



**Tikrit Journal of Administrative
and Economics Sciences**
مجلة تكريت للعلوم الإدارية والاقتصادية

ISSN: 1813-1719 (Print)



OJCAEE Distribution Statistical Properties with Application

Ehab R. Hassan*^A, Qasim N. Hussein^A, Mundher A. Khaleel^B

^A College of Education for pure Science, Tikrit University

^B College of Computer Science and Mathematics, Tikrit University

Keywords:

Exponented exponential distribution,
Odd JCA-G family, Moments, Hazard
function, Statistical properties.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 20 Apr. 2023

Accepted 30 Apr. 2023

Available online 30 Aug. 2023

©2023 College of Administration and Economy, Tikrit University. THIS IS AN OPEN ACCESS ARTICLE UNDER THE CC BY LICENSE

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



***Corresponding author:**

Ehab R. Hassan

College of Education for pure Science,
Tikrit University



Abstract: This study presented a new continuous distribution (Odd JCA Exponented Exponential Distribution) where this new distribution is an expansion of the Exponential distribution raised. Some mathematical and statistical properties of this distribution were studied, such as the function of danger, moments, mean, variance, the function that generates moments and goals, arranged statistics, some shapes, and the expansion of the probability density function that is used to find many properties. To demonstrate the flexibility of the new distribution, it was applied to a set of real data representing (66) plasma concentrations. for indomethacin. The proposed distribution was compared with eight other distributions, as it proved a high suitability for the data based on informatics standards (AIC, BIC, LL, CAIC, HQIC, A, W, PV, KS).

توزيع Odd JCA الاسي المرفوع خصائص احصائية مع تطبيق

ايهاب رشاد حسن قاسم ناصر حسين منذر عبدالله خليل
كلية التربية للعلوم الصرفة كلية التربية للعلوم الصرفة كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة تكريت جامعة تكريت جامعة تكريت

المستخلص

في هذه الدراسة تم تقديم توزيعاً مستمراً جديداً باسم (توزيع Odd JCA الاسي المرفوع) حيث يعد هذا التوزيع الجديد توسيعاً للتوزيع الاسي المرفوع. تم دراسة بعض الخصائص الرياضية والاحصائية لهذا التوزيع كدالة الخطر والعزوم والوسط والتباين والدالة المولدة للعزوم والغاية والاحصاءات المرتبة وبعض الأشكال وتوسيع دالة الكثافة الاحتمالية التي تستخدم لإيجاد الكثير من الخصائص. ولبيان مرونة التوزيع الجديد تم تطبيقه على مجموعة من البيانات الحقيقية تمثل (66) من تركيزات البلازما للاندوميثاسين. وتم مقارنة التوزيع المقترح مع ثمان توزيعات اخرى حيث اثبت ملائمة عالية للبيانات بالاعتماد على معايير المعلوماتية (AIC, BIC, LL, CAIC, HQIC,). (A, W, PV, KS

الكلمات المفتاحية: التوزيع الاسي المرفوع، عائلة Odd JCA-G، العزوم، دالة الخطر، الخصائص الاحصائية.

1. المقدمة

تعد التوزيعات الاحتمالية المعروفة ذات أهمية كبيرة في حياة الانسان، وكثيراً ما يتم تطبيق هذه التوزيعات لوصف ظواهر العالم الحقيقي. لذلك انصب اهتمام الكثير من الاحصائيين إلى البحث عن عوائل جديدة لها خصائص رياضية حيث تضم هذه العوائل الكثير من التوزيعات تحت خيمتها والتي يمكن الاستفادة منها لنمذجة ووصف الكثير من البيانات الحقيقية. أظهرت الكثير من التوزيعات ضعف في وصف كل البيانات الحقيقية وخواصها مما شجع الباحثين على ايجاد توزيعات جديدة تمتلك مرونة عالية لوصف جميع البيانات الحقيقية.

تهدف الدراسة الحالية إلى ايجاد توزيع مستمر جديد يسمى Odd JCA Exponented Exponential Distribution (OJCAEE)، الذي تم الحصول عليه من تركيب التوزيع الاسي المرفوع على العائلة Odd JCA-G، حيث تم اشتقاق ودراسة بعض الخصائص الاحصائية لهذا التوزيع. تم تقسيم هذا البحث على اجزاء عدة وهي: المقدمة، والدراسات السابقة، العائلة المولدة، كيفية توليد التوزيع المقترح، توسيع دالة PDF، الخصائص الرياضية، التطبيق، الاستنتاجات.

