

استخدام تحويل TLRT لتوسعة توزيع معكوس ويبل المعمم GIW مع تطبيق عملي

Using the TLRT transform to expand the GIW inverse Weibull distribution with a practical application

أ.د شروق عبد الرضا السباح	ا.م.د صدى فايز محمد	فرح ناجح نصر
Prof. Dr Shrook A.S AL-Sabbah	Ass. Prof. Dr. Sada Fayid Mohammed	Farah Najeh Nasr
كلية الادارة والاقتصاد جامعة كربلاء	كلية الادارة والاقتصاد جامعة كربلاء	كلية الادارة والاقتصاد جامعة كربلاء
College of Administration and Economics, University of Karbala	College of Administration and Economics, University of Karbala	College of Administration and Economics, University of Karbala
shorouq.a@uokerbala.edu.iq	sada.f@uokerbala.edu.iq	farah.n@s.uokerbala.edu.iq

المستخلص:

في هذا البحث سنقدم صيغة جديدة لدالة البقاء ناتجة عن استخدام صيغة التحويل Transmuted lower record type لتوسعة توزيع ويبل المعمم ذو الثلاث معلمات حيث ان هذه الصيغة تضيف معلمة رابعة للتوزيع تجعل التوزيع الاصلي اكثر مرونة. معلمات التوزيع الاربعه قدرت بطريقة الامكان الاعظم. كذلك ايضا قدرنا دوال التوزيع الجديد مثل دالة الكثافة الاحتمالية من اجل اثبات كفاءة التوزيع المحول مقارنة بالتوزيع الاصلي وذلك بحساب مجموعة من معايير المفاضلة في الجانب العملي. بالاضافة الى حساب دالة البقاء الجديدة المحولة لبيانات تمثل فترة بقاء مصابين الجلطة الدماغية.

الكلمات المفتاحية: توزيع معكوس ويبل المعمم، صيغ التحويل، الاماكن الاعظم .

Abstract: In this article a new survival function is introduced based on using the Transmuted Lower record type to expand the three parameters generalized invers Weibull, this formula adds forth parameter to the baseline distribution makes the base distribution more flexible in covering data. The four parameters have been estimated by MLE method. In addition, we estimate the probability function in order to prove the efficiency of the new distribution using the (MSE) criterion, in beside we calculated the new transmuted survival function values of real data.

Keywords: generalized inverse Weibull distribution, transformation formulas, maximum places

1. المقدمة (introduction)

تتميز التوزيعات الاحتمالية فيما بينها بمدى مرونتها مقارنة بالتوزيعات الاخرى فكلما زادت مرونة التوزيع كلما اصبحت الاهتمام به اكثر من قبل الاحصائيين والباحثين. وهذه المرونة يمكن التحكم بها من خلال امكانية اضافة معلمة جديدة لمعلمات التوزيع الاصلي. لذلك جاء هذا البحث ليقدم احد توزيعات الحياة وهو توزيع معكوس ويبل المعمم بعد توسعته باستخدام صيغة تحويل تضيف معلمة رابعة الى معلماته لأكسابه المرونة المنشودة.

2. مشكلة البحث (Problem of Research)

تكمن مشكلة البحث في ملائمة التوزيع الاحصائي للبيانات الحقيقية حيث يصعب تمثيلها في توزيعات الاحتمالية الاساسية لانها ليست كافية لتفسير السلوك الحقيقي للبيانات لذلك لابد من الحصول على توزيع يكون اكثر مرونة في تمثيل هذه البيانات وغيرها فدعت الحاجة الى إيجاد توزيع جديد باستخدام الصيغ والقواعد الرياضية لذا و استخدام العديد من العوائل والفئات المشتقة حديثا لتوليد التوزيعات الموسعة، ومنها عائلة التوزيعات (Lower Record Type) التي تزيد من مرونة التوزيعات وذلك من خلال إضافة معلمة للتوزيع الناتج.

3. هدف البحث (Aim of Research)

يهدف البحث الى بناء توزيع احتمالي باستعمال الصيغة خارطة التحويل (Transmuted Lower Record Type) وإيجاد افضل مقدر لدالة البقاء و اثبات ان التوزيع المقترح افضل من التوزيع الاساس من خلال مجموعة من معايير المقارنة.

4. دالة البقاء (Survival Function.)

يعد تحليل البقاء أحد أساليب علم الإحصاء ، الذي يصف الموت في الكائنات الحية والفشل في لأنظمة والمكانن إضافة الى استخداماتها في الجانب الحياتي والجانب الطبي ويمكن تعريف وقت البقاء على انه حدوث حدث معين، كظهور مرض معين او الاستجابة الى علاج معين او الانتكاسة او الموت، أي انها احتمال بقاء الكائن الحي على قيد الحياة بعد مرور الزمن (t) ، ويهتم تحليل البقاء بدراسة توزيع الوقت منذ حالة البدء (مثل بداية استخدام علاج معين او الولادة) ، وان احتمال البقاء على قيد الحياة يقع خلال الفترة الزمنية (0, t) لذلك يتركز تحليل البقاء على قيد الحياة بشكل رئيسي على التنبؤ في تحديد احتمال المخاطر ويرمز لها بالرمز $S(t)$.

$$S(t) = \text{pr}(T > t) = \int_t^{\infty} f(t) dt \quad \dots (1)$$

$f(t)$: دالة الكثافة الاحتمالية d.f.p للمتغير العشوائي t.

