



OJCAEE Distribution Statistical Properties with Application

Ehab R. Hassan^{*} A, Qasim N. Hussein^A, Mundher A. Khaleel^B

^A College of Education for pure Science, Tikrit University

^B College of Computer Science and Mathematics, Tikrit University

Keywords:

Exponented exponential distribution, Odd JCA-G family, Moments, Hazard function, Statistical properties.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 20 Apr. 2023

Accepted 30 Apr. 2023

Available online 30 Aug. 2023

©2023 College of Administration and Economy, Tikrit University. THIS IS AN OPEN ACCESS ARTICLE UNDER THE CC BY LICENSE

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



*Corresponding author:



Ehab R. Hassan

College of Education for pure Science,
Tikrit University

Abstract: This study presented a new continuous distribution (Odd JCA Exponented Exponential Distribution) where this new distribution is an expansion of the Exponential distribution raised. Some mathematical and statistical properties of this distribution were studied, such as the function of danger, moments, mean, variance, the function that generates moments and goals, arranged statistics, some shapes, and the expansion of the probability density function that is used to find many properties. To demonstrate the flexibility of the new distribution, it was applied to a set of real data representing (66) plasma concentrations. for indomethacin. The proposed distribution was compared with eight other distributions, as it proved a high suitability for the data based on informatics standards (AIC, BIC, LL, CAIC, HQIC, A, W, PV, KS).

توزيع Odd JCA الاسي المرفوع خصائص احصائية مع تطبيق

ايهاب رشاد حسن منذر ناصر حسين
كلية التربية للعلوم الصرفة كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة تكريت جامعة تكريت

المستخلص

في هذه الدراسة تم تقديم توزيعاً مستمراً جديداً باسم (توزيع Odd JCA الاسي المرفوع) حيث يعد هذا التوزيع الجديد توسيع للتوزيع الاسي المرفوع. تم دراسة بعض الخصائص الرياضية والاحصائية لهذا التوزيع دالة الخطير والعزوم والوسط والتباين والدالة المولدة للعزوم والغاية والاحصاءات المرتبة وبعض الاشكال وتوسيع دالة الكثافة الاحتمالية التي تستخد لايجاد الكثير من الخصائص. ولبيان مرونة التوزيع الجديد تم تطبيقه على مجموعة من البيانات الحقيقية تمثل (66) من تركيزات البلازما للاندوميتاسين. وتم مقارنة التوزيع المقترن مع ثمان توزيعات اخرى حيث اثبتت ملائمة عالية للبيانات بالاعتماد على معايير المعلوماتية (AIC, BIC, LL, CAIC, HQIC, .).

الكلمات المفتاحية: التوزيع الاسي المرفوع، عائلة Odd JCA-G، العزوم، دالة الخطير، الخصائص الاحصائية.

1. المقدمة

تعد التوزيعات الاحتمالية المعروفة ذات أهمية كبيرة في حياة الانسان، وكثيراً ما يتم تطبيق هذه التوزيعات لوصف ظواهر العالم الحقيقي. لذلك انصب اهتمام الكثير من الاصحائين إلى البحث عن عوائل جديدة لها خصائص رياضية حيث تضم هذه العوائل الكثير من التوزيعات تحت خيمتها والتي يمكن الاستفادة منها لنموذج ووصف الكثير من البيانات الحقيقية. أظهرت الكثير من التوزيعات ضعف في وصف كل البيانات الحقيقة وخواصها مما شجع الباحثين على ايجاد توزيعات جديدة تمتلك مرونة عالية لوصف جميع البيانات الحقيقة.

تهدف الدراسة الحالية إلى ايجاد توزيع مستمر جديد يسمى Odd JCA Exponented Exponential Distribution (OJCAEE)، الذي تم الحصول عليه من تركيب التوزيع الاسي المرفوع على العائلة Odd JCA-G، حيث تم اشتقاق ودراسة بعض الخصائص الاحصائية لهذا التوزيع. تم تقسيم هذا البحث على اجزاء عده وهي: المقدمة، والدراسات السابقة، العائلة المولدة، كيفية توليد التوزيع المقترن، توسيع دالة PDF، الخصائص الرياضية، التطبيق، الاستنتاجات.