2. **الدراسات السابقة:** في السنوات الاخيرة تمكن الباحثين من تقديم الكثير من العوائل الاحصائية والتي تم الاستفادة منها لتوليد الكثير من التوزيعات الاحصائية التي تملك مرونة عالية لنمذجة الكثير من البيانات الحقيقية. ومن هذه العوائل عائلة Beta-G المقدمة من قبل الباحثين (Eugene et al., 2002) وعائلة Kumaraswamy-G المقترحة من قبل (Cordeiro and Castro, 2011) وعائلة Weibull-G المشتقة من قبل الباحثين T-X للباحثين (Alzaatreh et al., 2014) وعائلة Gompertz-G للباحثين (Alizadeh et al., 2017) وعائلة Marshall Olkin Apha Power من قبل الباحثين (Nasser et al., 2019) وعائلة Odd Marshall Olkin Burr-R للباحثين (AL-Babtain et al., 2021) واخيراً نذكر عائلة Odd

JCA-G المقترحة من الباحثين Iqbal et al., (2023). أما التوزيع الاسي المعمم استخدم مع الكثير من العوائل لإيجاد توزيعات جديدة أو تعميم للتوزيعات حيث قدم الباحثون Oguntunde et al., (2015) توزيع جديد يسمى The Transmuted Inverse Exponential Distribution. وتم دراسة هذا التوزيع وإيجاد أهم الصفات الاحصائية له كالعزوم والدالة المولدة للعزوم والانتروبي وغيرها من الصفات الأخرى، اشتق الباحثون Maxwell et al., (2018) توزيع جديد يسمى The Gompertz Length Biased Exponential Distribution وتم استخراج دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع الاحتمالي لهذا التوزيع وإيجاد أهم الخصائص الاحصائية، قام الباحثان Afify and Abdo, (2020) بإيجاد توزيعاً اسياً جديداً مكون من ثلاث معلمات يسمى Extended Odd Weibull Exponential Distribution، فيما قدم الباحث Basheer, (2022) توزيع اسى جديد بعنوان Marshall Olkain Alpha Power Inverse Exponential Distribution (MOAPIE).

3. التوزيع الجديد (OJCAEE): في هذا القسم من البحث، سنقوم بشرح تفصيلي عن آلية الحصول على التوزيع الجديد (OJCAEE) ذو المعالم الثلاثة حيث سيتم إيجاد دالة التوزيع التراكمي ودالة الكثافة الاحتمالية ودالة الخطر وبعض دوال التوزيع الجديد. للتوزيع الاسي المرفوع دالة توزيع تراكمي CDF ودالة كثافة احتمالية PDF على التوالي وكالاتي Gupta and Kundu, 2001:

$$G(x, \Omega, \alpha) = (1 - e^{-\Omega x})^\alpha, \quad x \geq 0, \Omega, \alpha > 0 \quad (1)$$

$$g(x, \Omega, \alpha) = \alpha \Omega e^{-\Omega x} (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha-1} \quad (2)$$

حيث إن α, Ω معالم شكل وقياس للتوزيع الاسي المرفوع

وكذلك تعطى دوال CDF, PDF لعائلة Odd JCA-G وكالاتي:

$$F(x, \theta, \beta) = 1 - e^{-G(x; \beta)[1 - G(x; \beta)]^{\theta-1}} \quad \theta < 1, x > 0 \quad (3)$$

$$f(x, \theta, \beta) = g(x, \beta)[1 - \theta G(x; \beta)][1 - G(x, \beta)]^{\theta-2} \quad (4)$$

$$* e^{-G(x; \beta)[1 - G(x; \beta)]^{\theta-1}}$$

الآن نعوض معادلة (1) و (2) في معادلة (3) و (4) نحصل على التوزيع المقترح

OJCAEE وبدالتى CDF, PDF على التوالي:

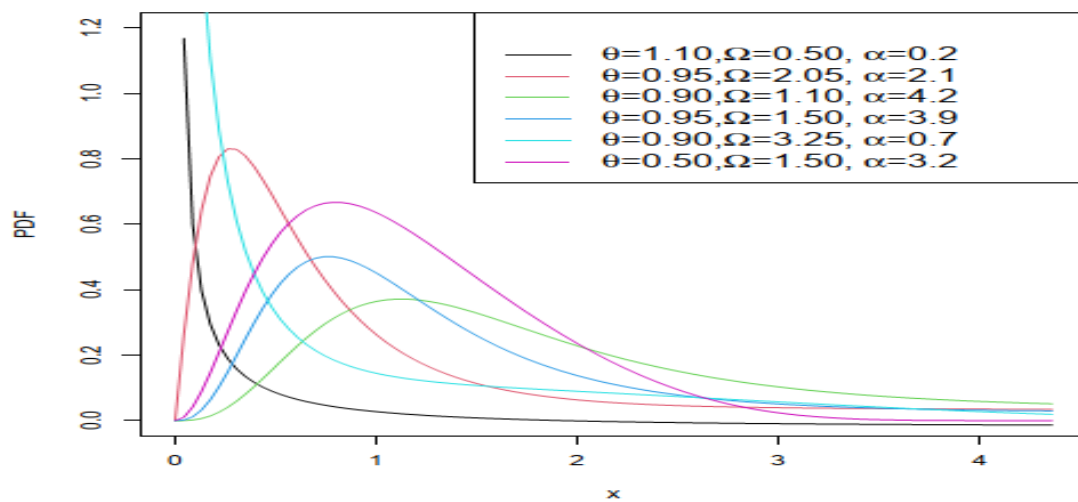
$$F(x, \theta, \Omega, \alpha)_{OJCAEE} = 1 - e^{-(1 - e^{-\Omega x})^\alpha [1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1}} \quad (5)$$

حيث $x > 0, \theta, \Omega, \alpha > 0$

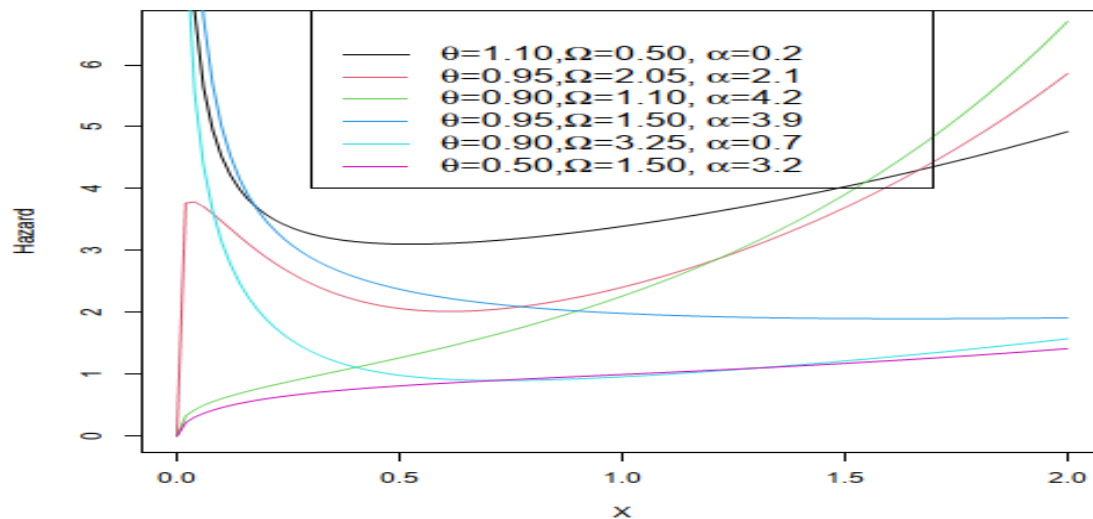
$$f(x, \theta, \Omega, \alpha)_{OJCAEE} = \alpha \Omega e^{-\Omega x} (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha-1} [1 - \theta(1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-2} \\ * [1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha] e^{-(1-e^{-\Omega x})^\alpha} [1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1} \quad (6)$$

الآن نجد دالة الخطر (hazard function) للتوزيع المقترح OJCAEE كالآتي:

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \\ = \alpha \Omega e^{-\mu x} (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha-1} [1 - \theta(1 - e^{-\Omega x})^\alpha] [1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-2} \quad (7)$$