T: يمثل المدة الزمنية اللازمة لحدوث الفشل وهو متغير عشوائي يمثل وقت بقاء الكائن الحي حتى الموت.

t: يمثل زمن بقاء الكائن الحي ويكون دائما أكبر من او تساوي صفر ($0 \leq t$).

5. دالة الكثافة التجميعية للفشل: (Cumulative Density Function) وهي احتمال موت الكائن قبل حدوث الحدث وتسمى بدالة توزيع وقت الحياة وهي دالة مكملية لدالة البقاء ليكن (T) هو وقت ظهور الحدث (الموت) ، وهو متغير عشوائي مستمر لديه دالة كثافة احتمالية (probability density function) يرمز لها $f(t)$ ودالة التوزيع التراكمية للفشل لها (cumulative distribution function) ويعبر عنها $F(t)$ أذان :-

$$F(t) = \text{pr}(T \leq t) \longleftrightarrow F(t) = \int_0^t f(t) du \quad \dots (2)$$

$$F(t) = 1 - \text{pr}(T > t)$$

$$F(t) = 1 - S(t)$$

(3)

6. توزيع معكوس ويبل المعمم (Generalize Invers Weibull distribution) يعد توزيع (generalized Inverse Weibull) من التوزيعات الإحصائية المستعملة بشكل واسع في نمذجة بيانات الحياة ودالة البقاء، وان اكتشاف هذا التوزيع ساهم في تطور الإحصاء ، لأهميته في العلوم الطبية والهندسية ، ونمذجة بيانات الوقت، ويعد احد نماذج الفشل وان توزيع (generalized Inverse Weibull) له العديد من الاستعمالات في الحقول المختلفة منها في دراسات البقاء، وكذلك في الدراسات السكانية المتمثلة بتوقعات الحياة في جداول الحياة ، وكذلك في موضوع الرقابة على الجودة وان هذا التوزيع قابل للتطبيق في العديد من الظواهر الطبيعية كما ويمكن استعماله لنمذجة العديد من العمليات العشوائية لذلك اكتسب اهتماما خاصاً في السنوات الاخيرة.

وان دالة التوزيع التراكمي (cdf) لتوزيع (generalized Inverse Weibull) ذي المعلمتين (α, β) لها الصيغة الآتية:

$$G(x; \alpha, \beta, \gamma) = e^{-\gamma \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta} \quad x \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0 \quad \dots (4)$$

إذ أن α و β معلمتي الشكل للتوزيع.

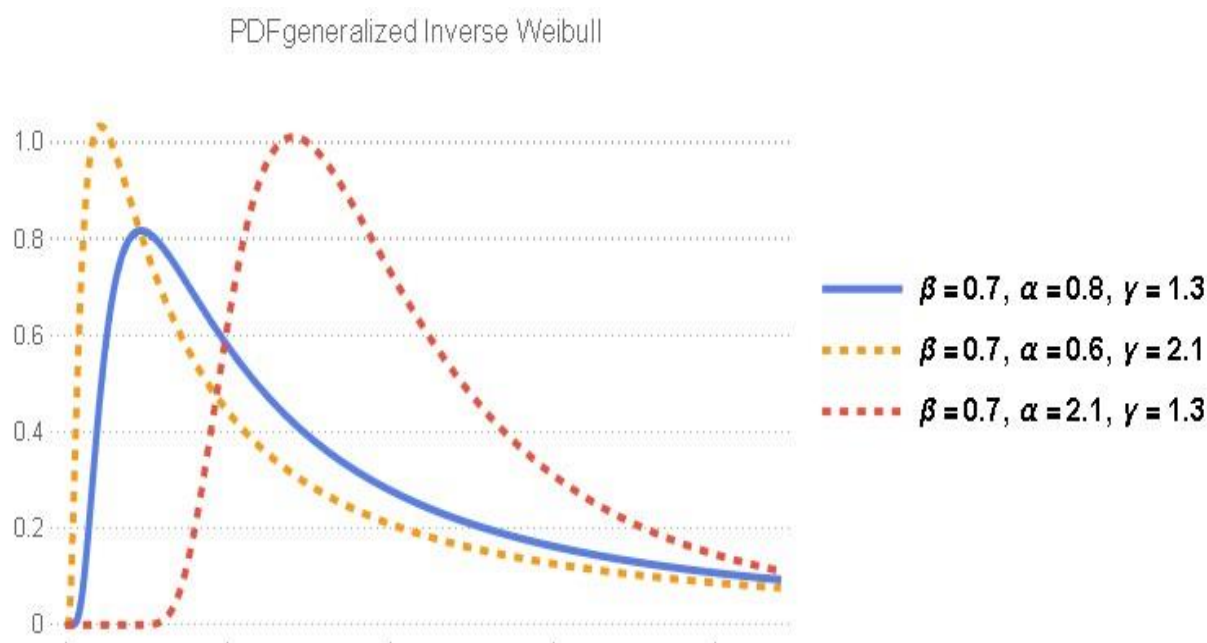
γ معلمة القياس للتوزيع.