2. الدراسات السابقة: في السنوات الاخيرة تمكنت الباحثين من تقديم الكثير من العوائل الاحصائية والتي تم الاستفادة منها لتوليد الكثير من التوزيعات الاحصائية التي تملك مرونة عالية لنموذج الكثير من البيانات الحقيقة. ومن هذه العوائل عائلة Beta-G المقدمة من قبل الباحثين Eugene et al., (2002) وعائلة Kumaraswamy-G المقترنة من قبل Cordeiro and Castro, (2011) وعائلة T-X للباحثين (Alzaatreh et al., 2014) وعائلة Weibull-G المشقة من قبل الباحثين Alizadeh et al., (2014) وعائلة Gompertz-G للباحثين Bourguignon et al., (2017) وعائلة Marshall Olkin Apha Power وعائلة Nasser et al., (2019) من قبل الباحثين Marshall Olkin Burr-R Odd AL-Babtain et al., (2021) للباحثين

JCA-G المقترحة من الباحثين Iqpal et al., (2023). أما التوزيع الاسي المعمم استخدم مع الكثير من العوائل لإيجاد توزيعات جديدة أو تعليم للتوزيعات حيث قدم الباحثون The Transmuted Inverse Exponential Distribution Oguntunde et al., (2015) توزيع جديد يسمى Distribution. وتم دراسة هذا التوزيع وايجاد أهم الصفات الاحصائية له كالعزم والدالة المولدة للعزوم والانتروبي وغيرها من الصفات الأخرى، اشتق الباحثون Maxwell et al., (2018) وتوزيع جديد يسمى The Gompertz Length Biased Exponential Distribution استخراج دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع الاحتمالي لهذا التوزيع وايجاد هم الخصائص الاحصائية، قام الباحثان Afify and Abdo, (2020) بإيجاد توزيعاً اسيّاً جديداً مكون من ثلاث معلمات يسمى Extended Odd Weibull Exponential Distribution فيما قدم الباحث Marshall Olkain Alpha Power Inverse Basheer, (2022) توزيع اسي جديداً بعنوان .Exponential Distribution (MOAPIE)

3. التوزيع الجديد (OJCAEE): في هذا القسم من البحث، سنقوم بشرح تفصيلي عن آلية الحصول على التوزيع الجديد (OJCAEE) ذو المعالم الثلاثة حيث سيتم إيجاد دالة التوزيع التراكمي ودالة الكثافة الاحتمالية ودالة الخطر وبعض دوال التوزيع الجديد. للتوزيع الاسي المرفوع دالة توزيع تراكمي CDF ودالة كثافة احتمالية PDF على التوالي وكالاتي :Gupta and Kundu ,2001

$$G(x, \Omega, \alpha) = (1 - e^{-\Omega x})^\alpha, \quad x \geq 0, \Omega, \alpha > 0 \quad (1)$$

$$g(x, \Omega, \alpha) = \alpha \Omega e^{-\Omega x} (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha-1} \quad (2)$$

حيث إن Ω , α معالم شكل وقياس للتوزيع الاسي المرفوع وكذلك تعطى دوال CDF,PDF لعائلة JCA-G وكالاتي:

$$F(x, \theta, \beta) = 1 - e^{-G(x; \beta)[1 - G(x; \beta)]^{\theta-1}} \quad \theta < 1, x > 0 \quad (3)$$

$$f(x, \theta, \beta) = g(x, \beta)[1 - \theta G(x; \beta)][1 - G(x; \beta)]^{\theta-2} * e^{-G(x; \beta)[1 - G(x; \beta)]^{\theta-1}} \quad (4)$$

الآن نعرض معادلة (1) و(2) في معادلة (3) و(4) نحصل على التوزيع المقترن OJCAEE على التوالي:

$$F(x, \theta, \Omega, \alpha)_{OJCAEE} = 1 - e^{-(1 - e^{-\Omega x})^\alpha [1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1}} \quad (5)$$