الشكل (1): رسم دالة pdf لقيم مختلفة لمعالم التوزيع



الشكل (2): رسم دالة hf لقيم مختلفة لمعالم التوزيع

4. توسيع دالة PDF للتوزيع OJCAEE: في هذه الفقرة تم توسيع دالة PDF للتوزيع المقترح OJCAEE باستخدام معادلة (6) للاستفادة منها في دراسة الخصائص الاحصائية. حيث يتم التوسيع عن طريق استخدام المفكوك الاسي ومفكوك متسلسلة ذات الحدين وبالتكرار لأكثر من مرة حتى نتوصل إلى المعادلة:

$$f(x, \theta, \Omega, \alpha)_{OJCAEE} = M_{k,l,s,n,z} e^{-\Omega x(z+1)} \quad (8)$$

حيث تمثل $M_{k,l,s,n,z}$ الآتي:

$$= M_{k,l,s,n,z} \sum_{k,l,s,n,z=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1+l+s+n+z} \binom{k\alpha-k}{l} \binom{\theta-2}{s} \binom{1}{n} \binom{\alpha-1+\alpha k+\alpha l+\alpha s+\alpha n}{z} \theta^n \alpha \Omega}{k!} \quad (9)$$

5. الخصائص الرياضية **Mathematical Properties**: سنقوم بإيجاد بعض الخصائص الاحصائية للتوزيع OJCAEE، وتحديد العزوم والوسط والتباين والدالة المولدة للعزوم والغاية والاحصاءات المرتبة وكالاتي:

أ. **الدالة التجزئية**: تعد الدالة التجزئية إحدى الطرق التي تستخدم لتحديد دالة الاحتمال. وتعد هذه الدالة مهمة لتوليد البيانات التي تستخدم بدراسة المحاكاة. والتي يمكننا الحصول عليها من معكوس دالة CDF كما في الصيغة الرياضية الآتية (Al-Babtain et al., 2021):

$$Q(u) = F^{-1}(x) \quad (10)$$

حيث إن $0 < u < 1$ للحصول على الدالة التجزئية للتوزيع OJCAEE، فإننا نقوم بتعويض معادلة (1) في معادلة (10) وكالاتي:

$$-\frac{\text{Ln} \left(1 - \left[-\frac{\text{Ln}(1-u)}{[1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1}} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right)}{\alpha} \quad (11)$$

حيث يمكن استخدام معادلة (11) لإيجاد الكثير من الخصائص كالوسط والالتواء والتقلطح.

وفي نفس المعادلة نقوم بتعويض $u=0.5$ نحصل على الوسيط.

ب. **العزوم Moments**: تعد العزوم من أهم الخصائص الاحصائية والتي من خلالها نستطيع أن نجد الكثير من الخواص كالانحراف المعياري والوسط والتباين والالتواء والتقلطح وغيرها من الخصائص الأخرى حيث سنقوم بإيجاد العزم من الدرجة n من العلاقة الآتية وباعتماد على دالة pdf الموسعة (Baharith and Alamondi, 2021):

$$\mu_n = E(X^n)_{OJCAEE} = \int_0^\infty x^n f(x, \theta, \Omega, \alpha)_{OJCAEE} dx \quad (12)$$

$$\mu_n = E(X^n)_{OJCAEE} = M_{k,l,s,n,z} \frac{\Gamma(n+1)}{\Omega^n (z+1)^{n+1}} \quad (13)$$

من خلال المعادلة (13) يمكن إيجاد العزم الأول μ_1 والذي يمثل المتوسط (mean) والعزم الثاني μ_2 والعزم الثالث μ_3 والعزم الرابع μ_4 على التوالي:

$$\mu_1 = E(X)_{OJCAEE} = M_{k,l,s,n,z} \frac{\Gamma(1+1)}{\Omega^1(z+1)^{1+1}} = M_{k,l,s,n,z} \frac{1}{\Omega^1(z+1)^2} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mu_2 = E(X)_{OJCAEE} &= M_{k,l,s,n,z} \frac{\Gamma(2+1)}{\Omega^2(z+1)^{2+1}} \\ &= M_{k,l,s,n,z} \frac{2}{\Omega^2(z+1)^3} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mu_3 = E(X)_{OJCAEE} = M_{k,l,s,n,z} \frac{\Gamma(3+1)}{\Omega^3(z+1)^{3+1}} = M_{k,l,s,n,z} \frac{6}{\Omega^3(z+1)^4} \quad (16)$$

$$\mu_4 = E(X)_{OJCAEE} = M_{k,l,s,n,z} \frac{\Gamma(4+1)}{\Omega^4(z+1)^{4+1}} = M_{k,l,s,n,z} \frac{24}{\Omega^4(z+1)^5} \quad (17)$$