وان ودالة الكثافة الاحتمالية (pdf) تأخذ الشكل :

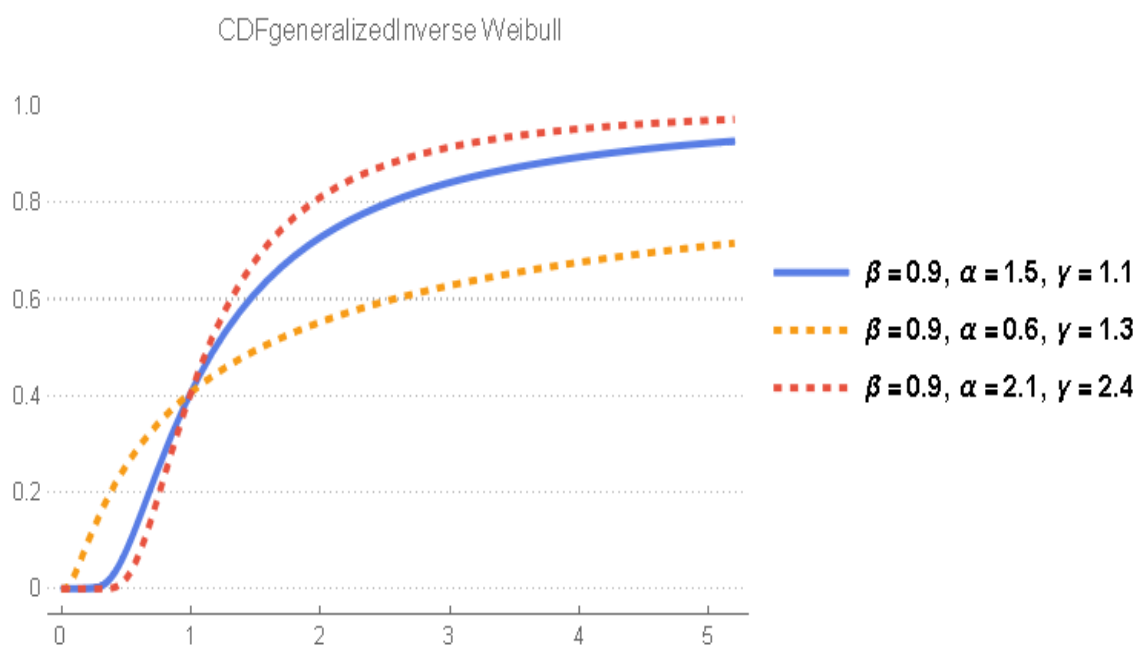
$$g(x; \alpha, \beta, \gamma) = \gamma \beta \alpha^\beta x^{-(\beta+1)} e^{-\gamma \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta} \quad , x \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0 \quad \dots (5)$$

وفيما يأتي رسم دالتي (pdf) و لتوزيع generalizedInverseWeibull ولقيم معلمات مختلفة:

وان ودالة التراكمية لتوزيع generalizedInverseWeibull (cdf) تأخذ الشكل :



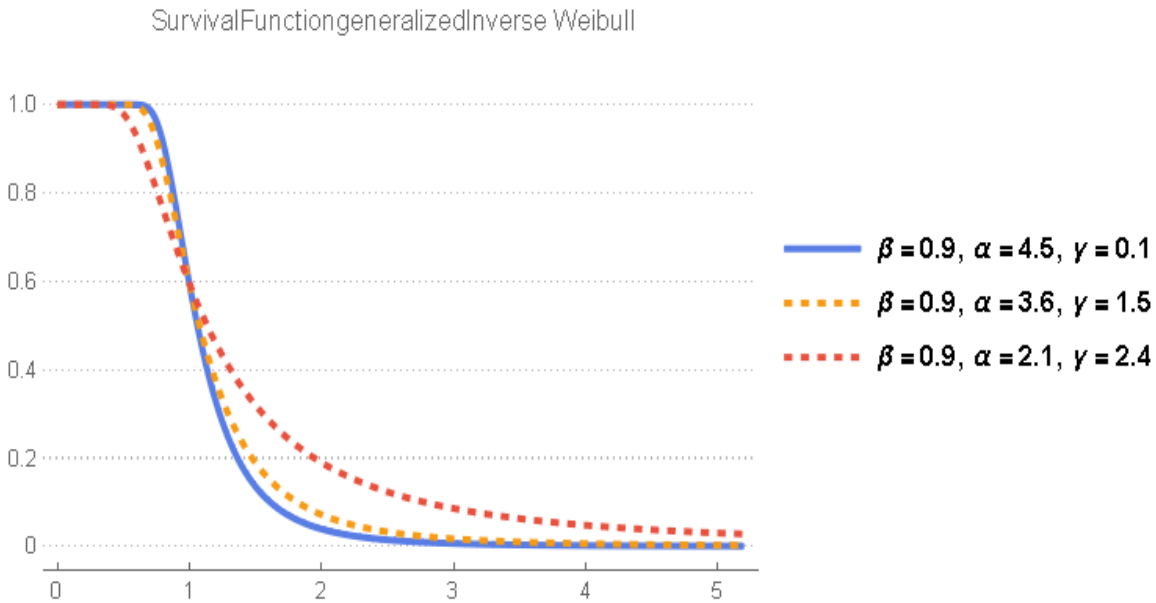
شكل (1) دالة الكثافة الاحتمالية (*pdf*) لتوزيع generalizedInverseWeibull ولقيم مختلفة لمعاملات الشكل والقياس .



شكل (2) دالة التوزيع التراكمي (*cdf*) لتوزيع generalized Inverse Weibull ولقيم مختلفة للمعاملات.

$$S(x; \alpha, \beta, \gamma) = 1 - e^{-\gamma \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta} \quad x \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0 \dots (6)$$

وفيما يأتي رسم دالة البقاء لتوزيع generalizedInverseWeibull ولقيم معلمات مختلفة:



شكل (3) دالة البقاء لتوزيع generalized Inverse Weibull ولقيم مختلفة لمعلماتي الشكل.