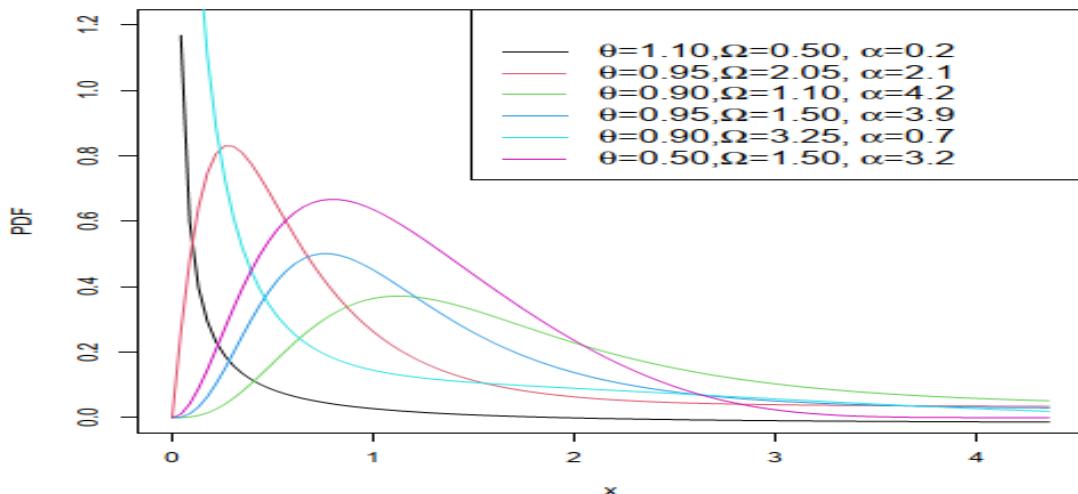
حيث $x > 0, \theta > 0, \Omega, \alpha > 0$

$$f(x, \theta, \Omega, \alpha)_{OJCAEE} = \alpha \Omega e^{-\Omega x} (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha-1} [1 - \theta(1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-2} * [1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha] e^{-(1-e^{-\Omega x})^\alpha [1-(1-e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1}} \quad (6)$$

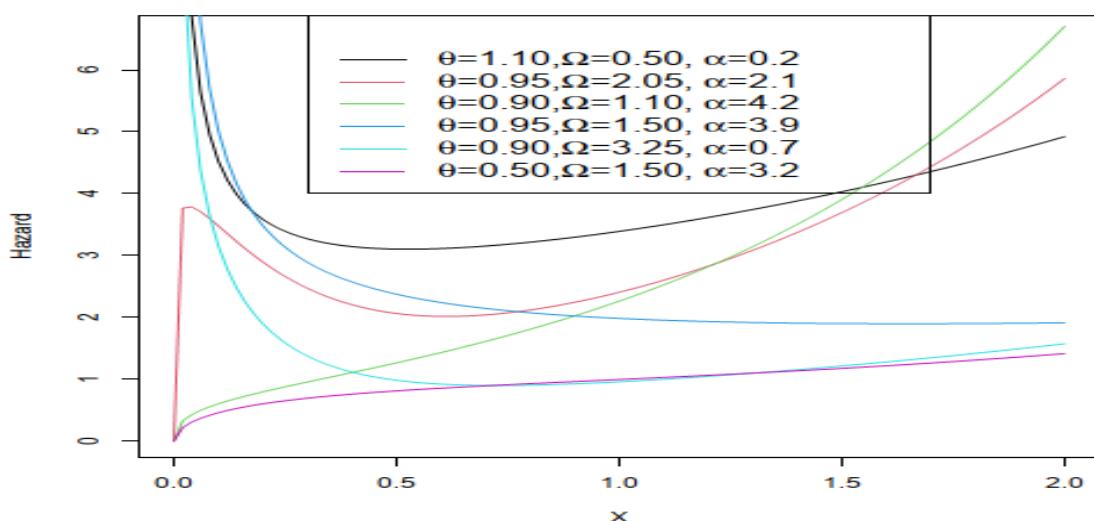
الآن نجد دالة الخطر (hazard function) للتوزيع المقترن OJCAEE كالتالي:

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

$$= \alpha \Omega e^{-\mu x} (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha-1} [1 - \theta(1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-2} \quad (7)$$



الشكل (1): رسم دالة pdf لقيم مختلفة لمعالم التوزيع



الشكل (2): رسم دالة hf لقيم مختلفة لمعالم التوزيع

4. توسيع دالة PDF للتوزيع OJCAEE: في هذه الفقرة تم توسيع دالة PDF للتوزيع المقترن OJCAEE باستخدام معادلة (6) لاستفادة منها في دراسة الخصائص الاحصائية. حيث يتم التوسيع عن طريق استخدام المفهوك الاسي ومفهوك متسلسلة ذات الحدين وبالنكرار لأكثر من مرة حتى نتوصل إلى المعادلة:

$$f(x, \theta, \Omega, \alpha)_{OJCAEE} = M_{k,l,s,n,z} e^{-\Omega x(z+1)} \quad (8)$$