حيث يمكننا إيجاد التباين (variance) للتوزيع OJCAEE من خلال الصيغة الرياضية الآتية:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (18)$$

وبتعويض معادلة (14) و (15) في معادلة (18) نحصل على التباين للتوزيع

$$\text{Var}(X) = M_{k,l,s,n,z} \frac{2}{\Omega^2(z+1)^3} - \left(M_{k,l,s,n,z} \frac{1}{\Omega^1(z+1)^2} \right)^2 \quad (19)$$

ج. الدالة المولدة للعزوم Moment Generating Function: تعتبر الدالة المولدة للعزوم وسيلة سهلة ومختصرة للحصول على عزوم بعض التوزيعات التي من الصعب إيجادها بالطرق المعروفة. بحيث يمكن من خلالها إيجاد العزوم لتلك التوزيعات. ولإيجاد الدالة المولدة للعزوم والتي يرمز لها بالرمز

MGF للتوزيع OJCAEE نستخدم الصيغة الرياضية الآتية (Baharirith and Alamondi, 2021)

$$M_x(t)_{OJCAEE} = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x, \theta, \Omega, \alpha)_{OJCAEE} dx \quad (20)$$

$$M_x(t)_{OJCAEE} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \left\{ M_{k,l,s,n,z} \frac{\Gamma(n+1)}{\Omega^n(z+1)^{n+1}} \right\} \quad (21)$$

د. الغاية Limit: يمكن إيجاد قيمة الغاية وذلك بأخذ معادلة (6)

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha \Omega e^{-\Omega x} (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha-1} [1 - \theta(1 - e^{-\Omega x})^{\alpha}] [1 \\ &\quad - (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha}]^{\theta-2} \cdot e^{-(1-e^{-\Omega x})^{\alpha}} [1 - (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha}]^{\theta-1} \end{aligned}$$

الآن نأخذ الغاية للطرفين نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha \Omega e^{-\Omega x} (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha-1} [1 - \theta(1 - e^{-\Omega x})^\alpha] [1$$

$$- (1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-2} \cdot e^{-(1-e^{-\Omega x})^\alpha} [1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad (22)$$

هـ. الإحصاءات المرتبة **Order Statistics**: نفرض لدينا عينة عشوائية X_1, X_2, \dots, X_n من الحجم n للتوزيع OJCAEE الذي يمتلك دالة توزيع احتمالي موسعة كما في المعادلة (8). تكتب دالة الكثافة الاحتمالية للإحصاءات المرتبة بالصيغة الرياضية الآتية (Khaleel et al., (2020):

$$f_{j:n}(x) = \sum_{q=0}^{n-j} k(-1)^q \binom{n-j}{q} [F(x)_{OJCAEE}]^{j+q-1} f(x)_{OJCAEE} \quad (23)$$

حيث يمكن تعريف المقدار k بالصيغة الآتية والتي تمثل توافق j التي تم الحصول عليها من n وكما يأتي:

$$k = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}$$

الآن نقوم بتعويض المعادلتين (5) و (6) في معادلة (23) يتم الحصول على الآتي:

$$f_{j:n}(x) = \sum_{q=0}^{n-j} k(-1)^q \binom{n-j}{q} \left[1 - e^{-(1-e^{-\Omega x})^\alpha} [1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1} \right]^{j+q-1} \quad (24)$$

$$\left[\alpha \Omega e^{-\Omega x} (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha-1} [1 - \theta(1 - e^{-\Omega x})^\alpha] [1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-2} \cdot e^{-(1-e^{-\Omega x})^\alpha} [1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1} \right]$$

إذا عوضنا بـ $1 = j$ نحصل على أصغر إحصاء مرتبة

$$\begin{aligned} f_{1:n}(x) &= n \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q \binom{n-1}{q} \left[1 - e^{-(1-e^{-\Omega x})^\alpha} [1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1} \right]^q \\ &\quad * \left[\alpha \Omega e^{-\Omega x} (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha-1} [1 - \theta(1 - e^{-\Omega x})^\alpha] [1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-2} [1 - e^{-(1-e^{-\Omega x})^\alpha} [1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1}] \right] \end{aligned} \quad (25)$$

