

" دراسة مقارنة بين طريقة NNG- Garrote و Relaxed LAD Lasso الجزائية لنموذج الانحدار الخطي المتعدد
باستعمال اسلوب المحاكاة "

"Comparative Study Between of Penalized NNG- Garrote and Relaxed LAD-Lasso Methods for Multiple Linear Regression By using Simulation"

سجاد حسن عريبي⁽¹⁾ أ. م. د طارق عزيز صالح⁽²⁾

جامعة واسط / كلية الإدارة والاقتصاد

المستخلص

تُعد مشكلة التعدد الخطي من المشاكل المهمة التي تعاني منها البيانات، فوجود ارتباطات بين المتغيرات التوضيحية في انموذج الانحدار الخطي العام تزداد صعوبة استعمال طرائق التقدير الكلاسيكية مثل طريقة المربعات الصغرى OLS ، إذ تفقد هذه الطرائق إلى تقديرات متحيزة وغير كفوة لتقدير معالم النموذج. وهنا دعت الحاجة إلى استعمال طرائق أخرى لتقدير معالم نموذج الانحدار الخطي العام. وفي بحثنا هذا تمّ استعمال طريقتين هما: طريقة Nonnegative Garrote وكذلك تمّ استعمال طريقة Lasso المرنة المستند إلى الانحراف المطلق الأقل (Relaxed LAD Lasso) ، وتمّ استعمال بيانات محاكاة، وكذلك بيانات حقيقية تمثّل . تمت مقارنة النتائج باستعمال متوسط مربعات الخطأ MSE ، و ونسبة التشويش او الضوضاء (SNR) أظهرت النتائج افضلية Nonnegative Garrote

الكلمات المفتاحية :- طريقة كاروت غير السالبة , طريقة لاسو لأقل انحراف مطلق المرنة ، دالة الجزاء ، مشكلة التعدد الخطي

Abstract

Multicollinearity is a significant issue affecting data analysis, particularly when correlations exist among explanatory variables in the general linear regression model. This correlation increases the difficulty of applying classical estimation methods such as Ordinary Least

Squares (OLS), as these methods often lead to biased and inefficient parameter estimates. Therefore, alternative approaches are needed for estimating the parameters of the general linear regression model. In this study, two estimation methods were employed: the Nonnegative Garrote method and the Relaxed LAD Lasso method, which is based on the Least Absolute Deviation. Both simulated and real datasets were used for evaluation. The results were compared using the Mean Squared Error (MSE) and the Signal-to-Noise Ratio (SNR), and the findings indicated the superiority of the Nonnegative Garrote method.

Keywords :

Nonnegative Garrote Method, Relaxed LAD-Lasso Method, Penalty Function, Multicollinearity.

Introduction

1- المقدمة :

شهدت العقود الأخيرة تزايداً هائلاً في حجم البيانات، مما زاد من صعوبة بناء نماذج تنبؤية دقيقة، خاصة في ظل مشكلة التعدد الخطي في الانحدار الخطي المتعدد. وللتغلب على هذه التحديات، ظهرت الطرائق الجزائية مثل Relaxed Lasso و Nonnegative Garrote و Relaxed LAD Lasso، التي تسهم في تحسين دقة النماذج وتقليل المعاملات غير المهمة. ويُعد الانحدار الخطي المتعدد أداة أساسية لدراسة العلاقة بين متغير تابع وعدة متغيرات تفسيرية، بهدف تقدير قوة واتجاه تأثيرها من خلال معادلة خطية التالية :

$$\underline{Y} = \underline{X}\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} , \quad \underline{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2) \quad \dots (1)$$

$\underline{Y}$ هو متجه المتغير المعتمد وان $\underline{X}$: هي مصفوفة المتغيرات التوضيحية ، $\underline{\beta}$: هي معاملات الانحدار التي تمثل تأثير كل متغير تنبؤي على المتغير التابع ، $\underline{\varepsilon}$ يمثل الخطأ العشوائي الناتج عن انحراف بين القيمة الحقيقية عن القيمة التقديرية للأنموذج

Multicollinearity problem

2- مشكلة التعدد الخطي: -

في حالات التعدد الخطي تعاني مقدرات OLS رغم تمتعها بخاصية BLUE من تباينات عالية، مما يؤدي إلى تقديرات غير دقيقة وفترات ثقة واسعة وتظهر معاملات ارتباط مرتفعة بين المتغيرات المستقلة وتصبح التقديرات غير مستقرة خاصة عند صغر محدد مصفوفة المعلومات، مما يسبب تضخماً في تباين المعلمات المقدرة ، وهناك نوعين من مشكلة التعدد الخطي وهي:

أولاً: التعدد الخطي شبه التام

ثانياً: التعدد الخطي التام

3- عامل تضخم التباين (VIF) :- Variance Inflation Factor

عام (1967) اقترح الباحثان Glauber & Farrar المقياس عامل تضخم التباين للكشف عن مشكلة التعدد الخطي واطلق عليه بـ (VIF) وهو اختصار لكلمة (Variance Inflation Factor) ويكون وفق الصيغة التالية:

$$VIF = \frac{1}{1 - R^2} \quad \dots (2)$$

اذان ان :-

VIF : هو معامل تضخم التباين للمتغير التوضيحي i

R^2 : هو معامل التحديد للمتغير التوضيحي i ويعطى بالصيغة التالية :

$$R^2 = 1 - \frac{SSR}{SSTo} \quad \dots (3)$$

إذا كانت قيمة VIF أعلى من 3 يشير إلى وجود مشكلة تعدد خطي أي وجود علاقة خطية متعددة اما إذا كانت قيمة VIF أقل من 3 تعتبر هذه القيمة مقبولة.

4- دالة الجزاء :- [4] Penalty function

تعرف دالة الجزاء على أنها أداة رياضية تُضاف إلى دالة الخسارة (Loss Function) في النماذج الإحصائية لتقليل تعقيد النموذج وتحسين قدرتها على التعميم عبر فرض قيود على قيم معاملات الانموذج (β) وهي تُساهم في :

1. منع الإفراط في التركيب (Overfitting)
2. تحسين استقرار التقديرات (Stability of Estimates) خاصة مع وجود تعدد خطي أو ضوضاء عالية.
3. اختيار السمات (Feature Selection) بحذف المتغيرات غير المهمة

4-1 معلمة الجزاء (λ) :- Penalty parameter

هي معلمة تُستخدم في النماذج الإحصائية وخوارزميات التحسين لموازنة بين دقة الانموذج (مطابقة البيانات) ومدى تعقيده (تجنب الإفراط في التخصيص (Overfitting)) تُضاف هذه المعلمة إلى دالة الخسارة (Loss Function) لفرض "جزاء" على القيم الكبيرة لمعاملات النموذج أو انتهاك القيود

1. جزء Nonnegative Garrote [1] [2]

تهدف هذه الدالة الى تقليص المعاملات مع الحفاظ على إشارتها الأصلية (من خلال عوامل ضبط غير سالبة فهي تعتمد على تقديرات أولية (مثل OLS) مما يحسن الاستقرار وتعتبر عنها بصيغة التالية:

$$P(\beta) = \lambda \sum_{j=1}^p c_j \quad , \quad c_j \geq 0 \quad \dots (4)$$

c_j : عوامل ضبط غير سالبة تُطبّق على معاملات المربعات الصغرى العادية (OLS) الأولية .

الشرط $c_j \geq 0$: الحفاظ على إشارة المعاملات الأصلية :

حيث يتم استخراج λ عن

اما الطريقة الثانية

$$\lambda = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{2 \log p}{n}} \quad \dots (5)$$

حيث ان

$\hat{\sigma}$: هي تقدير الانحراف المعياري للخطأ حيث ان كل ما زادت $\hat{\sigma}$ زادت قيمة λ لمواجهة الضوضاء العالية .

$\log p$: حيث ان (p) هو عدد المتغيرات ويستخدم اللوغاريتم له لتجنب زيادة λ بشكل مفرط عند زيادة عدد المتغيرات (p) .

n : حجم العينة حيث كل ما زادت حجم العينة كل ما قلت قيمة λ لان البيانات الاكبر تسمح بتقديرات اكثر استقراراً

ومزايا هذه الطريقة

1. الحفاظ على إشارات المعاملات الأصلية (مهم في التفسير).
2. تقليل تأثير التعدد الخطي عن طريق تقليص المعاملات المتشابهة معاً.
3. أقل حساسية لارتباط المتغيرات مقارنة بـ Lasso.

2- جزء Relaxed LAD Lasso :- [5] [6] [8]

يستخدم Relaxed LAD Lasso نفس دالة الجزء LAD Lasso في المرحلة الأولى، لكنه يضيف مرونة (relaxation) في المرحلة الاولى لتحسين تقدير المعاملات المهمة، مما يقلل من الانحياز ويحافظ على البساطة

التفسيرية للأنموذج ومن خلال تحسين انتقائية Lasso LAD عبر إدخال عامل المرونة والذي يعرف أيضاً بمعدل نمو المتغيرات (ϕ) وتعتبر عن دالة الجزء في المرحلة الاولى بالصيغة التالية :

$$P(\beta) = n\lambda\phi \sum_{j=1}^p |\beta_j| \quad \dots (6)$$

حيث ان

λ : كما ذكرناها مسبقاً

ϕ : تعكس معدل نمو المتغيرات (حيث يحسب ϕ من خلال انحراف الخطأ المطلق MAD) وصيغته الرياضية كالتالي :

$$MAD = \phi = \text{median}(|X_i - \text{median}(X)|) \quad \dots (7)$$

n : هي حجم العينة

في المرحلة الثانية اعادة التقديرات المختارة بدون ϕ

ومزايا هذه الطريقة

1. دقة تقديرات أعلى في البيانات .