حيث تمثل $M_{k,l,s,n,z}$ الآتي:

$$= M_{k,l,s,n,z}$$

$$\sum_{k,l,s,n,z=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1+l+s+n+z} \binom{k\alpha-k}{l} \binom{\theta-2}{s} \binom{1}{n} \binom{\alpha-1+\alpha k+\alpha l+\alpha s+\alpha n}{z} \theta^n \alpha \Omega}{k!} \quad (9)$$

5. الخصائص الرياضية Mathematical Properties: سنقوم بإيجاد بعض الخصائص الاحصائية للتوزيع OJCAEE، وتحديداً العزوم والوسط والتباين والدالة المولدة للعزوم والغاية والاحصاءات المرتبة وكالآتي:

a. الدالة التجزئية: تعد الدالة التجزئية احدى الطرق التي تستخدم لتحديد دالة الاحتمال. وتعد هذه الدالة مهمة لتوليد البيانات التي تستخدم بدراسة المحاكاة. والتي يمكننا الحصول عليها من معكوس دالة CDF كما في الصيغة الرياضية الآتية (Al-Babtain et al., 2021).

$$Q(u) = F^{-1}(x) \quad (10)$$

حيث إن $0 < u < 1$ للحصول على الدالة التجزئية للتوزيع OJCAEE، فإننا نقوم بتعويض معادلة (1) في معادلة (10) وكالآتي:

$$- \frac{\ln \left(1 - \left[- \frac{\ln(1-u)}{[1-(1-e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1}} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right)}{\alpha} \quad (11)$$

حيث يمكن استخدام معادلة (11) لإيجاد الكثير من الخصائص كالوسط والالتواء والتقطيع. وفي نفس المعادلة نقوم بتعويض $u=0.5$ نحصل على الوسيط.

b. العزوم Moments: تعد العزوم من اهم الخصائص الاحصائية والتي من خلالها نستطيع أن نجد الكثير من الخواص كالانحراف المعياري والوسط والتباين والالتواء والتقطيع وغيرها من الخصائص الأخرى حيث سنقوم بإيجاد العزم من الدرجة n من العلاقة الآتية وبالاعتماد على دالة pdf الموسعة (Baharith and Alamondi, 2021)

$$\mu_n = E(X^n)_{OJCAEE} = \int_0^{\infty} x^n f(x, \theta, \Omega, \alpha)_{OJCAEE} dx \quad (12)$$

$$\mu_n = E(X^n)_{OJCAEE} = M_{k,l,s,n,z} \frac{\Gamma(n+1)}{\Omega^n (z+1)^{n+1}} \quad (13)$$

من خلال المعادلة (13) يمكن إيجاد العزم الأول μ_1 والذي يمثل المتوسط (mean) والعزم الثاني μ_2 والعزم الثالث μ_3 والعزم الرابع μ_4 على التوالي:

$$\mu_1 = E(X)_{OJCAEE} = M_{k,l,s,n,z} \frac{\Gamma(1+1)}{\Omega^1(z+1)^{1+1}} = M_{k,l,s,n,z} \frac{1}{\Omega^1(z+1)^2} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mu_2 &= E(X)_{OJCAEE} = M_{k,l,s,n,z} \frac{\Gamma(2+1)}{\Omega^2(z+1)^{2+1}} \\ &= M_{k,l,s,n,z} \frac{2}{\Omega^2(z+1)^3} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mu_3 = E(X)_{OJCAEE} = M_{k,l,s,n,z} \frac{\Gamma(3+1)}{\Omega^3(z+1)^{3+1}} = M_{k,l,s,n,z} \frac{6}{\Omega^3(z+1)^4} \quad (16)$$

$$\mu_4 = E(X)_{OJCAEE} = M_{k,l,s,n,z} \frac{\Gamma(4+1)}{\Omega^4(z+1)^{4+1}} = M_{k,l,s,n,z} \frac{24}{\Omega^4(z+1)^5} \quad (17)$$

حيث يمكننا إيجاد التباين (variance) للتوزيع OJCAEE من خلال الصيغة الرياضية الآتية:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (18)$$