7. قاعدة تحويل (TLRT) Transmuted Lower Record type

تعد منهجية المحول المتحول (Transmuted lower record type) ويرمز لها (TLRT) المستعمله على كافة التوزيعات دون قيود او شروط وتعتمد بالدرجة الأساسية على دالة الكثافة الاحتمالية $g(t)$ ودالة الكثافة التراكمية التجميعية $G(x)$ لتوليد العائلات التوزيعات ففي عام 2021 تم اقتراح خارطة التحويل (Transmuted lower record type) من قبل الباحثين (Balakrishnan and He) استنادا الى فكرة قاعدة تحويل الرتب الترتيبية والتكعيبية وقد وجد ان هذا النظام الجديد يزيد من مرونة النماذج المحولة وهو قادر على تحليل البيانات الأكثر تعقيداً، على سبيل المثال البيانات المعقدة ذات معدلات الخطر .

لنفرض أن (X) يمثل المتغير العشوائي ويسمى المحول (Transformer) والذي يحول المتغير عشوائي آخر هو (T) والذي يسمى المتحول (Transformed) فيولد دالة الكثافة التجميعية جديدة (C.d.f) وبذلك تسمى منهجية (Transmuted lower record type) حيث توفر هذه المنهجية بناء التوزيعات باستعمال وعليه تكون الدالة التراكمية على النحو التالي :

$$F(x) = G(x)[1 - p\log(G(x))] ; 0 \leq p \leq 1 \quad \dots (7)$$

وباشتقاق الصيغة أنفاً نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) كالآتي:

$$f(x) = g(x)[1 - p(1 + p\log(G(x)))] ; 0 \leq p \leq 1 \quad \dots (8)$$

ان التوزيع الناتج يطلق عليه اسم التوزيع المحول (Transmuted lower record type) وان التوزيع الاساس قبل التحويل هو حالة خاصة من التوزيع المحول .
 حيث ان p تمثل معلمة التحويل وتكون محصورة بين (0-1).

8. توزيع Transmuted Lower Record Type Generalized Inverse Weibull

للحصول على توزيع تحويل معكوس وبيل المعمم TGIW نقوم بتعويض دالة التوزيع التراكمي (c.d.f) لتوزيع generalized Inverse Weibull الواردة في الصيغة (4) في دالة التحويل Transmuted lower record type الواردة في الصيغة (7) نحصل على:

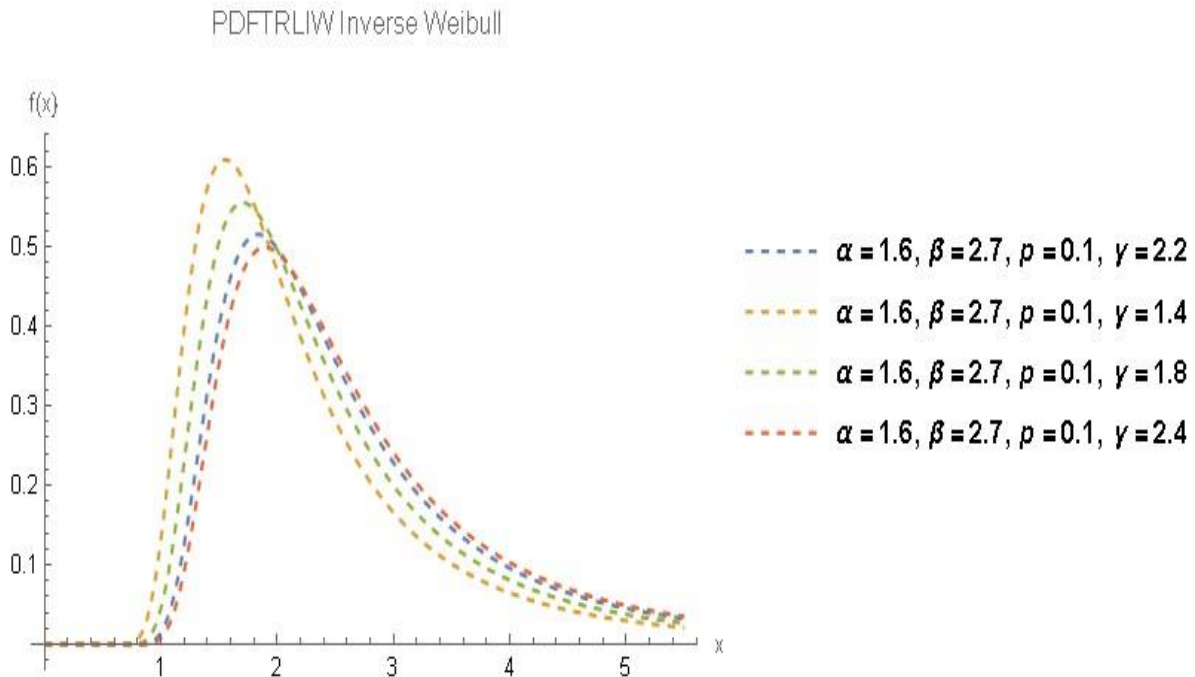
$$F(x, \beta, \alpha, \gamma) = e^{-\gamma \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta} \left(1 + p\gamma \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta\right) \quad \dots (9)$$

بتعويض دالة التوزيع التراكمي (c.d.f) لتوزيع generalized Inverse Weibull الواردة في الصيغة (5) والدالة الاحتمالية في الصيغة (8) في دالة التحويل Transmuted lower record type الواردة في الصيغة (2 - 36) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) لتوزيع المحول وكما يأتي :

$$f(x, \gamma, \beta, \alpha) = \gamma \beta \alpha^\beta x^{-(\beta+1)} e^{-\gamma \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta} \left(1 - p(1 + \text{Log}(e^{-\gamma \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta})\right) \quad \dots (10)$$