2- توازن بين انتقائية السمات ومثانة النموذج.

5- طرائق التقدير :-

5- 1 - طريقة Nonnegative Garrote :- [7] [9]

ففي عام 1995، قدّم الباحث ليون بريمان، هذه الطريقة الجديدة كأداة للانحدار الجزئي، فتعد من أبرز مزايا طريقة NNG أنها تُظهر فعالية خاصة في تقليص المعاملات واختيار المتغيرات دون أن تتحول إلى قيم سالبة وتعتمد هذه الطريقة في جوهرها على تقديرات المربعات الصغرى (OLS) كتقديرات أولية مما يجعلها نقطة انطلاق مثالية. وبعد ذلك يتم تقليص هذه المعاملات باستخدام عوامل غير سالبة مما يعزز من قابلية تفسير النموذج ودقة التنبؤ في ظل الظواهر المعقدة.

ليكن النموذج :

$$\underline{Y} = \underline{X}\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \quad , \quad \underline{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 I)$$

علماً أن $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ مستقلات وان المقدّر العام الى NNG تكوت

$$\hat{\beta}^{NNG} = \hat{c}_j \hat{\beta}_{jols} \quad \dots (8)$$

كيفية عمل طريقة NNG - Garrote

الخطوة الاولى: تُقدَّر المعاملات الأولية باستعمال طريقة OLS

$$\hat{\beta}^{ols} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$\hat{\beta}^{ols} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{bmatrix}$$

الخطوة الثانية: تُعرَّف المعاملات النهائية $\hat{\beta}^{NNG} = c_j \hat{\beta}_j^{ols}$ [9]

حيث ان

$\hat{c}_j$: هو عامل التقليل غير السالب ويمكن كتابة بالصيغة التالية ايضاً

$$\hat{c}_j(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda^2}{(\hat{\beta}_{jols}^2)}\right)_+, \quad j = 1, \dots, p \quad \dots (9)$$

شروط

تحت

$$\sum_{j=1}^p c_j \leq s, \quad \hat{c}_j \geq 0$$

الشرط $\hat{c}_j \geq 0$: الحفاظ على إشارة المعاملات الأصلية:

حيث يتم استخراج λ كما ذكرنا سابقاً

الخطوة الثالثة: تُقلَّص عوامل c_j نحو الصفر (لكنها تظل غير سالبة) عبر الجزء $\lambda \sum_{j=1}^p c_j$

حيث ان الشرط المحدد لمعلمة الجزء (معلمة الضبط λ) هي:

$$(a)^+ = \max(a, 0) \text{ و } \sum_{j=1}^p c_j = s$$

وبالتالي يصبح مقدر NNG

$$\hat{\beta}^{NNG} = \left(1 - \frac{\lambda^2}{(\hat{\beta}_j^{ols^2})}\right)_+ * \hat{\beta}_j^{ols}$$

وان الخطأ التنبؤ predictor error

$$PE = n + \sum_{i=1}^n (\beta_j - \sum_{j=1}^p \hat{\beta}_j^{ols} x_{ij})^2 \quad \dots (10)$$

وبالتالي

$$PE = n + MSE(\hat{\beta})$$

بحيث تكون طريق التحسين الثانية :

$$\hat{\beta}^{NNG} = \min_{\hat{\beta}} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^p \hat{\beta}_j^{ols} x_{ij} \right)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p \hat{\beta}_j, \text{ s.t } 0 \leq \hat{\beta}_j (j = 1, \dots, p)$$

حيث ان $MSE(\hat{\beta})$ هو الخطأ التربيعي لمتوسط المقدر $\hat{\beta}$

لذلك عندما تكون تقديرات المربعات الصغرى للمعاملات ذات قيم كبيرة يكون عامل الانكماش قريباً من 1.

مما يثبت أن تقدير *Nonnegative Garrote* يحقق اتساق التقدير واختيار النموذج إذا كان التقدير الأولي متسقاً وتم اختيار معلمة الضبط λ بشكل مناسب. يبرز ذلك قدرة *Nonnegative Garrote* على تحسين التقدير الأولي ليصبح متسقاً أيضاً في اختيار المتغيرات المهمة وهي خاصية لا تتحقق دائماً في المقدرات الأولية .