وبتعويض معادلة (14) و(15) في معادلة (18) نحصل على التباين للتوزيع

$$Var(X) = M_{k,l,s,n,z} \frac{2}{\Omega^2(z+1)^3} - \left(M_{k,l,s,n,z} \frac{1}{\Omega^1(z+1)^2} \right)^2 \quad (19)$$

ج. الدالة المولدة للعزوم: تعتبر الدالة المولدة للعزوم وسيلة سهلة ومحضرة للحصول على عزوم بعض التوزيعات التي من الصعب إيجادها بالطرق المعرفة. بحيث يمكن من خلالها إيجاد العزوم لتلك التوزيعات. وإيجاد الدالة المولدة للعزوم والتي يرمز لها بالرمز MGF للتوزيع OJCAEE نستخدم الصيغة الرياضية الآتية Baharith and Alamondi, (2021)

$$M_x(t)_{OJCAEE} = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x, \theta, \Omega, \alpha)_{OJCAEE} dx \quad (20)$$

$$M_x(t)_{OJCAEE} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \left\{ M_{k,l,s,n,z} \frac{\Gamma(n+1)}{\Omega^n(z+1)^{n+1}} \right\} \quad (21)$$

د. الغاية Limit: يمكن إيجاد قيمة الغاية وذلك بأخذ معادلة (6)
 $f(x) = \alpha \Omega e^{-\Omega x} (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha-1} [1 - \theta(1 - e^{-\Omega x})^{\alpha}] [1 - (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha}]^{\theta-2}$

$$- (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha}]^{\theta-2} \cdot e^{-(1-e^{-\Omega x})^{\alpha} [1 - (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha}]^{\theta-1}}$$

الآن نأخذ الغاية للطرفين نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha \Omega e^{-\Omega x} (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha-1} [1 - \theta(1 - e^{-\Omega x})^\alpha] [1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-2} \cdot e^{-(1-e^{-\Omega x})^\alpha [1-(1-e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad (22)$$

٥. الإحصاءات المرتبة **Order Statistics**: نفرض لدينا عينة عشوائية X_1, X_2, \dots, X_n من الحجم n للتوزيع OJCAEE الذي يمتلك دالة توزيع احتمالي موسعة كما في المعادلة (8). تكتب دالة الكثافة الاحتمالية للأحصاءات المرتبة بالصيغة الرياضية الآتية :Khaleel et al., (2020)

$$f_{j:n}(x) = \sum_{q=0}^{n-j} k(-1)^q \binom{n-j}{q} [F(x)_{OJCAEE}]^{j+q-1} f(x)_{OJCAEE} \quad (23)$$

حيث يمكن تعريف المقدار k بالصيغة الآتية والتي تم الحصول عليها من n وكما يأتي:

$$k = \frac{n!}{(j-1)! (n-j)!}$$

الآن نقوم بتعويض المعادلتين (5) و(6) في معادلة (23) يتم الحصول على الآتي:

$$f_{j:n}(x) = \sum_{q=0}^{n-j} k(-1)^q \binom{n-j}{q} \left[1 - e^{-(1-e^{-\Omega x})^\alpha [1-(1-e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1}} \right]^{j+q-1} \quad (24)$$

$$\left[\alpha \Omega e^{-\Omega x} (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha-1} [1 - \theta(1 - e^{-\Omega x})^\alpha] [1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-2} \cdot e^{-(1-e^{-\Omega x})^\alpha [1-(1-e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1}} \right]$$

إذا عوضنا $j = 1$ نحصل على أصغر احصاء مرتبة

$$f_{1:n}(x) = n \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q \binom{n-1}{q} \left[1 - e^{-(1-e^{-\Omega x})^\alpha [1-(1-e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1}} \right]^q$$

$$* \left[\alpha \Omega e^{-\Omega x} (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha-1} [1 - \theta(1 - e^{-\Omega x})^\alpha] [1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-2} [1 - e^{-(1-e^{-\Omega x})^\alpha [1-(1-e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1}}] \right] \quad (25)$$

وإذا عوضنا $j = n$ نحصل على أكبر احصاء مرتبة

$$f_{n:n}(x) = n \sum_{q=0}^{n-n} (-1)^q \binom{n-n}{q} \left[1 - e^{-(1-e^{-\Omega x})^\alpha [1-(1-e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1}} \right]^{n+q-1} \\ \left[\alpha \Omega e^{-\Omega x} (1 - e^{-\Omega x})^{\alpha-1} [1 - \theta(1 - e^{-\Omega x})^\alpha] [1 - (1 - e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-2} \cdot e^{-(1-e^{-\Omega x})^\alpha [1-(1-e^{-\Omega x})^\alpha]^{\theta-1}} \right] \quad (26)$$

