Warith Scientific Journal

تطوير توزيع X-shanker باسخدام تحويل Dus مع تطبيق عملي .

A New Application of DUS Transformation on X-shanker Distribution with Real Data Sets.

زهراء احمد هاشم عبد
Zahraa A. Hashem
كلية الإدارة والاقتصاد جامعة كربلاء
College of Administration and Economics, University of Karbala
Zahraa.a@s.uokerbala.edu.iq

أ.م. د ايناس عبد الحافظ محمد
Enas A. Mohammed
كلية الإدارة والاقتصاد جامعة كربلاء College of Administration and Economics, University of Karbala
enas.albsri@uokerbala.edu.iq

أ.م. زينب حسن عبود
Zainab H. Abood
كلية الإدارة والاقتصاد جامعة كربلاء College of Administration and Economics, University of Karbala
zainab.hasan@uokerbala.edu.iq

المستخلص:

يقدم هذا البحث تطويرًا جديدًا في نمذجة التوزيعات الاحتمالية من خلال تطبيق تحويل DUS على توزيع X-Shanker، مما ينتج عنه توزيع معدل يُعرف باسم توزيع X-Shanker المقتطع وفقًا لتحويل DUS. يهدف هذا التعديل إلى تحسين مرونة وكفاءة التوزيع في تمثيل البيانات الواقعية.

تم تحليل سلوك دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمية للتوزيع الجديد، ومقارنته بالتوزيع الأصلي، مع اشتقاق خصائصه الهيكلية مثل المتوسط، التباين، الدوال اللحظية، ودالة الموثوقية. كما تم تقدير معلمات التوزيع الجديد باستخدام طريقة التقدير بأقصى احتمال (MLE) لضمان دقة التقديرات.

لتقييم أداء التوزيع المقترح، تم تطبيقه على مجموعات بيانات حقيقية، حيث أظهرت النتائج قدرة التوزيع الجديد على تقديم ملاءمة أفضل للبيانات مقارنة بالنماذج الاحتمالية التقليدية. توضح هذه الدراسة أهمية استخدام تحويل DUS في تحسين التوزيعات الاحتمالية وتوسيع نطاق استخدامها في التحليل الإحصائي والبيانات التطبيقية.

الكلمات المفتاحية: توزيع X-shanker، تقدير دالة البقاء للتوزيع، طريقة الإمكان الأعظم,أمثلة حسابية.

Abstract:

This research presents a new development in probability distribution modeling by applying the DUS transformation to the X-Shanker distribution, resulting in a modified distribution known as the truncated X-Shanker distribution under the DUS transformation. This modification aims to enhance the flexibility and efficiency of the distribution in representing real-world data.

The behavior of the probability density function and the cumulative distribution function of the new distribution has been analyzed and compared with the original distribution. Additionally, its structural properties, such as mean, variance, moment functions, and reliability function, have been derived. The parameters of the new distribution have been estimated using the maximum likelihood estimation (MLE) method to ensure accurate parameter estimation.

To evaluate the performance of the proposed distribution, it has been applied to real-world datasets, where the results showed that the new distribution provides a better fit for the data compared to traditional probability models. This study highlights the importance of using the DUS transformation in improving probability distributions and expanding their applicability in statistical analysis and applied data studies

Keywords: X-shanker Distribution, Survival Function Estimation, Maximum Possibility Method, Computational example.

1- المقدمة:

شهد تطوير التوزيعات الاحتمالية الأساسية تقدمًا كبيرًا في السنوات الأخيرة، ويعتمد هذا التطور على تقنيات وأساليب متنوعة. تركز بعض هذه الأساليب على دالة التوزيع التراكمي (CDF)، بينما تعتمد أخرى على دالة الكثافة الاحتمالية (PDF)، وهناك من يدمج بينهما لإنشاء توزيعات أكثر مرونة وتطبيقية في مختلف المجالات العلمية والعملية.

إحدى التقنيات الشهيرة هي التحويل DUS، حيث اقترح العديد من الباحثين استراتيجيات تحويل مختلفة، بما في ذلك ما قدمه Gupta وآخرون (1998)، إذ استخدموا دالة التوزيع التراكمي (CDF) لتوزيع أساسي لإنشاء نماذج جديدة عن طريق رفع دالة التوزيع التراكمي لأساس التوزيع إلى قوة معينة.

$t > 0$ هو متغير عشوائي, $\alpha > 0$ هو معلمة الشكل. $G(t) = [F(t)]^{\alpha}$

حيث ستكون G دالة التوزيع التراكمي المقترحة. اقترح شو وباكلي (2009) في [14] خريطة التحويل التربيعية للرتب لتعديل التوزيعات.

كما قدم محمد والكديم [10] [11] طريقة تحويل تعتمد على دالة البقاء، وذلك بهدف تطوير توزيعات عمر جديدة.

$$G(t) = (1+\gamma)F(t) - \gamma\,\{F(t)\}^2 \quad where\ \ 1 > \gamma > -1$$

$$S(t)_{new} = (1+\rho)\,S^2(t) - \rho\,S(t) \qquad |\rho| \le 1$$

حيث إن $S(t)$ هي دالة البقاء الأساسية لتوزيع معين.

تُعد تقنية تحويل **DUS**، التي قدمها Kalsoom Akhtar وآخرون (2021) [1]، من الأساليب الحديثة، حيث تعتمد على تطبيق تعديل أسي على دالة التوزيع التراكمي **(CDF)** ودالة الكثافة الاحتمالية **(PDF)** للتوزيع الأساسي.

$$g(x) = \frac{1}{e-1} f(t) e^{F(t)} \qquad (1)$$

$$G(t) = \frac{1}{e-1}\left[e^{F(t)} - 1\right] \qquad (2)$$

حيث إن $f(t)$ هي دالة الكثافة الاحتمالية (*PDF*) للتوزيع الأساسي، و$F(t)$ هي دالة التوزيع التراكمي (*CDF*) للتوزيع الأساسي، و $e^{F(t)}$ هو تحويل أسي يتم تطبيقه على دالة التوزيع التراكمي.

العامل $\frac{1}{e-1}$ هو ثابت تطبيع يضمن تكامل دالة الكثافة الاحتمالية (*PDF*) إلى 1 على مدى *t*.

تم استخدام هذه الطريقة مع توزيعات مختلفة، مثل التوزيع الأسي وتوزيع *Weibull*[2] [6]، لاشتقاق نماذج جديدة ومرنة مناسبة لتحليل البقاء ودراسات الموثوقية.

في هذا البحث، نقوم بتطبيق تحويل *DUS* على توزيع *X-shanker* ذو المعلمة الواحدة [4]، ثم نقوم بتقدير معلمات التوزيعات الجديدة باستخدام طريقة الاحتمال الأعظم.