وإذا عوضنا بـ $n = j$ نحصل على أكبر إحصاء مرتبة

$$f_{n:n}(x) = n \sum_{q=0}^{n-n} (-1)^q \binom{n-n}{q} \left[1 - e^{-(1-e^{-\Omega x})^\alpha [1-(1-e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1}} \right]^{n+q-1} \left[\alpha \Omega e^{-\Omega x} (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha-1} [1 - \theta (1 - e^{-\Omega x})^\alpha] [1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-2} \cdot e^{-(1-e^{-\Omega x})^\alpha [1-(1-e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1}} \right] \quad (26)$$

6. **التطبيق Application:** تمثل هذه الفقرة الجانب العملي لهذا البحث حيث تم تطبيق التوزيع الجديد ((OJCAEE على مجموعة من البيانات الحقيقية لبيان مدى مرونة هذا التوزيع حيث تمثل البيانات تراكيز 66 لبلازما للاندوميثاسين حيث تمت مقارنة التوزيع الجديد مع ثمان توزيعات أخرى لبيان أفضلية هذا التوزيع في حسن المطابقة وهذا التوزيعات هي:

Exponential Generalized Exponentiated Exponentail distribution (EGEE), Kumaraswamy Exponentiated Exponentail distribution (KuEE), Beta Exponentiated Exponentail distribution (BeEE), [0,1] Truncated Exponentiated Exponentail Exponentiated Exponentail distribution (BeEE), Marshall-Olkin Exponentiated Exponentail distribution (MoEE), Gompertz Exponentiated Exponentail distribution (GoEE), Gumble Exponentiated Exponentail distribution (GuEE), and Exponentiated Exponentail distribution (EE).

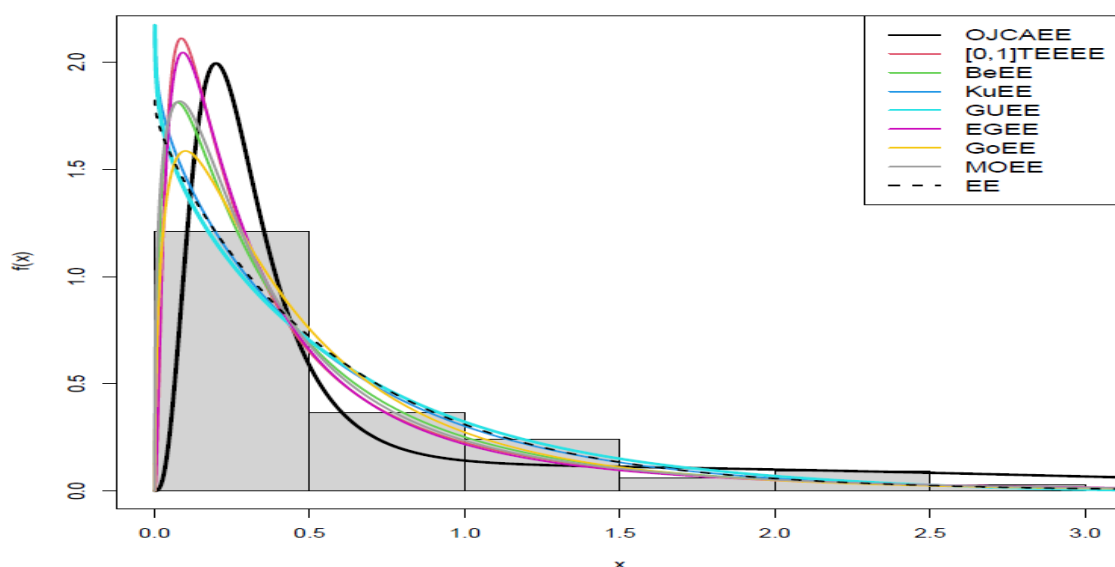
وللمقارنة بين التوزيعات المذكورة من حيث الأداء تم استخدام معايير حسن المطابقة ومن هذه المعايير التي تم استخدامها LL, AIC, BIC, CAIC, HQIC - حيث تم حساب قيم التوزيع هذه باستخدام برنامج R. وإن أصغر قيم المعايير دليل على ملائمة التوزيع للبيانات. وكانت نتائج تطبيق البيانات كما في الجدول رقم (1) وكالاتي:

الجدول (1): النتائج التي تم الحصول عليها من ملائمة مجموعة البيانات الحقيقية مع توزيع OJCAEE والتوزيعات التي تمت المقارنة معه

Distributions	AIC	CAIC	BIC	HQIC	NLL	W*	A*	KS	PV
OJCAEE	52.2	52.6	58.8	54.8	23.13	0.133	0.74	0.166	0.052
EGEE	64.09	64.7	72.8	67.5	28.04	0.214	1.35	0.140	0.148
KuEE	70.6	71.2	79.3	74.06	31.30	0.252	1.61	0.137	0.162
BeEE	65.7	66.4	74.5	69.2	28.87	0.219	1.40	0.142	0.139
[0, 1] TEEEEE	61.6	62.3	70.4	65.1	26.82	0.195	1.23	0.134	0.182
MoEE	64.8	65.2	71.4	67.4	29.44	0.227	1.44	0.134	0.183
GoEE	68.3	69.05	77.1	71.8	30.19	0.232	1.48	0.170	0.042
GuEE	68.6	68.6	74.8	70.8	31.12	0.250	1.61	0.146	0.117
EE	66.7	66.9	71.1	68.4	31.37	0.253	1.62	0.147	0.111

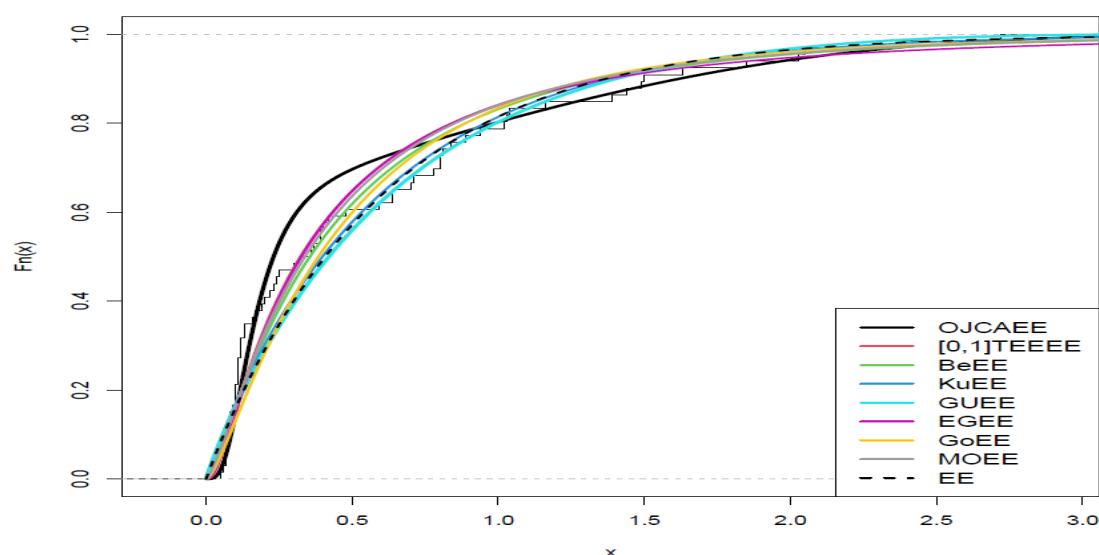
المصدر: بالاعتماد على مخرجات برنامج R.

أظهر التوزيع الجديد OJCAEE ملائمة عالية للبيانات الحقيقية عند مقارنته مع التوزيعات الأخرى وباستخدام المعايير الاحصائية في الجدول رقم (1) بسبب حصوله على أصغر القيم للمقاييس. الشكل رقم (3) و(4) على التوالي والتي تظهر ملائمة الدوال pdf وcdf وكثير قريهما من المنحني البياني بالمقارنة مع التوزيعات التي تم مقارنة التوزيع الجديد معهما حيث تبين ان التوزيع الجديد يمتلك حسن مطابقة ونستطيع الاستفادة منه في تطبيقات أخرى من واقع الحياة. الشكل (3): يبين لنا مدى ملائمة الدالة pdf وقربها من المنحني البياني بالمقارنة مع التوزيعات الأخرى