6. **التطبيق Application:** تمثل هذه الفقرة الجانب العملي لهذا البحث حيث تم تطبيق التوزيع الجديد (OJCAEE) على مجموعة من البيانات الحقيقة لبيان مدى مرونة هذا التوزيع حيث تمثل البيانات تراكيز 66 لبيانات لبلاندو ميتاسين حيث تمت مقارنة التوزيع الجديد مع ثمان توزيعات أخرى لبيان أفضلية هذا التوزيع في حسن المطابقة وهذا التوزيعات هي:

Exponential Generalized Exponentail distribution (EGEE), Kumaraswamy Exponentaited Exponentail distribution (KuEE), Beta Exponentaited Exponentail distribution (BeEE), [0,1] Truncated Exponentaited Exponentail Exponentaited Exponentail distribution (BeEE), Marshall-Olkin Exponentaited Exponentail distribution (MoEE), Gompertz Exponentaited Exponentail distribution (GoEE), Gumble Exponentaited Exponentail distribution (GuEE), and Exponentaited Exponentail distribution (EE).

وللمقارنة بين التوزيعات المذكورة من حيث الأداء تم استخدام معايير حسن المطابقة ومن هذه المعايير التي تم استخدامها LL, AIC, BIC, CAIC, HQIC – حيث تم حساب قيم التوزيع هذه باستخدام برنامج R. وإن أصغر قيم المعايير دليل على ملائمة التوزيع للبيانات. وكانت نتائج تطبيق البيانات كما في الجدول رقم (1) وكالاتي:

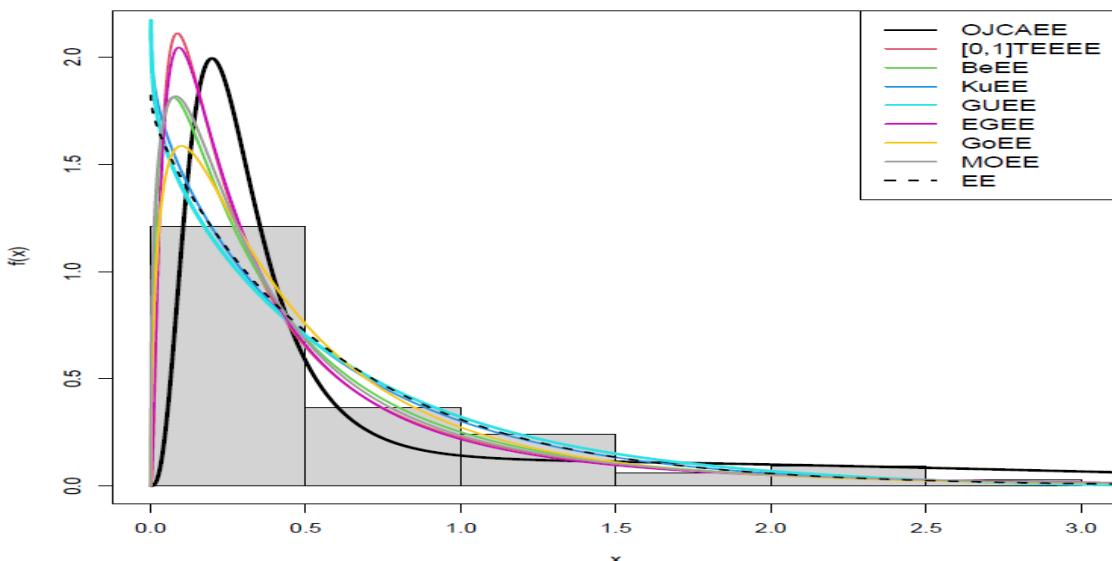
الجدول (1): النتائج التي تم الحصول عليها من ملائمة مجموعة البيانات الحقيقة مع توزيع OJCAEE والتوزيعات التي تمت المقارنة معه