5-2 - طريقة Relaxed Lad Lasso :- [8] [6] [5]

في عام 2022 قدّم الباحثون هونغيو لي وزملاؤه طريقة جديدة لاختيار المتغيرات في نماذج الانحدار الخطي، أطلقوا عليها اسم Lasso المرن المستند إلى الانحراف المطلق الأقل (Relaxed LAD Lasso) تهدف هذه الطريقة إلى التعامل مع التحديات التي تطرحها التوزيعات الثقيلة الذيل والبيانات الشاذة، فضلاً عن معالجة التعدد الخطي والتي قد تؤثر سلباً على دقة النماذج التقليدية وتعتمد الطريقة على دمج الانحراف المطلق الأقل مع تقنية Lasso المرن في إطار من مرحلتين وتُظهر اتساقاً في اختيار المتغيرات المهمة مع زيادة حجم العينة أن هذه الطريقة تتفوق على الطرق التقليدية من حيث دقة التنبؤ والقدرة على اختيار المتغيرات ذات الأهمية بشكل أفضل من طريقتي (OLS) و (Lasso) أقل فعالية وتكون الصيغة الرياضية لمقدرات طريقة كالتالي :

$$\hat{\beta}_{Reladlasso} = \arg \min_{\beta} \left| y - \sum_{j=1}^p x_j^T \{\beta_j \cdot 1_{\delta^\lambda}\} \right| + n\lambda\phi \sum_{j=1}^p |\beta_j|, j = 1,2,3, \dots \quad (11)$$

حيث ان

δ^λ : هي دالة مؤشر لاختيار المتغيرات المهمة

$$\delta^\lambda = \{1 \leq t \leq p \mid \hat{\beta}_t^\lambda \neq 0\}$$

λ : تمثل دالة الجزاء غير الصفريية والتي ذكرناها سابقاً حيث ان $\lambda \in (0, \infty)$

ϕ : تعكس معدل نمو المتغيرات (حيث يحسب ϕ من خلال انحراف الخطأ المطلق MAD) اذ ان $\phi \in (0,1)$ وصيغته كما ذكرناها في المعادلة رقم (7) ويمتلك معامل الجزاء λ درجة الضغط المطبقة على المعاملات مما يحدد عدد المتغيرات التوضيحية التي يتم تضمينها في النموذج. في هذا البحث يتم اختيار القيم المثلى للمعاملين λ و ϕ من خلال التحقق المتقاطع (Cross-Validation) وتعرف دالة الخسارة لطريقة "Lasso المعدل بطريقة LAD" على النحو التالي:

$$L(\lambda, \phi) = E|Y - X^T \hat{\beta}| - \sigma^2 \quad \dots \quad (10)$$

وبالاعتماد على مقدرات الطرق السابقة مثل من المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) يمكننا بناء خوارزمية حل لطريقة Relaxed Lad Lasso بالاعتماد على الخوات التالية :

الخطوة الاولى : ايجاد مقدرات $\hat{\beta}_{lad}$ الانحدار المطلق

$$\hat{\beta}_{lad} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^n |y_i - x_i \beta| \quad \dots \quad (11)$$

الخطوة الثانية : ايجاد مقدرات $\hat{\beta}_{ladlasso}$ بالاعتماد على الصيغة التالية :

$$\hat{\beta}_{ladlasso} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^n |y_i - x_i \beta| + n\lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j| \quad \dots \quad (12)$$

حيث تقدر معاملات الداخلة بطريقة $\hat{\beta}_{ladlasso}$ باستعمال طريقة Relaxed Lasso التي ذكرناها سابقاً

الخطوة الثالثة : ايجاد مقدرات $\hat{\beta}_{Reladlasso}$ بالصيغة التالية :

$$\hat{\beta}_{Reladlasso} = \phi \hat{\beta}_{ladlasso} + (1 - \phi) \hat{\beta}_{lad} \quad \dots (13)$$

Comparison criteria

6- معايير مقارنة :-

هناك العديد من المعايير التي تقيس مقدار كفاءة تقديرات الطرق التي تم تداولها نظرياً اذ تم استعمال المعايير الاتية :-

1- معيار (MSE)

ويمثل متوسط مربعات الخطأ ويعطى بالصيغة التالية :-

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((Y_i - X_i^T \hat{\beta}) \right)^2 \quad \dots (14)$$

وتكون الطريقة الأفضل هي التي تعطي اقل قيمة لـ MSE

هناك العديد من المعايير التي تقيس مقدار كفاءة تقديرات الطرق التي تم تداولها نظرياً اذ تم استعمال المعايير الاتية :-

2- معيار (AMSE)

ويمثل متوسط مربعات الخطأ ويعطى بالصيغة التالية :-

$$AMSE = \frac{1}{n} E \sum_{i=1}^n \left((Y_i - X_i^T \hat{\beta}) \right)^2 \quad \dots (15)$$

وتكون الطريقة الأفضل هي التي تعطي اقل قيمة لـ AMSE

Signal to noise ratios (SNR)