الشكل (3): من اعداد الباحثين بالاعتماد على النتائج التي تم الحصول عليها من برنامج R

الشكل رقم (4) يظهر لنا ملائمة الدالة CDF وقربها من المنحني البياني بالمقارنة مع التوزيعات الأخرى



الشكل (4): من اعداد الباحثين بالاعتماد على النتائج التي تم الحصول عليها من برنامج R

7. **الاستنتاجات Conclusions:** تهدف هذه الدراسة إلى إيجاد توزيع جديد يمتاز بالمرونة العالية ليوافق جميع أنواع البيانات. وكذلك اشتقاق الخصائص الاحصائية والرياضية لهذا التوزيع الجديد OJCAEE الذي استطعنا الحصول عليه من تركيب التوزيع الاسي المعمم على العائلة Odd JCA-G وتمت تسميته Odd JCA Exponentiated Exponential Distribution حيث تمكنا من تطبيق هذا التوزيع على مجموعة من البيانات الحقيقية وتبين أن هذا التوزيع يمتلك مرونة تفوق التوزيعات التي سبقته. نوصي الباحثين بتركيب هذا التوزيع على عوائل أخرى من أجل الحصول على توزيعات أخرى تمتاز بالمرونة العالية.

المصادر:

1. Nassar, M., Kumar, D., Dey, S., Cordeiro, G. M., & Afify, A. Z., (2019), The Marshall Olkinalpha power family of distributions with applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 351, 41-53.
2. Al-Babtain, A.A., Sherwani, R. A., Afify, A. Z., Aidi, K., Nasir, M. A., Jamal, F. & Saboor, A., (2021), The extended Burr-R class: properties, applications and modified test for censored data. *AIMS Mathematics*, 6(3), 2912-2931.
3. Iqbal, T., Alfaer, N. M., Tahir, M. H., Aljohani, H. M., Jamal, F., & Afify, A. Z., (2023), Properties and estimation approaches of the odd JCA family with applications. *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, e7417.
4. Gupta, R.D. and Kundu, D., (2001), Exponentiated exponential family; an alternative to gamma and Weibull. *Biometrical Journal*, 43, 117-130.
5. Afify, A. Z., & Mohamed, O. A., (2020), A new three-parameter exponential distribution with variable shapes for the hazard rate: Estimation and applications. *Mathematics*, 8(1), 135.
6. Basheer, A. M., (2022), Marshall–Olkin alpha power inverse exponential distribution: properties and applications. *Annals of data science*, 9(2), 301-313.
7. Khaleel, M. A., Oguntunde, P. E., Ahmed, M. T., Ibrahim, N. A., & Loh, Y. F., (2020), The Gompertz flexible Weibull distribution and its applications. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 14(1), 169-190.
8. Al-Babtain, A. A., Elbatal, I., Al-Mofleh, H., Gemeay, A. M., Afify, A. Z., & Sarg, A. M., (2021), The flexible burr XG family: properties, inference, and applications in engineering science. *Symmetry*, 13(3), 474.
9. Baharith, L. A., & Alamoudi, H. H., (2021), The exponentiated Fréchet generator of distributions with applications. *Symmetry*, 13(4), 572.
10. Cordeiro, G.M. and Brito, R.D.S., (2012), The beta power distributions. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 26(1), 88-112. Rasekhi, M., Alizadeh,
11. Eugene, N., Lee, C., & Famoye, F., (2002), Beta-normal distribution and its applications. *Communications in Statistics-Theory and methods*, 31(4), 497-512.
12. Cordeiro, G. M., & de Castro, M., (2011), A new family of generalized distributions. *Journal of statistical computation and simulation*, 81(7), 883-898.
13. Mao, H., Netravali, R., & Alizadeh, M., (2017, August), Neural adaptive video streaming with pensieve. In *Proceedings of the conference of the ACM special interest group on data communication* (pp. 197-210).

14. Benjamin, D. J., Berger, J. O., Johannesson, M., Nosek, B. A., Wagenmakers, E. J., Berk, R., & Johnson, V. E., (2018), Redefine statistical significance. *Nature human behaviour*, 2(1), 6-10.
15. Owoloko, E. A., Oguntunde, P. E., & Adejumo, A. O., (2015), Performance rating of the transmuted exponential distribution: an analytical approach. *Springer Plus*, 4, 1-15.