كما يتم استخدام أمثلة لمجموعات بيانات حقيقية لاختبار صلاحية التوزيعات الجديدة من خلال مقارنتها بالتوزيعات الأساسية.

2- هدف البحث *Research objective*:

تهدف هذه البحث إلى تطوير توزيع احتمالي جديد باستخدام تحويل *DUS*، وذلك من خلال:

1- تحسين مرونة التوزيع وزيادة قدرته على ملاءمة البيانات الواقعية.
2- تحليل الخصائص الرياضية والإحصائية للتوزيع الجديد.
3- اختبار طرق تقدير المعلمات الخاصة بالتوزيع باستخدام المقاييس الإحصائية منها طريقة الإمكان الأعظم *MLE*.
4- تقييم أداء التوزيع الجديد عبر أسلوب المحاكاة باستخدام أحجام عينات مختلفة.
5- تحسين النماذج الاحتمالية المستخدمة في التطبيقات العملية عبر تطوير هذا التوزيع الجديد.

3- مشكلة البحث *Research problem*:

تتمثل مشكلة البحث في تطوير توزيع احتمالي جديد يعتمد على تحويل *DUS*، وذلك استجابةً للحاجة المتزايدة إلى نماذج احتمالية أكثر دقة ومرونة في تحليل البيانات المعقدة. حيث إن التوزيعات الاحتمالية التقليدية غالبًا ما تكون غير كافية لتمثيل بعض أنواع البيانات بشكل دقيق، مما يستدعي ابتكار توزيعات أكثر ملاءمة. بناءً على ذلك، تتحدد مشكلة البحث في:

- تطوير توزيع احتمالي جديد يعتمد على تحويل *DUS*.
- تقديم نموذج أكثر توافقًا مع البيانات المعقدة، مع إجراء تطبيق عملي للتحقق من دقته وكفاءته.

4- تحويل *DUS* لتوزيع *X-shanker* ذو المعلمة الواحدة (*DUS-X-sh*):

يُعرف توزيع *Lindley* ذو المعلمة الواحدة من خلال دالة الكثافة الاحتمالية (*PDF*) ودالة التوزيع التراكمي (*CDF*)، ويُعد من التوزيعات المهمة في تحليل البيانات المتعلقة بزمن الحياة والموثوقية. وفي هذا البحث، تم التركيز على تطبيق تحويل *DUS* على توزيع *X-shanker* ذي المعلمة الواحدة، وذلك بهدف تطوير توزيع جديد يُظهر مرونة أكبر في التمثيل الإحصائي للبيانات.

بناءً على ذلك، فإن دالتي الكثافة الاحتمالية والتوزيع التراكمي للتوزيع المحوّر *DUS-X-shanker* تُشتقان من الصيغ الأساسية لتوزيع *X-shanker*، مع إدخال تحويل *DUS* عليهما، مما يؤدي إلى تعديل في سلوك التوزيع من حيث الشكل والانتشار. التغيرات الملحوظة في الجداول والرسوم البيانية ليست عشوائية، وإنما نتيجة مباشرة لهذا التحويل الرياضي المنهجي.

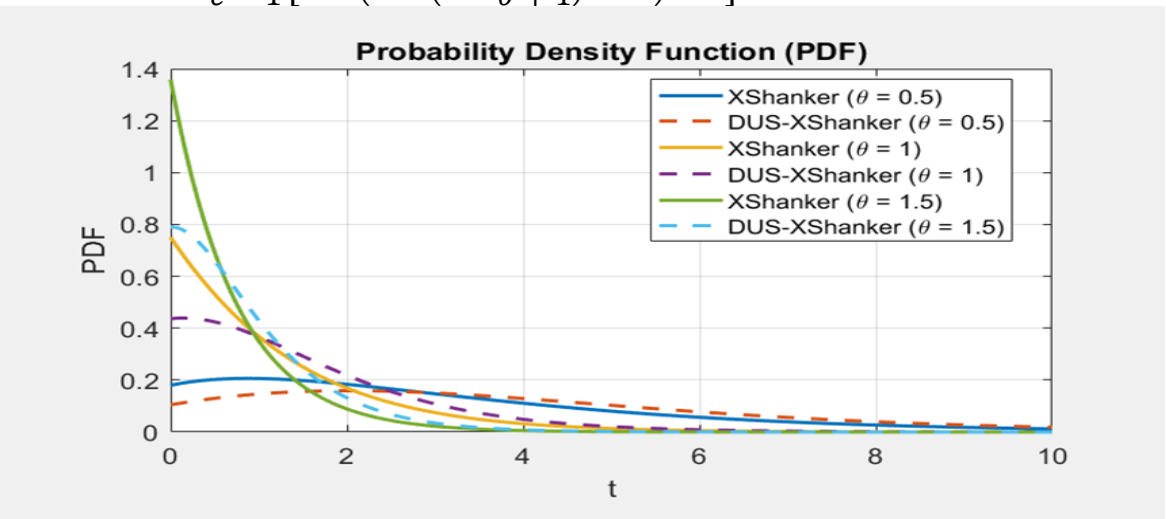
$$f(t,\theta) = \frac{\theta^2(t+1)}{\theta+1} e^{-\theta t} \qquad t > 0 \ ,\theta > 0 \qquad (3)$$

$$F(t,\theta) = 1 - \left(1 + \frac{\theta t}{\theta+1}\right) e^{-\theta t} \qquad t > 0 \ ,\theta > 0 \qquad (4)$$

لذلك، دالة الكثافة الاحتمالية (*pdf*) ودالة التوزيع التراكمي (*cdf*) لتوزيع *DUS-Xsh* تكون كما يلي:

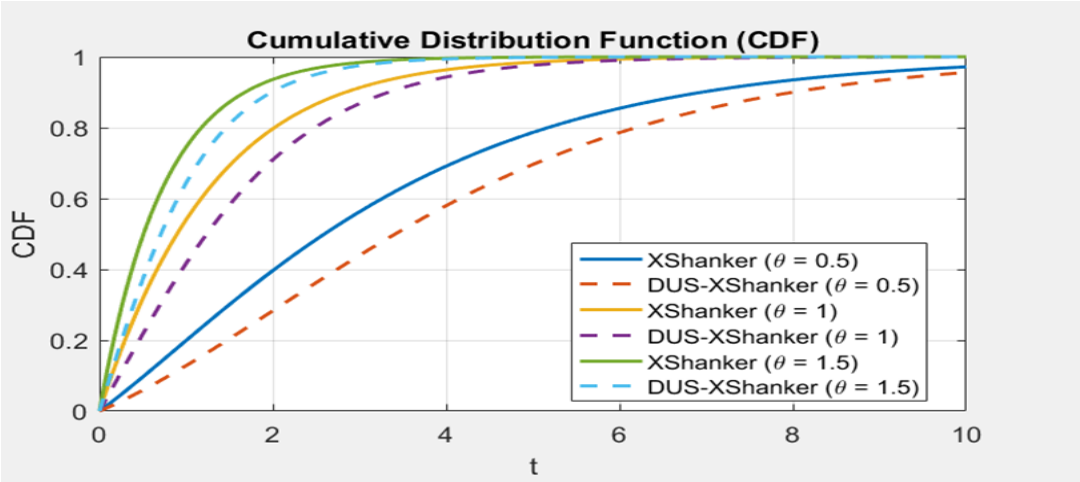
$$g(t,\theta) = \frac{1}{e-1} \frac{\theta^2(t+1)}{\theta+1} \exp\left(1 - \left(1 + \frac{\theta t}{\theta+1}\right) e^{-\theta t}\right) \qquad (5)$$