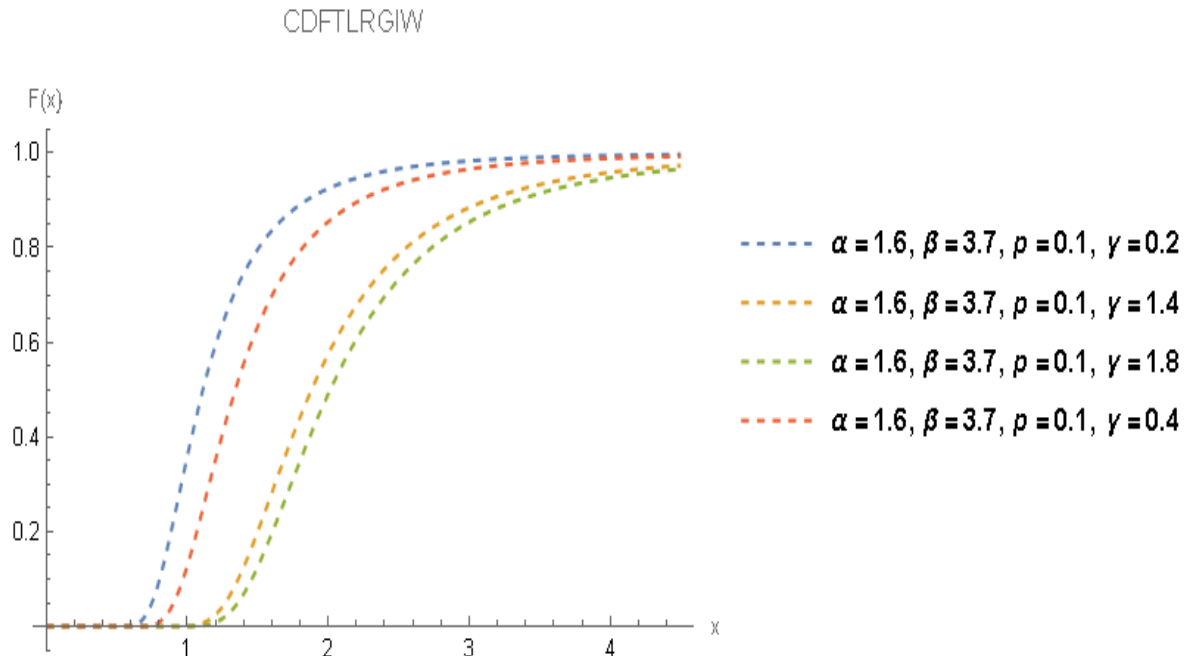
$$\alpha > 0 \quad , \quad \beta > 0 \quad , \quad \gamma > 0 \quad , \quad 0 < p < 1$$

حيث يمكن التحقق من ان الصيغة (10) تمثل دالة توزيع احتمالي PDF .
وفيما يلي شكل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع LRTGIW ولقيم معلمات مختلفة.



شكل (4) دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع TLRTGIW لقيم معلمات مختلفة

ويتضح من الشكل اعلاه أن التوزيع يأخذ شكل ثنائي القمة وهذا ما يفسر امكانية تعامله مع البيانات ثنائية النسق.

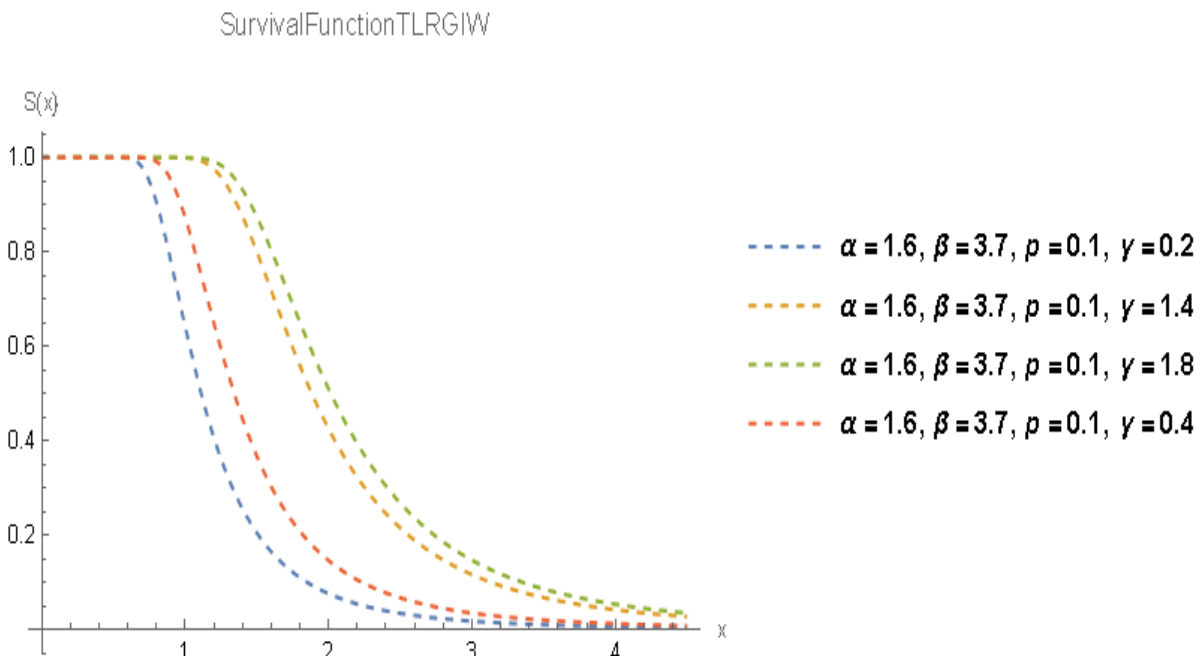


شكل (5) دالة التوزيع التراكمي لتوزيع TLGIW لقيم معلمات مختلفة .