| Distributions | AIC | CAIC | BIC | HQIC | NLL | W* | A* | KS | PV |
|---------------|-------|-------|------|-------|-------|-------|------|-------|-------|
| OJCAEE | 52.2 | 52.6 | 58.8 | 54.8 | 23.13 | 0.133 | 0.74 | 0.166 | 0.052 |
| EGEE | 64.09 | 64.7 | 72.8 | 67.5 | 28.04 | 0.214 | 1.35 | 0.140 | 0.148 |
| KuEE | 70.6 | 71.2 | 79.3 | 74.06 | 31.30 | 0.252 | 1.61 | 0.137 | 0.162 |
| BeEE | 65.7 | 66.4 | 74.5 | 69.2 | 28.87 | 0.219 | 1.40 | 0.142 | 0.139 |
| [0, 1] TEEE | 61.6 | 62.3 | 70.4 | 65.1 | 26.82 | 0.195 | 1.23 | 0.134 | 0.182 |
| MoEE | 64.8 | 65.2 | 71.4 | 67.4 | 29.44 | 0.227 | 1.44 | 0.134 | 0.183 |
| GoEE | 68.3 | 69.05 | 77.1 | 71.8 | 30.19 | 0.232 | 1.48 | 0.170 | 0.042 |
| GuEE | 68.6 | 68.6 | 74.8 | 70.8 | 31.12 | 0.250 | 1.61 | 0.146 | 0.117 |
| EE | 66.7 | 66.9 | 71.1 | 68.4 | 31.37 | 0.253 | 1.62 | 0.147 | 0.111 |

المصدر: بالاعتماد على مخرجات برنامج R.

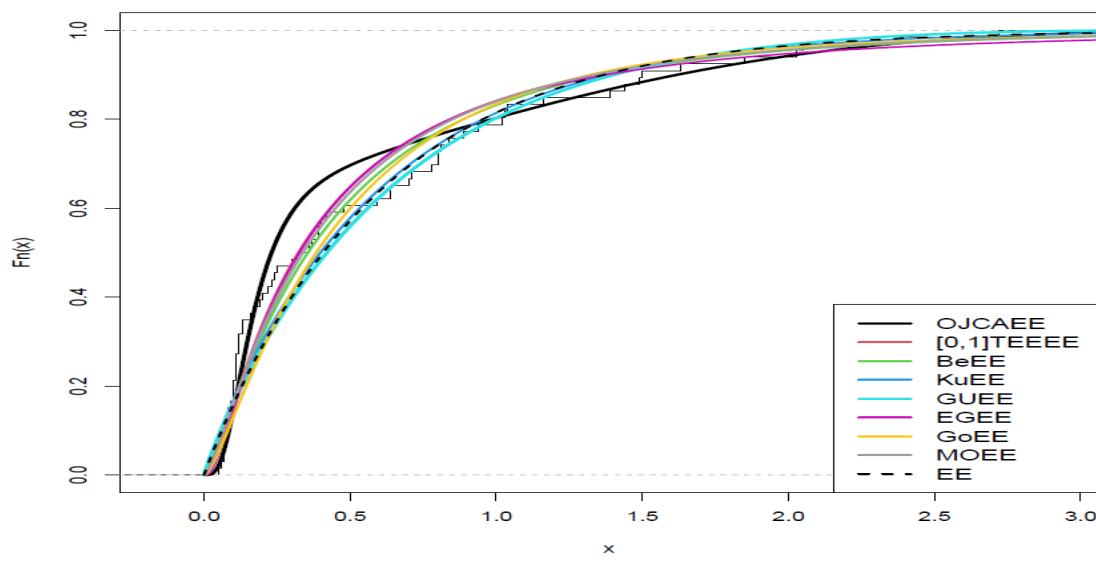
أظهر التوزيع الجديد OJCAEE ملائمة عالية للبيانات الحقيقة عند مقارنته مع التوزيعات الأخرى وباستخدام المعايير الاحصائية في الجدول رقم (1) بسبب حصوله على أصغر القيم للمقاييس. الشكل رقم (3) و(4) على التوالي والتي تظهر ملائمة الدوال pdf وcdf وكثير قربهما من المنحني البياني بالمقارنة مع التوزيعات التي تم مقارنة التوزيع الجديد معها حيث تبين ان التوزيع الجديد يمتلك حسن مطابقة ونستطيع الاستفادة منه في تطبيقات أخرى من واقع الحياة.