$$G(t,\theta) = \frac{1}{e-1} \left[\exp\left(1 - \left(1 + \frac{\theta t}{\theta+1}\right) e^{-\theta t}\right) - 1\right] \qquad (6)$$

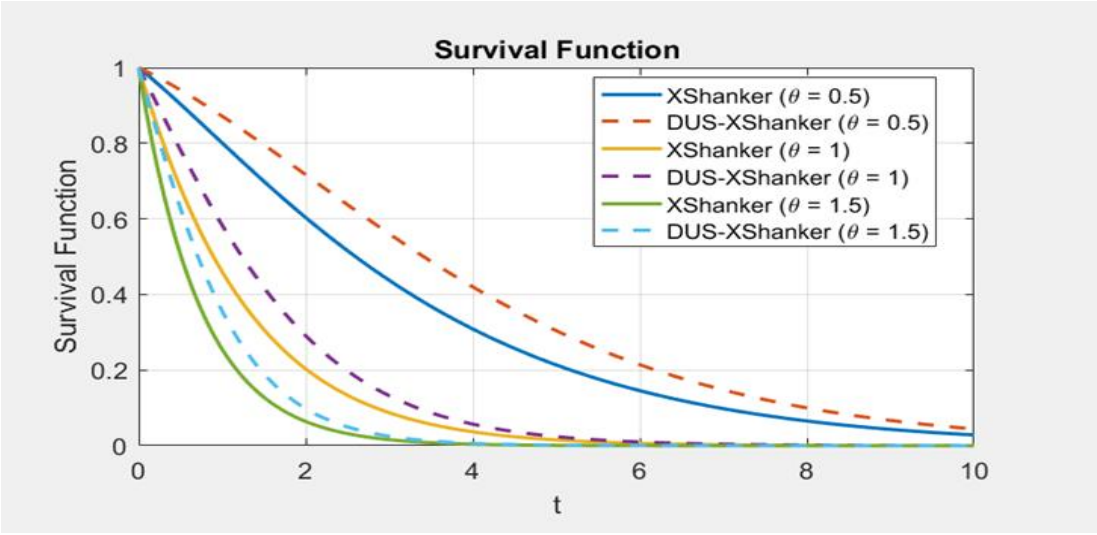


الشكل 1. منحنيات دالة الكثافة الاحتمالية الأصلية لتوزيع *X-shanker* و *DUS-X-sh* عند قيم مختلفة لـ θ.

الشكل (1) يعطي مثالاً لدالة الكثافة الاحتمالية (*pdf*) لتوزيع *DUS-Xsh* المحول لثلاث قيم مختلفة للمعلمة θ. يمكن ملاحظة أنه عندما تزيد قيمة θ، يتحرك قمة منحنى التوزيع، مما يوضح كيف يصبح التوزيع الجديد أكثر انتشارًا أو تركيزًا اعتمادًا على قيمة θ، وبالتالي فإن صيغة التحويل قد أثرت على سلوك ذيل التوزيع.



الشكل 2. منحنيات دالة التوزيع التراكمي (*cdf*) الأصلية لتوزيع *X-shanker* و *DUS X-shanker* عند قيم مختلفة لـ θ.



الشكل 3. منحنيات دالة البقاء لتوزيع *X-shanker* و *DUS X-shanker* الأصلية عند قيم مختلفة لـ θ.

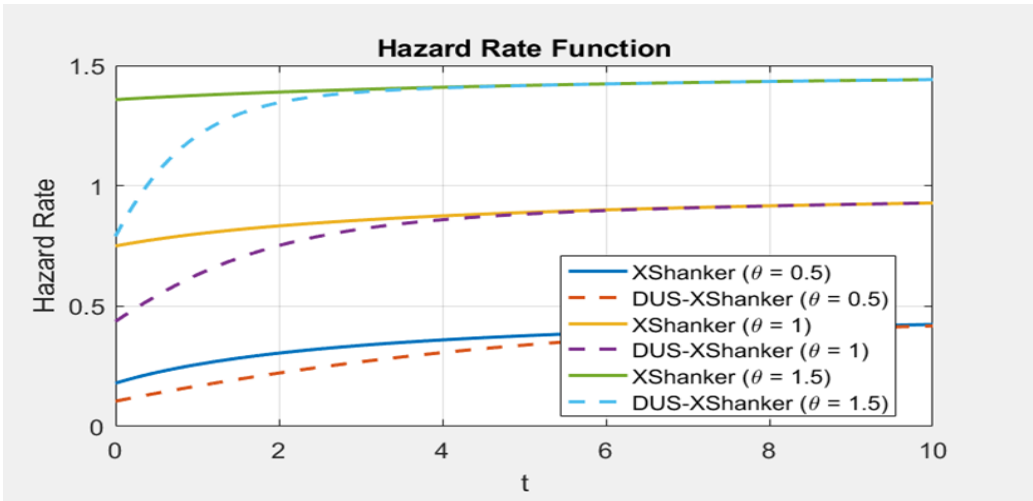
في الشكل (3) تم رسم ثلاث منحنيات لثلاث قيم مختلفة لـ θ لاختبار تأثير صيغة التحويل على دالة البقاء.
وتم إعطاء دوال البقاء والمخاطر لتوزيع *DUS-L1*.

$$s(t,\theta) = 1 - G(t,\theta)$$

$$S(t,\theta) = 1 - \frac{1}{e-1}\left[\exp\left(1 - \left(1 + \frac{\theta t}{\theta + 1}\right)e^{-\theta t}\right) - 1\right] \qquad (7)$$

$$h(t,\theta) = \frac{1}{e - e^{F(t)}} f(t) e^{F(t)}$$

$$h(t,\theta)=\frac{1}{e-e^{1-\left(1+\frac{\theta t}{\theta+1}\right)e^{-\theta t}}}\frac{\theta^2(t+1)}{\theta+1}e^{-\theta t}\cdot e^{1-\left(1+\frac{\theta t}{\theta+1}\right)e^{-\theta t}} \qquad (8)$$



الشكل 4. منحنيات دالة المخاطر لتوزيع *X-shanker* و *DUS X-shanker* الأصلية عند قيم مختلفة لـ θ.