3- نسبة الإشارة الضوضاء: [10]

هي مقياس يُستخدم لفهم قوة الإشارة الحقيقية مقارنة بالضوضاء العشوائية في البيانات. وتعرف رياضياً وفق المعادلة التالية :

$$SNR = \frac{Var(X\hat{\beta})}{\sigma^2} = \frac{Var(\hat{y})}{\sigma^2} \quad \dots (16)$$

وتعطى العلاقة بين نسبة الإشارة إلى الضوضاء ومعامل التحديد R^2 من خلال الصيغة التالية :

$$SNR = \frac{SSR}{SSE} = \frac{SSR/SST_0}{SSE/SST_0} = \frac{R^2}{1 - R^2}$$

والعكس:

$$R^2 = \frac{SNR}{SNR + 1}$$

Experimental aspect

7- الجانب التجريبي :-

هي مرحلة المقارنة بين طرائق التقدير الجزائية باستعمال معيار معدل متوسط مربعات الخطأ AMSE ومعامل التحديد R^2 لبيان مدى كفاءة طرائق التقدير وتحديد أي طريقة هي الأفضل من بين طرائق التقدير المستعملة والتي تمتلك أقل قيمة لمعدل متوسط مربعات الخطأ وأعلى قيمة لمعامل التحديد .

ان البيانات الحقيقية تمثل العوامل المؤثرة على ارتفاع نسبة انزيم (GPT) في الدم لوظائف الكبد لبعض المرضى في مستشفى الزهراء التعليمي في محافظة واسط لعام 2024 وتم الاعتماد على أسلوب المحاكاة (Simulation) كوسيلة لتقييم أداء الطرائق الجزائية المدروسة ضمن نموذج الانحدار الخطي العام. استُخدمت طريقة (Simulation) لتوليد بيانات اصطناعية تحقق مجموعة من السيناريوهات المختلفة من حيث خصائص المتغيرات التوضيحية وقوة الضوضاء، بهدف اختبار قدرة كل طريقة على تقدير المعلمات بدقة عالية في ظل وجود تحديات مثل التعدد الخطي واعتمدت التجربة على ضبط المعايير الأساسية لتوليد البيانات بشكل منظم، مع تكرار كل تجربة عدداً كبيراً من المرات لضمان استقرار النتائج وتحقيق مصداقية التقييم. تم تحليل أداء كل طريقة استناداً إلى نسبة إشارة إلى الضوضاء (SNR) ، مع تنفيذ جميع التجارب البرمجية باستخدام لغة R. وان الانموذج المستعمل في تجربة المحاكاة

$$Y = X^T \beta + \varepsilon , \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

$$X^T = (x_1, \dots, x_p) , \quad X \sim N(0, \Sigma)$$

$$\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)$$

والارتباط بين X_i, X_j يساوي

$$\sum = COV(X_i, X_j) = \rho^{|i-j|}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, p$$

$$\rho = 0.25, 0.50, 0.95$$

اذ تم استعمال متجه واحد لمعاملات النموذج كقيم ابتدائية والتي تم الحصول عليها من البيانات الحقيقية باستعمال طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية وحساب عدد المتغيرات التوضيحية المستعملة في تجربة المحاكاة وكالتالي :-

$$P=4$$

$$\hat{\beta} = (-0.713, 0.138, -1.424, 0.279)^T$$

وكانت نتائج المحاكاة كالتالي :-

جدول رقم (1)

يعرض القيم التقديرية لمتوسط مربعات الخطأ لمتجه المعلمات، ومعدلها، ومعامل التحديد لأنموذج الانحدار الخطي بافتراض ان

$$SNR = 0.25, \rho = 0.25, p = 4$$

Estimator methods		Nonnegative Garrote		Relaxed LAD Lasso	
(n)	P	EST	MSE ($\hat{\beta}_i$)	EST	MSE ($\hat{\beta}_i$)
30	$\hat{\beta}_1$	-0.6165	0.3664	-0.5213	0.5398
	$\hat{\beta}_2$	0.1251	0.3177	0.0269	0.3990
	$\hat{\beta}_3$	-1.3140	0.4712	-1.1603	0.8822
	$\hat{\beta}_4$	0.2088	0.3228	0.1575	0.4150
50	$\hat{\beta}_1$	-0.6152	0.2448	-0.6051	0.3585
	$\hat{\beta}_2$	0.1218	0.1845	0.0751	0.2685
	$\hat{\beta}_3$	-1.3846	0.2432	-1.3591	0.4295
	$\hat{\beta}_4$	0.2292	0.1856	0.2078	0.2956
100	$\hat{\beta}_1$	-0.6476	0.1217	-0.6684	0.1798
	$\hat{\beta}_2$	0.1141	0.0896	0.0744	0.1367
	$\hat{\beta}_3$	-1.4155	0.1152	-1.4052	0.1767
	$\hat{\beta}_4$	0.2367	0.0995	0.2427	0.1620
AMSE OF MODEL		8.87		9.30	
R^2		0.23		0.20	

