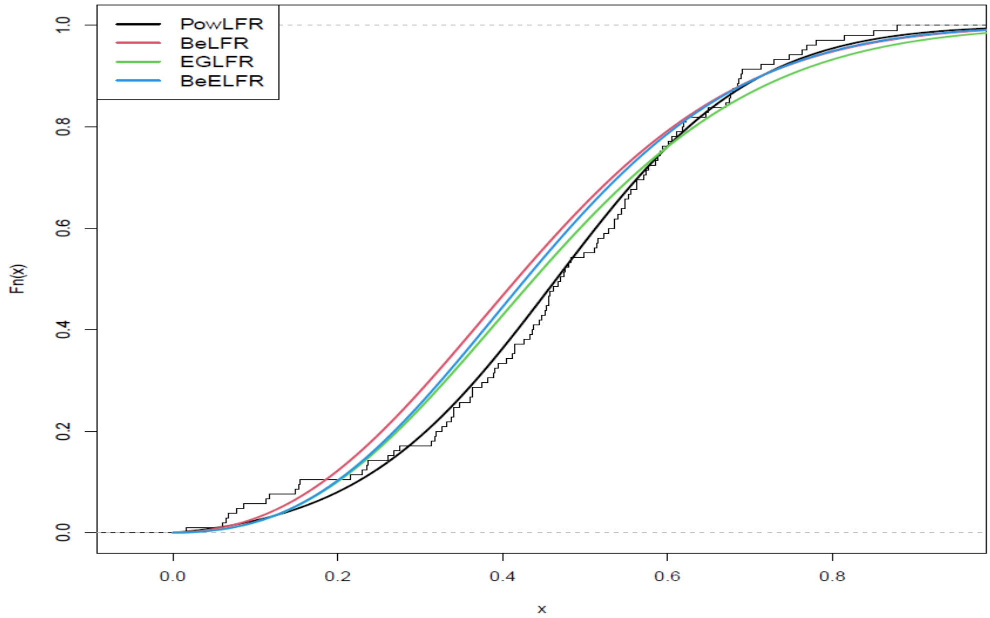
الجدول (2): قيم المعالم المقدرة للتوزيعات لمجموعة البيانات الحقيقية

Distributions	Estimation Parameters				
	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\delta}$
PowLFR	4.908	2.517	0.941	11.37	
BeLFR	1.742	8.075	0.108	1.239	
EGLFR	1.561	1.620	0.340	5.492	
BeELFR	1.752	12.22	1.061	0.068	0.787

ولكي نبين إنّ التوزيع المقترح (PowLFR) ذا مرونة ونموذج أفضل من التوزيعات المقارنة قمنا برسم المدرج التكراري للبيانات في الشكل رقم (5) ومن خلاله نلاحظ إنّ التوزيع المقترح أكثر تطابق مع البيانات مقارنةً بالتوزيعات الأخرى. أما بالنسبة للشكل رقم (6) فقد قمنا برسم الدالة التجريبية التجميعية والدالة التوزيعية التراكمية للتوزيع المقترح (PowLFR) والتوزيعات المقارنة معه.



الشكل (5): المدرج التكراري والمنحنيات لتوزيع (PowLFR) والتوزيعات المقارنة لمجموعة البيانات الحقيقية



الشكل (6): منحنيات دوال CDF لتوزيع (PowLFR) والتوزيعات المقارنة معه

8. الإستنتاجات Conclusions: قدمنا في بحثنا هذا نموذجاً إحتمالياً جديداً لإربعة معلمات PowLFR، وقمنا بدراسة دوال CDF وPDF ودالتي الخطر والبقاء فضلا عن التعرف على خصائصه الرياضية والإحصائية، كما وقمنا بإجراء تطبيقاً على النموذج الاحتمالي المقترح، وجدنا أن النموذج ناجح بجانبيه النظري والتطبيقي وقد تفوق على التوزيعات المقارنة معه.

9. التوصية: نظراً لنجاح النموذج الاحتمالي من قوى ألفا ومعدل الفشل بجانبيه النظري والتطبيقي ونتيجةً لتفوقه على التوزيعات المقارنة معه فإننا نوصي باستخدامه.

Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, Vol. 19, No. Special Issue, Part (5): 111-128
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.8

المصادر

1. M. Hussein, H. Elsayed and G. M. Cordeiro, a New Family of Continuous Distribution: Properties and Estimation. Symmetry 20222, 14, 276.
2. A. A. Jafari, E. Mahmoudi* Beta-Linear Failure Rate Distribution and its Applications.
3. M. A. El-Damcese, M. Abdelfattah, B. S. El-Desouky and M. E. Mustafa, The Odd Generalized Exponential Linear Failure Rate Distribution arXiv preprint arXiv,1510.06395, 2015.
4. Haitham M. Yousof, Morad Alizadeh, S. M. A. Jahanshahi, Thiago G. Ramires Indranil Ghosh and G.G. Hamedani, The Transmuted Topp-Leone G Family of Distribution: Theory, Charactezations and Applications.