5- بعض الخصائص الإحصائية للتوزيع الجديد فيما يلي.

(5-1)المتوسط (القيمة المتوقعة): *Mean*:

نعلم ان القيمة المتوقعة $E(x)$ تعطي بالعلاقة التالية:

$$E(t)=\int_0^\infty t\,g(t)\,dt$$

استبدل $g(t)$ للتكامل أعلاه

$$g(t)=\frac{1}{e-1}\cdot\frac{\theta^2}{(\theta^2+1)^2}\,[\theta^3+2\theta+t]e^{-\theta t}\;.e^{1-\left[1+\frac{\theta x}{(\theta^2+1)^2}\right]e^{-\theta x}}$$

$$E(t)=\int_0^\infty t\,\frac{1}{e-1}\cdot\frac{\theta^2}{(\theta^2+1)^2}\,[\theta^3+2\theta+t]e^{-\theta t}\;.e^{1-\left[1+\frac{\theta x}{(\theta^2+1)^2}\right]e^{-\theta x}}\,dt$$

لحساب التكامل، نستخدم التوسع الدالي للدالة الأسية باستخدام المتسلسلة.

$$\boldsymbol{e^{F(t)}=e^{1-\left(1+\frac{\theta t}{(\theta^2+1)^2}\right)e^{-\theta t}}}$$

$$=\;e.e^{-\left(1+\frac{\theta t}{(\theta^2+1)^2}\right)e^{-\theta t}}$$

التوسع باستخدام المتسلسلة للدالة الأسية.

$$e^{-\left(1+\frac{\theta t}{(\theta^2+1)^2}\right)e^{-\theta t}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left(1+\frac{\theta t}{(\theta^2+1)^2}\right)^m e^{-m\theta t}$$

$$E(t)=\int_0^\infty t.\frac{\theta^2}{(\theta^2+1)^2(e-1)}(\theta^3+2\theta+t)e^{-\theta t}.e.\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left(1+\frac{\theta t}{(\theta^2+1)^2}\right)^m e^{-m\theta}$$

لحساب التكامل نستخدم (دالة جاما):

حيث:

$$\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}\, dt \;= \frac{\Gamma_{(n+1)}}{\lambda^{n+1}}$$

الجزء الأول من التكامل:

$$\int_0^\infty t\,(\theta^3+2\theta)\left(1+\frac{\theta t}{(\theta^2+1)^2}\right)^m e^{-(m+1)\theta t}\, dt$$

الجزء الثاني من التكامل:

$$\int_0^\infty t^2\left(1+\frac{\theta t}{(\theta^2+1)^2}\right)^m e^{-(m+1)\theta t}\, dt$$

بعد حساب التكامل نحصل على:

$$E(t) = \frac{e\theta^2}{(\theta^2+1)^2(e-1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left[\frac{\Gamma(2)}{\left((m+1)\theta\right)^2}+\frac{\Gamma(3)}{\left((m+1)\theta\right)^3}\right]$$

(5-2) العزوم (*Moments*):

يعطي العزم من الرتبة r بالعلاقة التالية:

$$u'_r = E(t^r) = \int_0^\infty t^r \cdot g(t)\, dt$$

بالتعويض عن $g_{(x)}$, نحصل على:

$$U'_r = \int_0^\infty t^r . \frac{\theta^2}{(\theta^2+1)^2(e-1)}(\theta^3+2\theta+t)e^{-\theta t}. e^{1-\left(1+\frac{\theta t}{(\theta^2+1)^2}\right)e^{-\theta t}}\, dt$$

لحساب التكامل, نشر الدالة الاسية:

$$e^{F(t)} = e^{1-\left(1+\frac{\theta t}{(\theta^2+1)^2}\right)e^{-\theta t}} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left(1+\frac{\theta t}{(\theta^2+1)^2}\right)^m e^{-m\theta t}$$

$$U'_r = \frac{e\theta^2}{(\theta^2+1)^2(e-1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\cdot\int_0^\infty t^r(\theta^3+2\theta+t)\left(1+\frac{\theta t}{(\theta^2+1)^2}\right)^m e^{-(m+1)\theta t}\, dt$$

بعد تبسيط التكامل, نستعمل دالة غاما:

$$U'_r = \frac{e\theta^2}{(\theta^2+1)^2(e-1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\cdot\int_0^\infty t^r(\theta^3+2\theta+t)\left(1+\frac{\theta t}{(\theta^2+1)^2}\right)^m e^{-(m+1)\theta t}\, dt$$

وأيضا:

$$\int_\sigma^\infty t^n e^{-\lambda t}\, dt \qquad = \frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^{n+1}}$$

الجزء الأول من تكامل العزم:

$$\int_0^\infty t^r\,(\theta^3+2\theta)\left(1+\frac{\theta t}{(\theta^2+1)^2}\right)^m e^{-(m+1)\theta t}\;dt$$

الجزء الثاني من تكامل العزم:

$$\int_0^\infty t^{r+1}\left(1+\frac{\theta x}{(\theta^2+1)^2}\right)^m e^{-(m+1)\theta t}\;dt$$

بعد حساب التكامل, نحصل على:

$$U_r' = \frac{e\theta^2}{(\theta^2+1)^2(e-1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{-(1)^m}{m!}\left[\frac{\Gamma(r+1)}{\big((m+1)\theta\big)^{r+1}}+\frac{\Gamma(r+2)}{\big((m+1)\theta\big)^{r+2}}\right]$$

الان يمكننا استخدام المعادلة الأخيرة لأيجاد تباين التوزيع بحيث:

$$var\,(t) = \mu_2' - (\mu_1')^2$$

حيث:

u_1': هو العزم الأول (المتوسط), والذي قمت بحسابة بالفعل.

u_2': هو العزم الثاني, والذي يمكن حسابة باستخدام الصيغة للعزم *th-r*.

بحيث:

$$\mu_2' = \frac{e\theta^2}{(\theta^2+1)^2(e-1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{-(1)^m}{m!}\left[\frac{\Gamma(3)}{\big((m+1)\theta\big)^{3}}+\frac{\Gamma(4)}{\big((m+1)\theta\big)^{4}}\right]$$

بمجرد حساب u_2', u_1' , نقوم بتعويضهما في معادلة التباين للحصول على *var(t)*.

6- معامل الالتواء (*Coefficient of Skewness*):

يقيس الالتواء عدم تناظر التوزيع. يشير الذيل الأطول على اليمين إلى التواء موجب، بينما يشير الذيل الأطول على اليسار إلى التواء سالب. تُستخدم العزوم الأول والثاني والثالث لحساب الالتواء.

$$Skewness(t)= \frac{\mu_2'-3\mu_1'\mu_2'+2(\mu_1')^3}{var(t)^{3/2}}$$

حيث u_3' هو العزم الثالث، والذي يمكن حسابه باستعمال الصيغة الخاصة للعزم *th-r*.