جدول رقم (2)

يعرض القيم التقديرية لمتوسط مربعات الخطأ لمتجه المعلمات، ومعدلها، ومعامل التحديد لأنموذج الانحدار الخطي بافتراض ان

$$SNR = 0.25, \rho = 0.95, p = 4$$

Estimator methods		Nonnegative Garrote		Relaxed LAD Lasso	
(n)	p	EST	MSE ($\hat{\beta}_i$)	EST	MSE ($\hat{\beta}_i$)
30	$\hat{\beta}_1$	-0.7448	4.3004	-0.6109	2.6223
	$\hat{\beta}_2$	0.1378	9.5565	-0.1147	5.1407
	$\hat{\beta}_3$	-1.3633	8.8210	-0.8698	4.9798
	$\hat{\beta}_4$	0.3193	4.2676	-0.0728	2.8278
50	$\hat{\beta}_1$	-0.7292	2.4819	-0.6317	1.7756
	$\hat{\beta}_2$	0.2140	4.9439	-0.1469	2.7804
	$\hat{\beta}_3$	-1.5191	5.0733	-0.9359	3.4175
	$\hat{\beta}_4$	0.3324	2.6937	-0.0502	2.1541
100	$\hat{\beta}_1$	-0.7219	1.2180	-0.6351	1.0818
	$\hat{\beta}_2$	0.1409	2.2858	-0.1559	1.5437
	$\hat{\beta}_3$	-1.4431	2.3084	-0.9479	1.9608
	$\hat{\beta}_4$	0.3243	1.1240	-0.0012	0.9570
AMSE OF MODEL		10.58		11.12	
R^2		0.24		0.20	

في جدول رقم (1) عند انخفاض نسبة الإشارة إلى الضوضاء ($SNR = 0.25$) مع وجود ارتباط ضعيف بين المتغيرات، أظهرت طريقة **Nonnegative Garrote** أداءً متفوقاً مقارنة مع **Relaxed LAD Lasso**. فقد حققت أقل معدل لمتوسط مربعات الخطأ ($AMSE$) وأعلى معامل تحديد، خصوصاً عند زيادة حجم العينة إلى 100، حيث انخفضت أخطاء التقدير بشكل ملحوظ. هذا يشير إلى أن الطريقة فعالة في معالجة الضوضاء وتجاهل المتغيرات غير المؤثرة دون التضحية بالدقة.

وفي جدول رقم (2) ومع رغم بقاء SNR منخفضاً عند 0.25، فإن وجود ارتباط قوي بين المتغيرات ($\rho=0.95$) زاد من تعقيد التقدير. مع ذلك، تفوقت **Nonnegative Garrote** على **Relaxed LAD Lasso**، حيث قللت من أثر التعدد الخطي وقدمت تقديرات أقل تقلباً حتى عند حجم عينة صغير ($n=30$). قدرتها على التحكم في التباين عززت من استقرار النتائج رغم التحديات المرتبطة بالبيانات.

جدول رقم (3)

يعرض القيم التقديرية لمتوسط مربعات الخطأ لمتجه المعلمات، ومعدلها، ومعامل التحديد لأنموذج الانحدار الخطي بافتراض ان $SNR = 0.93, \rho = 0.25, p = 4$

Estimator methods		Nonnegative Garrote		Relaxed LAD Lasso	
(n)	p	EST	MSE ($\hat{\beta}_i$)	EST	MSE ($\hat{\beta}_i$)
30	$\hat{\beta}_1$	-0.5703	0.1447	-0.6680	-0.5703
	$\hat{\beta}_2$	0.0740	0.0674	0.0819	0.0740
	$\hat{\beta}_3$	-1.3524	0.1448	-1.3815	-1.3524
	$\hat{\beta}_4$	0.1575	0.0858	0.2226	0.1575
50	$\hat{\beta}_1$	-0.6173	0.0894	-0.6946	-0.6173
	$\hat{\beta}_2$	0.0751	0.0443	0.0999	0.0751
	$\hat{\beta}_3$	-1.3923	0.0682	-1.4132	-1.3923
	$\hat{\beta}_4$	0.1766	0.0629	0.2487	0.1766
100	$\hat{\beta}_1$	-0.6676	0.0367	-0.7081	-0.6676
	$\hat{\beta}_2$	0.0804	0.0212	0.1177	0.0804
	$\hat{\beta}_3$	-1.4079	0.0326	-1.4182	-1.4079
	$\hat{\beta}_4$	0.1929	0.0379	0.2617	0.1929
AMSE OF MODEL		2.43		2.49	
R^2		0.50		0.49	