ويتم تعريف دالة البقاء على قيد الحياة أو دالة المعولية لتوزيع TLGIW كما يأتي:

$$S(x, \beta, \alpha, \gamma) = 1 - e^{-\gamma \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta} \left(1 + p\gamma \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta\right) \quad \dots (10)$$

ويكون شكل دالة البقاء على قيد الحياة أو المعولية لتوزيع TLGIW على النحو الآتي:



شكل (6) دالة البقاء لتوزيع TLGIW لقيم معلمات مختلفة .

ويكون شكل دالة دالة البقاء على قيد الحياة لتوزيع TLRGIW في تناقص، وتسمى دالة البقاء على قيد الحياة أيضاً كدالة توزيع تراكمية تكميلية.

9. تقدير معلمات توزيع TLGIW PARAMETERS OF TLGIW ESTIMATION

تعرف عملية التقدير على أنها عملية إيجاد مقدر للمعالم المجهولة للمجتمع عن طريق معلومات العينة المتوفرة، إذ إن معظم الظواهر ليس بالإمكان دراستها شاملة، ولكن هناك امكانية لدراسة سلوك الظاهرة وفق توزيع احتمالي معين، إذ يحتوي التوزيع على معلمات مجهولة بحاجة الى تقديرها وتعتبر طريقة الاماكن الاعظم من اشهر وافضل طرق التقدير المعلمية التي تستخدم لتقدير معلمات التوزيعات الاحتمالية كونها تتميز بعدة خصائص منها :

- الكفاية (Sufficient)
- أقل تباين (Minimum Variance)
- الثبات (Invariance)
- عدم التحيز (Unbiased) بازدياد حجم العينة.
- الاتساق (consistency)
- الكفاءة (Efficiency)

فضلاً عن أنها تكون أكثر دقة بازدياد حجم العينة، وتقوم هذه الطريقة على مبدأ إيجاد مقدرات للمعلمات عن طريق جعل دالة الامكان في نهايتها العظمى ويرمز لهل بالرمز (l).

إذا كان للمتغير العشوائي (X) دالة كثافة احتمالية لتوزيع TLRGIW فان دالة الامكان الاعظم للمتغيرات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, \dots, X_n$ تكون كالآتي:

$$L\mathbf{f}(x, \gamma, \beta, \alpha) = \prod_{i=1}^n f(x, \gamma, \beta, \alpha) \quad \dots (11)$$

$$f(x, \gamma, \beta, \alpha) = \gamma\beta\alpha^\beta x^{-(\beta+1)} e^{-\gamma\left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta} \left(1 - p(1 + \text{Log}(e^{-\gamma\left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta})\right)$$

$$l\mathbf{f} = \prod_{i=1}^n \gamma\beta\alpha^\beta x^{-(\beta+1)} e^{-\gamma\left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta} \left(1 - p(1 - \gamma\left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta)\right) \dots (12)$$

$$= (\gamma\beta\alpha^\beta)^n \sum_{i=1}^n x_i^{-(\beta+1)} e^{-\gamma\left(\frac{\alpha}{x_i}\right)^\beta} \left(1 - p(1 - \gamma\left(\frac{\alpha}{x_i}\right)^\beta)\right)$$

وبأخذ اللوغاريتم للطرفين ينتج:

$$\text{Log}l\mathbf{f}(x, \gamma, \beta, \alpha, p) = \left\{ \begin{aligned} &n\text{Log}[\gamma] + n\text{Log}[\beta] + n\beta\text{Log}[\alpha] - (\beta + 1) \sum_{i=1}^n \text{Log}[x_i] \\ &- \sum_{i=1}^n \gamma \left(\frac{\alpha}{x_i}\right)^\beta + \sum_{i=1}^n \text{Log}\left(1 - p(1 - \gamma\left(\frac{\alpha}{x_i}\right)^\beta)\right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

وباشتقاق الدالة آنفاً لجميع معلمات التوزيع $(\gamma, \beta, \alpha, p)$ على الترتيب ومساواتها للصفر:

$$\frac{dLogl}{d\alpha} = \frac{n\beta}{\alpha} - \frac{n(\frac{\alpha}{x_i})^{-1+\beta}\beta\gamma}{x_i} + \frac{np(\frac{\alpha}{x_i})^{-1+\beta}\beta\gamma}{x_i(1-p+p(\frac{\alpha}{x_i})^\beta\gamma)} = 0 \quad \dots (14)$$

$$\frac{dLogl}{d\beta} = \frac{n}{\beta} - nLog[x_i] + nLog[\alpha] - n\left(\frac{\alpha}{x_i}\right)^\beta \gamma Log\left[\frac{\alpha}{x_i}\right] + \frac{np\left(\frac{\alpha}{x_i}\right)^\beta \gamma Log\left[\frac{\alpha}{x_i}\right]}{1-p+p\left(\frac{\alpha}{x_i}\right)^\beta \gamma} = 0. (15)$$

$$\frac{dLogl}{d\gamma} = -n\left(\frac{\alpha}{x_i}\right)^\beta + \frac{n}{\gamma} + \frac{np\left(\frac{\alpha}{x_i}\right)^\beta}{1-p+p\left(\frac{\alpha}{x_i}\right)^\beta\gamma} = 0 \quad \dots (16)$$

$$\frac{dLogl}{dp} = \frac{n(-1 + (\frac{\alpha}{x_i})^\beta \gamma)}{1-p+p(\frac{\alpha}{x_i})^\beta \gamma} = 0 \quad \dots (17)$$