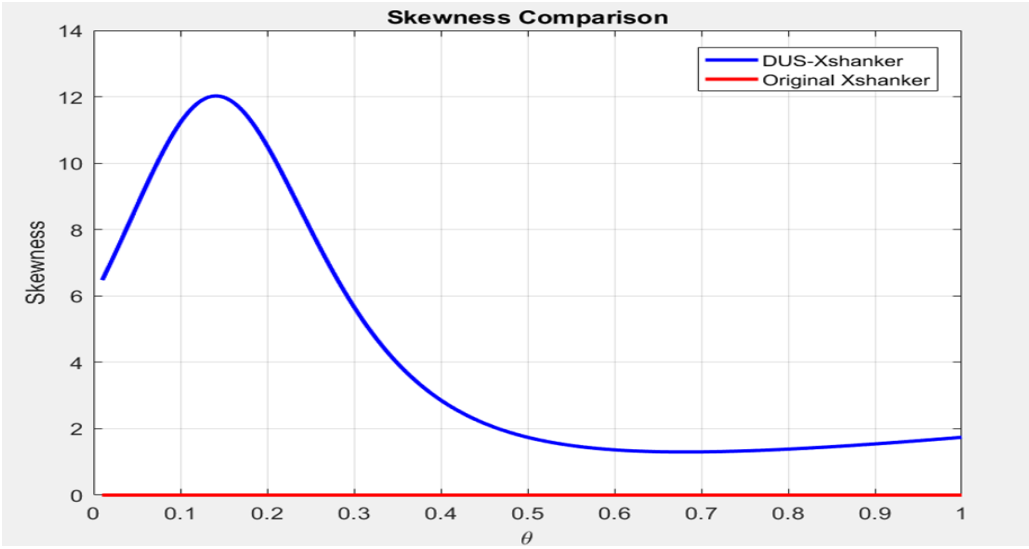
$$\mu_3' = \frac{e\theta^2}{(\theta^2+1)^2(e-1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{-(1)^m}{m!}\left[\frac{\Gamma(4)}{\big((m+1)\theta\big)^{4}}+\frac{\Gamma(5)}{\big((m+1)\theta\big)^{5}}\right]$$

استبدل u_1', u_2' و u_3' في صيغة الانحراف لحساب الانحراف (t).

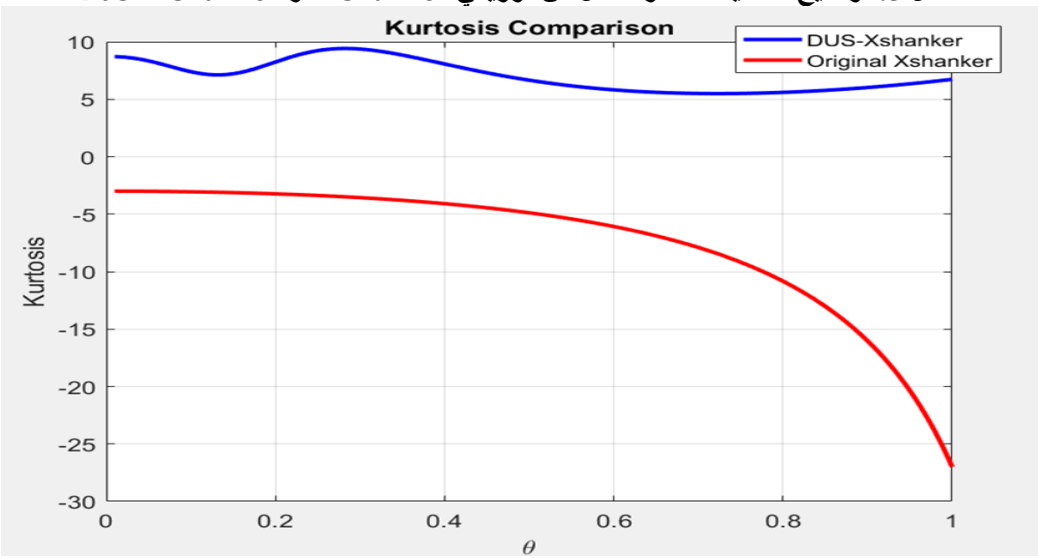
7- معامل التفرطح (*Coefficient of Kurtosis*):

يتم قياس "ثقل الأجنحة" او الذيل للتوزيع باستخدام االتفرطح. تشير القيم العالية التفرطح إلى الأجنحة الثقيلة، بينما تشير القيم المنخفضة إلى الأجنحة الخفيفة. يتم استخدام اللحظات الأولى والثانية والثالثة والرابعة لحساب التفرطح.

$$Kurtosis(t) = \frac{\mu_4' - 4\mu_1'\mu_3' + 6\mu_1'\mu_2' + 3(\mu_1')^4}{(var(t))^2}$$



الشكل 5. توضيح منحنيات الالتواء لكل من توزيعي *X-shanker* و *Dus-X-shanker*



الشكل 6. توضيح منحنيات التفرطح لكل من توزيعي *X-shanker* و *Dus-X-shanker*

8- تقدير معلمات توزيع *Dus-X-shanker*

يتم تقدير معلمة التوزيع الجديد من أجل تقييم التطبيق العملي لتوزيع *DUS-X-sh*. نقوم بتقدير معلمة θ لتوزيع *DUS-Xsh* باستعمال طريقة الإمكان الأعظم. تعد دالة الاحتمال أداة أساسية في الإحصاء الاستدلالي تُستخدم لتقدير معلمات التوزيع الاحتمالي بناءً على عينة من البيانات. تهدف إلى حساب احتمال الحصول على البيانات المرصودة بناءً على قيم المعلمات. دالة الاحتمال لعينة $t_1, t_2, \ldots, t_{(n)}$ حيث n هي حجم العينة:

$$L(\theta; t_1, t_2, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} g(t_i, \theta)$$

والاحتمال اللوغارتمي $l(\theta)$ هو اللوغارتم الطبيعي لدالة الإمكان الأعظم:

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} log(g(t_i, \theta))$$

الان استبدل *pdf* لتوزيع *Dus-X-shanker* في $l(\theta)$:

$$L(\theta)=\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\theta^2}{(\theta^2+1)^2(e-1)}\right)+ln(\theta^3+2\theta+t_i)-\theta t_i+1-\left(1+\frac{\theta t_i}{(\theta^2+1)^2}\right)e^{-\theta t_i}$$

لإيجاد قيمة θ التي تعظم دالة الاحتمال اللوغاريتمية، نقوم بأخذ المشتقة الجزئية لـ $L(\theta)$ بالنسبة لـ θ ومساواتها بالصفر:

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\theta}-\frac{4\theta}{\theta^2+1}+\frac{3\theta^2+2}{\theta^3+2\theta+t_i}-x_i+\frac{t_i e^{-\theta t}i}{(\theta^2+1)^2}\left(1+\frac{\theta t_i}{(\theta^2+1)^2}\right)=0$$

هذه المعادلات السابقة غير خطية ولا يمكن حلها تحليلياً,لذلك نلجأ الى التحليل العددي باستعمال الطريقة العددية نيوتن - رافسون (*Newton-Raphson*) او التقريب العددي للحصول على مقدرات طريقة الإمكان.