جدول رقم (4)

يعرض القيم التقديرية لمتوسط مربعات الخطأ لمتجه المعلمات، ومعدلها، ومعامل التحديد لأنموذج الانحدار الخطي بافتراض ان $SNR = 0.93, \rho = 0.90, p = 4$

Estimator methods		Nonnegative Garrote		Relaxed LAD Lasso	
(n)	p	EST	MSE ($\hat{\beta}_i$)	EST	MSE ($\hat{\beta}_i$)
30	$\hat{\beta}_1$	-0.7321	1.1437	-0.6755	0.9366
	$\hat{\beta}_2$	0.2209	2.2516	-0.1008	1.5231
	$\hat{\beta}_3$	-1.4132	2.3367	-0.9537	2.0556
	$\hat{\beta}_4$	0.2717	1.0666	-0.0068	1.058
50	$\hat{\beta}_1$	-0.6926	0.6461	-0.6054	0.6203
	$\hat{\beta}_2$	0.1713	1.1786	-0.1224	1.0386
	$\hat{\beta}_3$	-1.3753	1.2998	-1.0120	1.2754
	$\hat{\beta}_4$	0.2246	0.6345	-0.0037	0.6702
100	$\hat{\beta}_1$	-0.6837	0.3272	-0.6176	0.3698
	$\hat{\beta}_2$	0.1335	0.5892	-0.0927	0.6446
	$\hat{\beta}_3$	-1.3801	0.6635	-1.0969	0.8649
	$\hat{\beta}_4$	0.2378	0.3379	0.0678	0.4338
AMSE OF MODEL		2.85		2.96	
R^2		0.50		0.48	

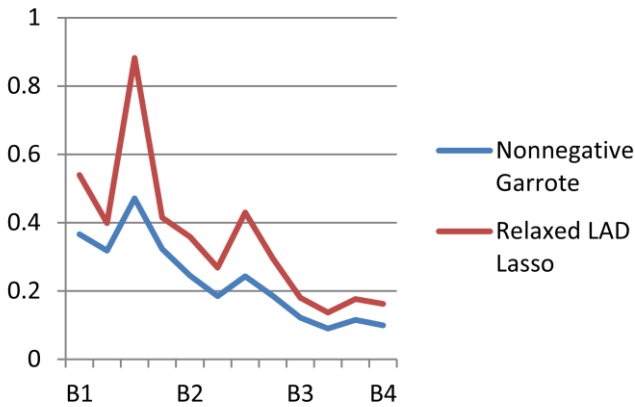
في جدول رقم (3) ومع ارتفاع SNR إلى 0.93 وبوجود ارتباط ضعيف، وفر هذا السيناريو بيئة مثالية للاختبار فكانت **Nonnegative Garrote** مرة أخرى هي الأفضل من حيث دقة التقدير، خصوصاً في تقدير بعض المعاملات الحساسة، وأظهرت انخفاضاً كبيراً في قيم الخطأ عند $n = 100$. الاستفادة من جودة البيانات وقلة التداخل بين المتغيرات ساعد الطريقة على تقديم نتائج دقيقة ومتناسكة.

في جدول رقم (4) وفي هذا السيناريو المعقد الذي يجمع بين جودة بيانات عالية ($SNR = 0.93$) وارتباط مرتفع بين المتغيرات ($\rho = 0.90$)، استمرت **Nonnegative Garrote** في التفوق، خصوصاً في النماذج ذات العينات الصغيرة ($n = 30$)، حيث حافظت على استقرار التقديرات مقارنة بطريقة Relaxed LAD Lasso التي أظهرت تذبذباً واضحاً. هذا يعكس قدرة الطريقة على الموازنة بين الاستفادة من الإشارة والسيطرة على التعدد الخطي.