المعادلات (14)، (15)، (16)، (17) تمثل نظام معادلات لاختية لا يمكن حلها بالطرق الاعتيادية الا باستعمال الطرائق العددية من اجل الحصول على مقدرات الامكان الاعظم $(\hat{\alpha}_{mle}, \hat{\beta}_{mle}, \hat{p}_{mle}, \hat{\gamma}_{mle})$ للمعلمات المجهولة α, β, p, γ

و بتعويض المقدرات في دالة البقاء من المعادلة (10) نحصل على مقدر دالة المعولية لتوزيع TLGIW.

10. الجانب التطبيقي Application

في هذا المبحث سيتم اختبار كفاءة التوزيع المحول الجدد ومقارنته بالتوزيع الاصلي وذلك من خلال تجربته على بيانات تمثل

اوقات البقاء بالاسابيع ل 150 مصاب بمرضى الجلطة الدماغية لحين الوفاة وتم تبويب البيانات للأشخاص المصابين لغرض الحصول على أوقات الحياة (Survival Time) وذلك بطرح تاريخ الإصابة المرض من تاريخ الوفاة وكما يلي

جدول (1)البيانات الحقيقية للأشخاص المصابين بمرض الجلطة الدماغية

39.3	41.1	42.9	45	48.3	51	53.7	55.2	56.7	59.1	60.3	62.7	64.2
39.3	41.4	42.9	45	48.6	51.3	54.9	55.2	57.6	59.1	60.9	63	64.8
39.3	41.7	43.2	45.3	48.6	51.6	54.3	55.2	57.9	59.4	60.9	63	65.1
39.6	42	43.2	45.6	49.2	51.6	54.3	55.5	57.9	59.7	61.5	63.3	65.1
40.5	42	43.5	46.2	49.8	51.6	54.3	56.1	58.5	59.7	61.5	63.3	65.1
40.8	42	43.8	46.2	49.8	51.9	54.6	56.1	58.5	60	61.8	63.6	65.7
40.8	42.3	44.1	46.8	50.1	52.2	54.6	56.4	58.5	60	62.1	63.6	
41.1	42.6	44.4	47.1	50.1	52.5	54.6	56.4	58.8	60.3	62.4	63.6	
41.1	42.9	44.7	47.1	50.1	52.8	54.9	56.4	59.1	60.3	62.4	63.9	
41.1	42.9	44.7	48	50.1	53.7	54.9	56.7	59.1	60.3	62.7	64.2	

تم استخدام اختبار كاي سكوير لفحص قدرة التوزيعين الاساس والمحول على ملائمة البيانات اعلاه. حيث تم وضع الفرضية التالية :

H₀: The data have TLRGIW Distribution

H₁: The data don't have TLRGIW Distribution

وكانت النتائج كما في الجدول :

جدول (2)

Distributions	Chi Square test	
	statistic	P-Value
GIWDistribution	0.137	0.026
TLRGIWDistribution	0.068	0.64

نلاحظ إن قيمة P-Value للتوزيع الاساسي (GIW Distribution) أصغر من قيمتها عند التوزيع المحول (TLRGIW Distribution) هذا يعني ان التوزيع المحول اكثر ملائمة للعينة قيد الدراسة.

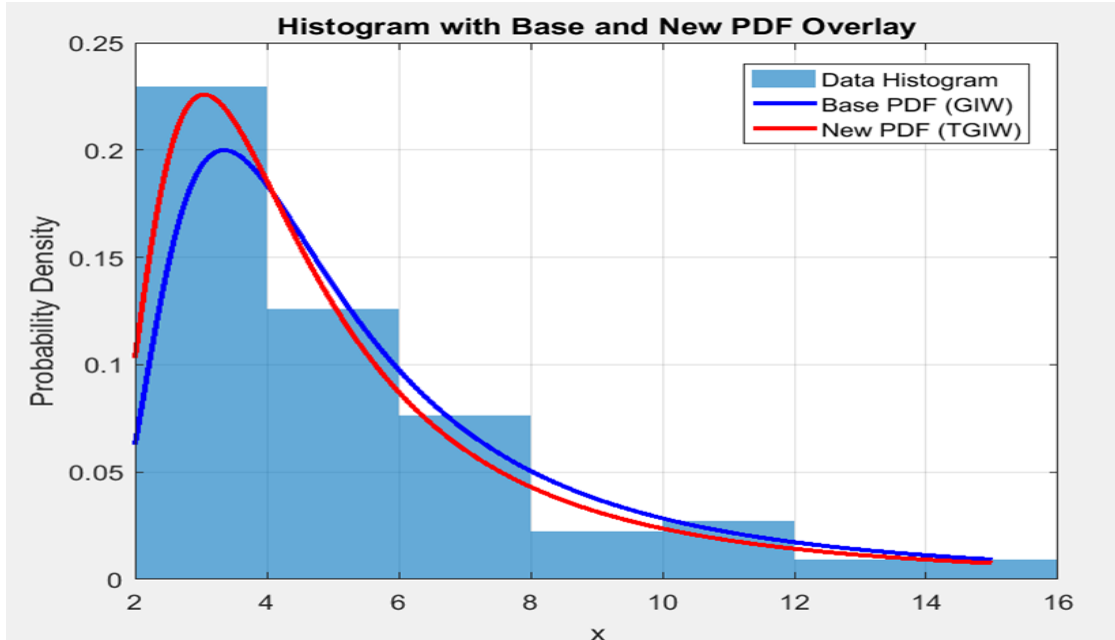
كذلك يوضح الجدول التالي معيار معلومات اكاكي (AIC) ومعيار معلومات بيز اكاكي (BIC) ومعيار معلومات اكاكي المصحح (AICc)