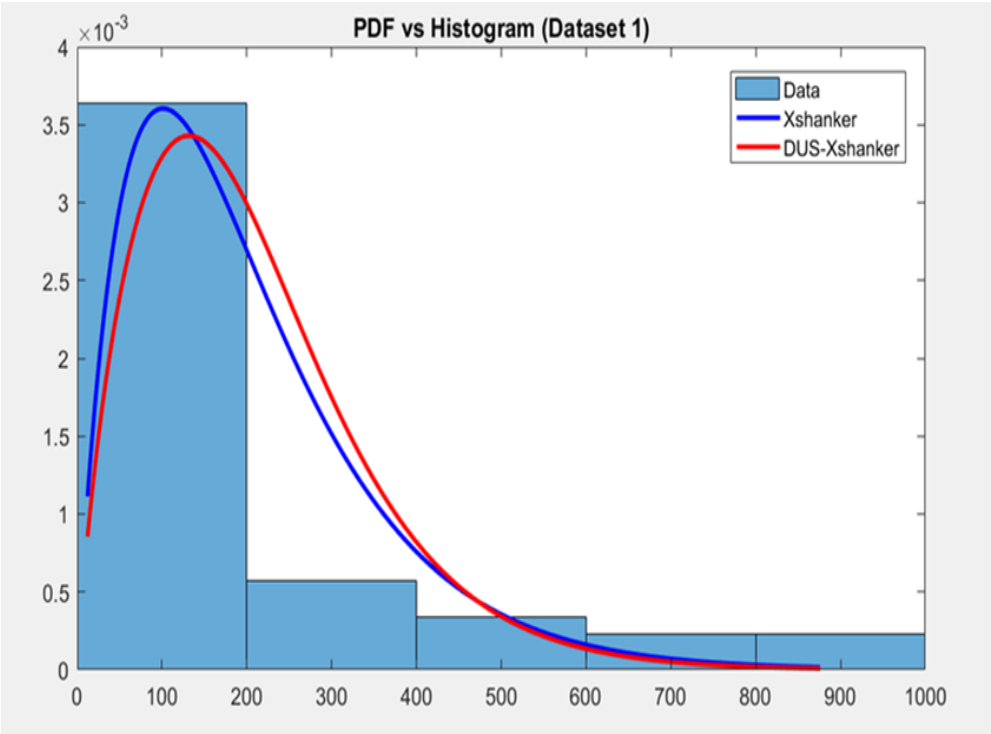
9- تطبيق الحياة الواقعية:

تمت دراسة حالتين من البيانات في العالم الحقيقي، حيث تم أخذ مجموعة من المرضى الذين تلقوا علاجًا يجمع بين العلاج الكيميائي والعلاج الإشعاعي في الاعتبار. *(CT + RT)* [2].

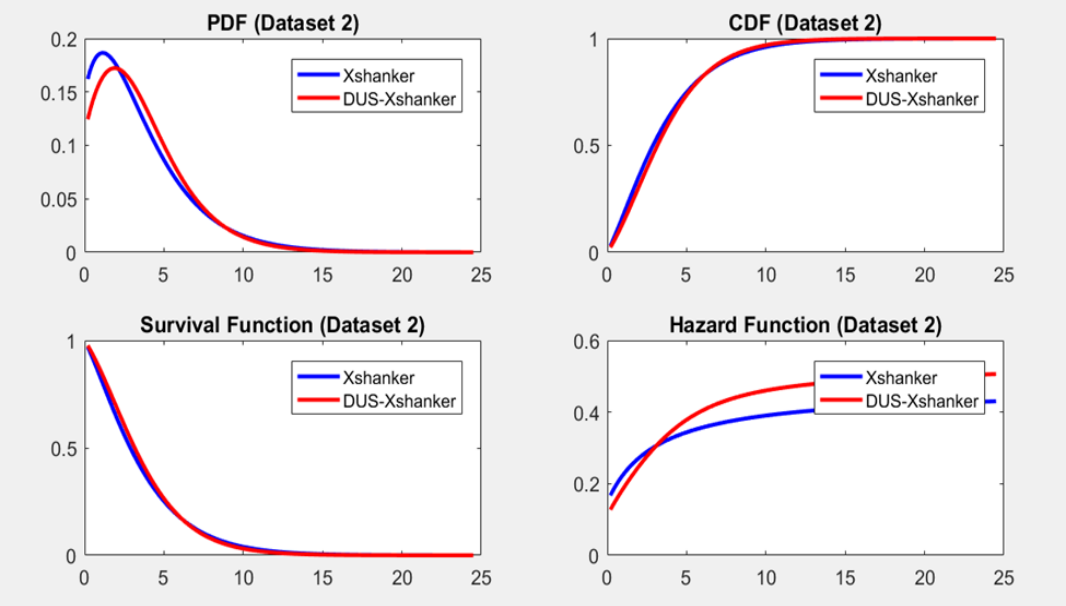
(9-1)مجموعة البيانات:

[12.2 23.56 23.74 25.87 31.98 37 41.35 47.38 55.46 58.36 63.47 68.46 78.26 74.47 81.43 84 92 94 110 112119 127 130 133 140 146 155 159 173 179194 195 209 249 281 319 339 432 469 519 633 725 817 1776]

ونتائج تطبيق هذه البيانات على كل من التوزيعين موضحه ادناه.



الشكل 7. ملائمة المدرج التكراري للتوزيع الأصلي وتوزيع *Dus-X-shanker* لمجموعة البيانات الحقيقية 1 والقيمة المعطاة *θ=0.01*



الشكل 8. يوضح سلوك المنحنيات الأصلية ومنحنيات توزي *Dus-X-shanker* لمجموعة البيانات الحقيقية 1 والقيمة المعطاة *θ=0.01*.