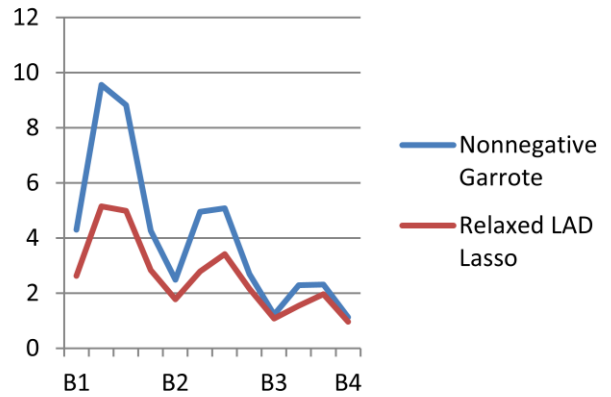
Conclusion

8- الاستنتاج :-

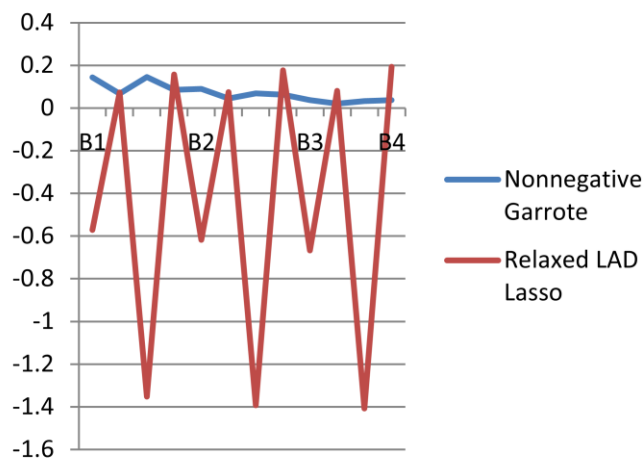
تشير النتائج في جميع الجداول إلى أن طريقة Nonnegative Garrote هي الأكثر استقراراً ودقة في مختلف الظروف، سواء عند انخفاض أو ارتفاع نسبة الإشارة إلى الضوضاء (SNR)، ومع وجود ارتباط ضعيف أو قوي بين المتغيرات، كما أثبتت كفاءتها في أحجام العينات الصغيرة والكبيرة على حد سواء. لذلك، يُوصى باعتمادها كنموذج أساسي في التحليل، خاصة في البيانات الطبية التي تتسم ببيانات معقدة، مع ضرورة الحرص على تحسين جودة البيانات وتوسيع حجم العينة كلما أمكن ذلك للحصول على تقديرات أكثر موثوقية.



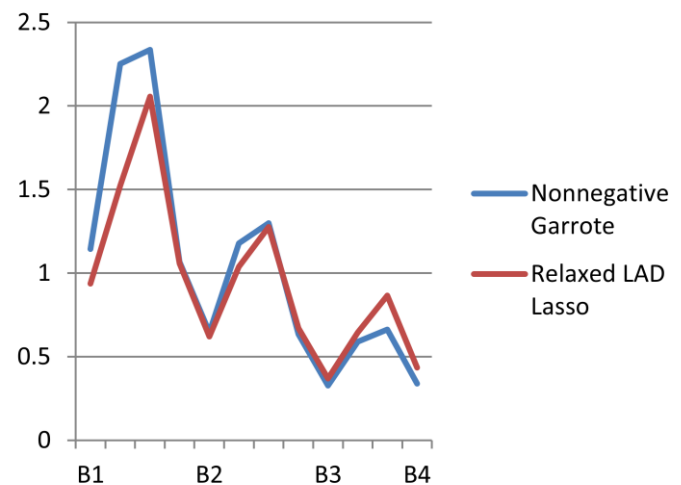
شكل رقم (1)
الرسم البياني للجدول رقم 1



شكل رقم (2)
الرسم البياني للجدول رقم 2



شكل رقم (3)
 الرسم البياني للجدول رقم 3



شكل رقم (4)
 الرسم البياني للجدول رقم 4

9- المصادر

- [1] -Breiman, L. (1995). Better subset regression using the nonnegative garrote. *Technometrics*, 37(4), 373–384.
- [2]- Cantoni, E., Mills Flemming, J., & Ronchetti, E. (2011). Variable selection in additive models by non-negative garrote. *Statistical Modelling*, 11(3), 237–252.
- [3]- Fan, J., & Li, R. (2001). Variable selection via nonconcave penalized likelihood and its oracle properties. *Journal of the American Statistical Association*, 96(456), 1348–1360.
- [4] -Farrar, D. E., & Glauber, R. R. (1967). Multicollinearity in Regression Analysis: The Problem Revisited. *The Review of Economics and Statistics*, 49(1), 92–107.
- [5] - Li, H., Xu, X., Lu, Y., Yu, X., Zhao, T., & Zhang, R. (2022). Robust Variable Selection Based on Relaxed Lad Lasso. *Symmetry*, 14(10), 2161.

- [6] - Meinshausen, N. (2007). Relaxed lasso. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(1), 374–393.
- [7] - Motogaito, H., Sugimoto, T., & Goto, M. (2007). Non-negative garrote estimators and their performance in MARS. *Japanese Journal of Applied Statistics*, 36(2&3), 99–118.
- [8] - Wang, H., Li, G., & Jiang, G. (2007). Robust regression shrinkage and consistent variable selection via the LAD-Lasso. *Journal of Business & Economic Statistics*, 25(3), 347–355.
- [9] - Yuan, M., & Lin, Y. (2007). On the non-negative garrote estimator. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 69(2), 143–161.
- [10] - Soch, Joram (2024) Relationship to coefficient of determination The Book of Statistical Proofs 639-640