الشكل (3): يبين لنا مدى ملائمة الدالة pdf وقربها من المنحني البياني بالمقارنة مع التوزيعات الأخرى



الشكل (3): من اعداد الباحثين بالاعتماد على النتائج التي تم الحصول عليها من برنامج R

الشكل رقم (4) يظهر لنا ملائمة الدالة CDF وقربها من المنحني البياني بالمقارنة مع التوزيعات الأخرى



الشكل (4): من اعداد الباحثين بالاعتماد على النتائج التي تم الحصول عليها من برنامج R

7. الاستنتاجات Conclusions: تهدف هذه الدراسة إلى ايجاد توزيع جديد يمتاز بالمرنة العالمية ليوافق جميع انواع البيانات. وكذلك اشتقاق الخصائص الاحصائية والرياضية لهذا التوزيع الجديد OJCAEE الذي استطعنا الحصول عليه من تركيب التوزيع الاسي المعمم على العائلة Odd JCA-G وتمت تسميته Odd JCA Exponented Exponential Distribution حيث تمكنا من تطبيق هذا التوزيع على مجموعة من البيانات الحقيقية وتبيّن أن هذا التوزيع يمتلك مرنة تفوق التوزيعات التي سبقته. نوصي الباحثين بتركيب هذا التوزيع على عوائل أخرى من أجل الحصول على توزيعات أخرى تمتاز بالمرنة العالمية.

المصادر:

1. Nassar, M., Kumar, D., Dey, S., Cordeiro, G. M., & Afify, A. Z., (2019), The Marshall Olkin alpha power family of distributions with applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 351, 41-53.
2. Al-Babtain, A.A., Sherwani, R. A., Afify, A. Z., Aidi, K., Nasir, M. A., Jamal, F. & Saboor, A., (2021), The extended Burr-R class: properties, applications and modified test for censored data. *AIMS Mathematics*, 6(3), 2912-2931.
3. Iqbal, T., Alfaer, N. M., Tahir, M. H., Aljohani, H. M., Jamal, F., & Afify, A. Z., (2023), Properties and estimation approaches of the odd JCA family with applications. *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, e7417.
4. Gupta, R.D. and Kundu, D., (2001), Exponentiated exponential family; an alternative to gamma and Weibull. *Biometrical Journal*, 43, 117-130.
5. Afify, A. Z., & Mohamed, O. A., (2020), A new three-parameter exponential distribution with variable shapes for the hazard rate: Estimation and applications. *Mathematics*, 8(1), 135.
6. Basheer, A. M., (2022), Marshall–Olkin alpha power inverse exponential distribution: properties and applications. *Annals of data science*, 9(2), 301-313.
7. Khaleel, M. A., Oguntunde, P. E., Ahmed, M. T., Ibrahim, N. A., & Loh, Y. F., (2020), The Gompertz flexible Weibull distribution and its applications. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 14(1), 169-190.
8. Al-Babtain, A. A., Elbatal, I., Al-Mofleh, H., Gemeay, A. M., Afify, A. Z., & Sarg, A. M., (2021), The flexible burr XG family: properties, inference, and applications in engineering science. *Symmetry*, 13(3), 474.
9. Baharith, L. A., & Alamoudi, H. H., (2021), The exponentiated Fréchet generator of distributions with applications. *Symmetry*, 13(4), 572.
10. Cordeiro, G.M. and Brito, R.D.S., (2012), The beta power distributions. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 26(1), 88-112. Rasekhi, M., Alizadeh,
11. Eugene, N., Lee, C., & Famoye, F., (2002), Beta-normal distribution and its applications. *Communications in Statistics-Theory and methods*, 31(4), 497-512.
12. Cordeiro, G. M., & de Castro, M., (2011), A new family of generalized distributions. *Journal of statistical computation and simulation*, 81(7), 883-898.
13. Mao, H., Netravali, R., & Alizadeh, M., (2017, August), Neural adaptive video streaming with pensieve. In Proceedings of the conference of the ACM special interest group on data communication (pp. 197-210).

14. Benjamin, D. J., Berger, J. O., Johannesson, M., Nosek, B. A., Wagenmakers, E. J., Berk, R., & Johnson, V. E., (2018), Redefine statistical significance. *Nature human behaviour*, 2(1), 6-10.
15. Owoloko, E. A., Oguntunde, P. E., & Adejumo, A. O., (2015), Performance rating of the transmuted exponential distribution: an analytical approach. *Springer Plus*, 4, 1-15.