الجدول 1. المقارنات للبيانات الأولى

Dist.	Estimated θ	AIC	CAIC	BIC	k-s
X shanker	0.0098	574.3695	576.1537	574.4647	0.21979
Dus-X-shanker	0.0113	565.7589	574.4647	576.1537	0.1719

تحليل نتائج الجدول 1:

إحصائية *K-S* لتوزيع *Dus-X-shanker* : (0.2196) تشير إلى أن التباين الأقصى بين التوزيع التراكمي النظري لتوزيع *Dus-X-shanker* والتوزيع التجريبي لبياناتك هو 0.2196. يشير انخفاض قيمة *K-S* إلى تطابق أفضل. على الرغم من أن توزيع في هذه الحال*Dus-X-shanker* ة يوفر تطابقًا جيدًا نسبيًا مع البيانات، إلا أن التفسير الدقيق يعتمد على حجم العينة وقيم *K-S* الحرجة.

إحصائية *K-S* لتوزيع*Dus-X-shanker* : (0.1719) تشير إلى أن هناك تباينًا أقصى قدره 0.2196 بين التوزيع التراكمي النظري لتوزيع *X shanker* والتوزيع التجريبي لبياناتك. يناسب توزيع *DUS-X shanker* البيانات بشكل أفضل من التوزيع الأصلي لـ *X shanker*، كما هو موضح بحقيقة أن هذه القيمة أكبر من إحصائية *K-S* لتوزيع *Dus-X-shanker*

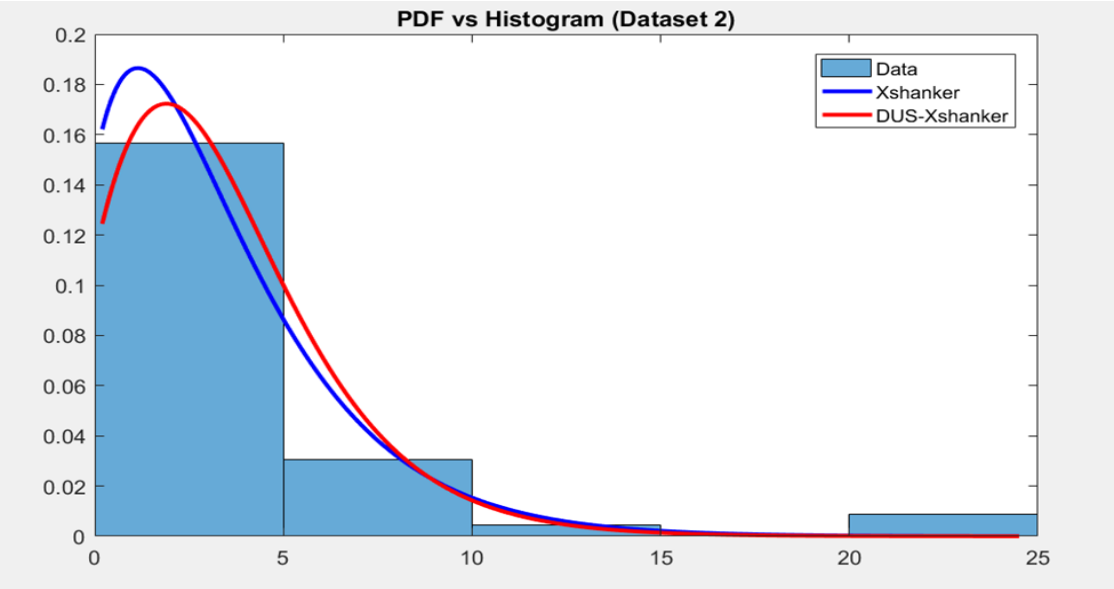
***X shanker* مقابل *DUS-X shanker*:**

يحتوي توزيع *DUS-X shanker* على قيم *AIC* و*BIC* و*CAIC* أقل مقارنة بتوزيع *X shanker*. يشير هذا إلى أن توزيع *DUS-X shanker* يوفر تطابقًا أفضل مع البيانات مقارنة بتوزيع *X shanker*..

(9-2) مجموعة البيانات:

[0.2 0.3 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.6 0.6 0.7 0.7 0.7 0.8 0.8 1.0 1.0 1.0 1.0 1.1 1.3 1.5 1.5 1.5 1.5 2.0 2.0 2.2 2.5 2.7 3.0 3.0 3.3 3.3 4.0 4.0 4.5 4.7 5.0 5.4 5.4 7.0 7.5 8.8 9.0 10.3 22.0 24.5]

ونتائج تطبيق هذه البيانات على كل من التوزيعين موضحه اد



الشكل 9. يوضح ملامة التوزيع الأصلي وتوزيع *DUS_L1* لمجموعة البيانات الحقيقية والقيمة المعطاة *θ=0.5*.

الجدول 2. المقارنات للبيانات الثانية

Dist.	Estimated θ	AIC	CAIC	BIC	k-s
X-shanker	0.4663	231.1396	231.2305	232.9682	0.2780
Dus-X-shanker	0.5427	221.9694	222.0603	223.7981	0.2338

إحصائية *K-S* لتوزيع*Dus-X-shanker : 0.2338*

هذا يشير إلى أن التوزيع التراكمي النظري لتوزيع والتوزيع *Dus-X-shanker* التجريبي للبيانات ينحرفان بحد أقصى 0.2338. يشير انخفاض قيمة *K-S* إلى تطابق أفضل. على الرغم من أن توزيع*Dus-X-shanker* في هذه الحالة يوفر تطابقًا جيدًا نسبيًا مع البيانات، فإن التفسير الدقيق يعتمد على حجم العينة وقيم *K-S* الحرجة.

إحصائية *K-S* لتوزيع *X-shanker*: (0.2780) تشير إلى أن هناك تباينًا أقصى قدره 0.2780 بين التوزيع التراكمي النظري لتوزيع *X-shanker* والتوزيع التجريبي للبيانات. يناسب توزيع *DUS-X-shanker* للبيانات بشكل أفضل من التوزيع الأصلي لـ *X-shanker*، كما هو موضح بحقيقة أن هذه القيمة أكبر من إحصائية *K-S* لتوزيع *DUS_Xsh*.

***X-shanker* مقابل *DUS-X-shanker*:**

يحتوي توزيع *DUS-X-shanker* على قيم *AIC* و*BIC* و*CAIC* أقل مقارنة بتوزيع *X-shanker*. يشير هذا إلى أن توزيع *DUS-X-shanker* يوفر تطابقًا أفضل مع البيانات مقارنة بتوزيع *X-shanker*.

الخوارزمية:

تم إجراء التحليل الإحصائي باستخدام برنامج MATLAB، حيث استُخدم في تقدير المعلمات، تنفيذ الطريقة العددية (Newton-Raphson)، واختبارات الملاءمة وتحليل البيانات.

نقدم الخوارزمية لتحليل مجموعتي البيانات باستخدام برنامج *Matlab* من خلال الخطوات التالية:

1- تعريف دوال *PDF, CDF, Survival*, و *Hazard* لكل من توزيع *Xshanker* وتوزيع *DUS-Transmuted Xshanker*.
2- تقدير المعلمة θ لكل من التوزيعين باستخدام طريقة التقدير الأعظمي لاحتمال (*MLE*).
3- ملائمة البيانات لكل من توزيعي *Xshanker* و *DUS_Xsh* باستخدام اختبار كولموجوروف-سميرنوف (*K-S*) واختبار كاي سكوير (*Chi-squared*) للمقارنة بين الملائمات.
4- رسم دوال *PDF, CDF, Survival*، و *Hazard* لكل من توزيعي *Lindley* الأصلي و *DUS_L1*.
5- حساب قيم *AIC, CAIC*, و *BIC* لكل من النموذجين لتحديد التوزيع الأفضل ملاءمة للبيانات.
6- رسم دوال *PDFs* مع المدرج التكراري للبيانات لمقارنة الملاة بصريًا.

10-تحليل النتائج:

تشير نتائج البحث إلى أن توزيع *Dus-X-shanker* المحور باستخدام تحويل *DUS* يقدم أداءً إحصائيًا محسّنًا مقارنة بالتوزيع الأصلي *X-shanker*. وقد ظهر هذا التحسّن من خلال انخفاض مؤشرات الملاءمة مثل *AIC*، *BIC*، و*CAIC*، إضافة إلى انخفاض قيمة اختبار *K-S*، مما يدل على توافق أكبر بين التوزيع النظري والبيانات الفعلية.

إن إدخال تحويل *DUS* أضاف مرونة إلى سلوك التوزيع، خاصة في ذيله، مما جعله قادرًا على تمثيل البيانات ذات الطبيعة المعقدة بدقة أعلى. ويُلاحظ من خلال الرسوم البيانية أن منحنيات *PDF* و*CDF* الخاصة بالتوزيع المحوّر تتميز بشكل انسيابي وأكثر ملاءمة للبيانات.
تؤكد هذه النتائج أن التوزيع الجديد لا يمثل مجرد تعديل رمزي، بل يُعد تحسينًا بنيويًا واضحًا يُسهم في بناء نماذج أكثر كفاءة وواقعية.

11-الاستنتاج:

يُظهر توزيع *DUS-X-sh* باستمرار قيم *AIC* و*BIC* و*CAIC* أقل مقارنةً بتوزيع *X-shanker*، مما يشير إلى أن التوزيع الجديد يوفر ملاءمة أفضل للبيانات مع تعقيد أقل في النموذج.

بالإضافة إلى مؤشرات الملاءمة، تم استخدام اختبار *Kolmogorov-Smirnov (K-S)* كمقياس لصدق التوزيع، وقد تم عرض نتائجه في الجدولين (1 و2)، حيث أظهرت القيم انخفاضًا ملحوظًا عند استخدام توزيع *DUS-X-shanker*. كما تم تحديد القيم الابتدائية اللازمة لتقدير المعلمة θ بالاعتماد على خصائص البيانات، مع تطبيق الطريقة العددية (*Newton-Raphson*) للحصول على تقديرات دقيقة.

بناءً على هذه المعايير، يجب تفضيل *DUS-X-sh* على توزيع *X-shanker* لنمذجة مجموعة البيانات المعطاة، حيث يوفر توازنًا أفضل بين الدقة والبساطة. بشكل عام، يتفوق توزيع *DUS-Xsh* على توزيع *X-shanker* وفقًا لجميع معايير التقييم الثلاثة (*AIC*، *BIC*، و*CAIC*)، مما يجعله الخيار الأكثر ملاءمة لمجموعة البيانات المعطاة.

المصادر

1. **K. A Chaudhry., J. Shareef J., On DUS Transformed Weibull Distribution and its Properties. Statistics and Applications Vol 19, No. 2, 2021 (New Series), pp 1-12.**
2. **P. Gauthami, V. M. Chacko Dus Transformation of Inverse Weibull Distribution: An Upside-Down Failure Rate Model. RT&A, No 2(62) Volume 16, June 2021**
3. **Gupta, R. C. Gupta, R. D. and Gupta, P. L. (1998). Modeling failure time data by Lehman alternatives. Communication in Statistics-Theory and Methods, 27(4), 887-904.**
4. **H. O. Etaga, E. C. Celestine, CH. K. Onyekwere., 'A New Modi_cation of Shanker Distribution with Applications to Increasing Failure Rate Data' Volume 13, Number 2, 2023, Pages 509-526**
5. **Kundu, D. and Raqab, M.Z. (2009). Estimation of R = P (Y < X) for three parameter Weibull Distribution. Statistics and Probability Letters, 79:839–1846.**
6. **Kumar, D., Singh, U. and Singh, S. K. (2015). A method of proposing new distribution and its application to Bladder cancer patient's data. Journal of Statistics Applications and Probability Letters, 2:235–245.**
7. **Lawless, J. Statistical Models and Methods for Lifetime Data, John Wiley & Sons, New York,1982.**
8. **Mahmoud, M. A. W., Sultan, K. S. and Amer, S. M. (2003). Order statistics from inverse Weibull distribution and associated inference. Computational Statistics & Data Analysis, 42:149– 163.**
9. **Maurya, S. K., Kaushik, A., Singh, S. K. and Singh, U. (2016). A new class of exponential transformed Lindley distribution and its application to Yarn International Journal of Statistics and Economics, 18.**
10. **Mohamaad, S.F., Al-Kadim, K.A. (2021). A Transmuted Survival Model with Application. Journal of Physics: Conference Series, 2021, 1897(1), 012020.**
11. **Mohamaad, S.F., Al-Kadim, K.A. (2023). Using Survival Function and Transmuted Formula to Produce Lifetime Models with Application on Real Data Set. AIP Conference Proceedings, 2023, 2457, 020017.**

12. **Mudholkar, G. S., Srivastava, D. K. and Kollia, G. D. (1996). A Generalization of the Weibull Distribution with Application to the Analysis of Survival Data. Journal of the American Statistical Association, 91.**
13. **Pakdaman, Z. and Ahmadi, J. (2017). Point estimation of the stress–strength reliability parameter for parallel system with independent and non-identical components. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 47:1193–1203.**
14. **Shaw, W. and Buckley, I. (2009). The alchemy of probability distributions: beyond Gram-Charlier expansions and a skew-kurtotic-normal distribution from a rank transmutation map. Research Report, King's College, London, U.K.**
15. **Sharma, V. K. and Dey, S. (2019). Estimation of reliability of multicomponent stress-strength inverted exponentiated Rayleigh model. Journal of Industrial and Production Engineering, 36:181–192.**
16. **Tripathi, A., Singh, U. and Singh, S. K. (2019). Inferences for the DUS-Exponential Distribution Based on upper record values. Annals of Data Science, 1–17.**