جدول (3)

Distributions	Parameter				AIC	AICc	BIC
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{p}$	$\hat{\gamma}$			
TLRGIWDistribution	2.9890	2.3169	0.1402	1.7583	685.87	681.87	669.82
GIWDistribution	0.73221	3.21464	-----		689.36	686.36	677.33

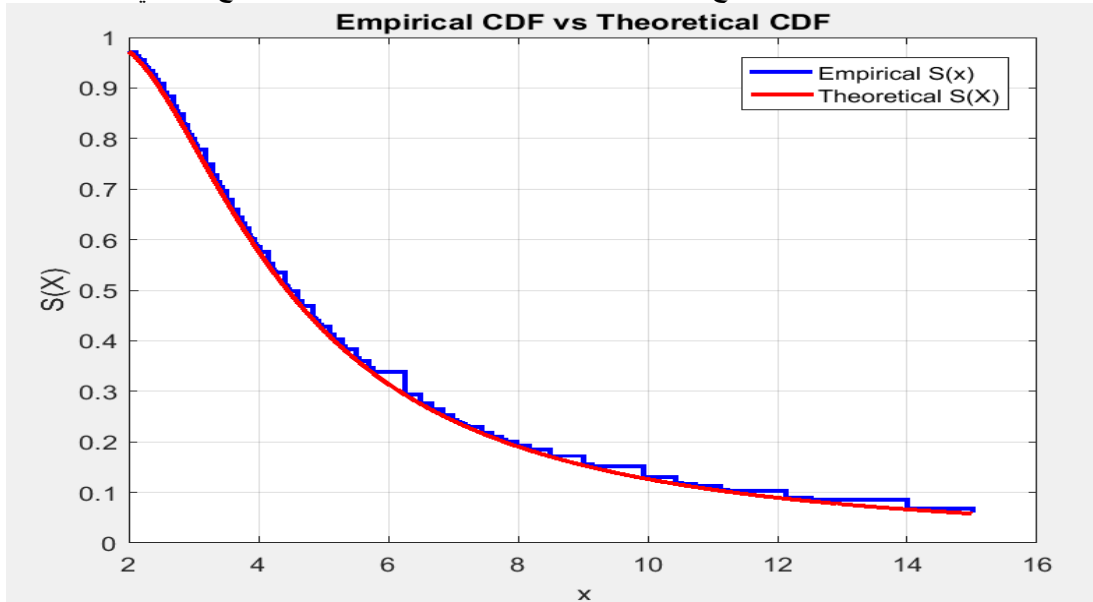
حيث توضح قيم المعايير ان توزيع المحول هو الافضل حيث يعطي اقل قيم للمعايير. بالتالي تبين القيم في الجدولين (2) و (3) افضلية توزيع TLRTGIW قيد الدراسة تمثيل تنفيذ ووصف عينة الدراسة المتمثلة ببيانات البقاء لعينة من المرضى المصابين الجلطة الدماغية ومضاعفته من تاريخ دخولهم المستشفى لحين الوفاة مقاسة بالأسابيع في محافظة كربلاء المقدسة.

والشكل الاتي يبين ملائمة التوزيع (TLRGIWDistribut) مقارنة بالتوزيع الأصلي GIWDistribution.



شكل (7) يوضح دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيعات الاحتمالية قيد الدراسة.

نلاحظ من الشكل المذكور انفاً ان التوزيع المحول يكون ذا قمة والأفضل مقارنة من التوزيع الاصلي للبيانات الحقيقية.



شكل (8) يوضح دالة البقاء لتوزيع (TLRGIWDistribut) مقارنة مع دالة البقاء للتوزيع التجريبي للبيانات الحقيقية.

Sources

- 1- Azzalini A., A class of distributions which includes the normal ones, *Scandinavian Journal of Statistics*, 12 (1985) 171-178.
- 2- Balakrishnan N., He M., A Record-Based Transmuted Model, Under review, Advance Online Publication (2019).
- 3- Choulakian V., Stephens M.A., Goodness-of-fit tests for the generalized Pareto distribution, *Technometrics*, 43(4) (2001) 478-484.
- 4- Eugene N., Lee C., Famoye F., Beta-normal distribution and its applications, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 31 (2002) 497-512.

- 6- Granzotto D.C.T., Louzada F., Balakrishnan N., Cubic rank transmuted distributions: inferential issues and applications, *Journal Statistical Computation and Simulation*, 87(14) (2017) 2760–2778.
- 7- Karakaya K., Kınacı I., Akdoğan Y., Kuş C., A new family of distributions, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46 (2017) 303-314.
- 8- Mahdavi A., Kundu D., A new method for generating distributions with an application to exponential distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46 (2017) 6543-6557.
- 9- Marshall A.W., Olkin I., A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families, *Biometrika*, 84 (1997) 641-652.
- 10- Marshall A.W., Olkin I., A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families, *Biometrika*, 84 (1997) 641-652.
- 11- Mohamaad S. F., Al-Kadim, K. A., A Transmuted Survival Model with Application, *J. Phys.: Conf. Ser.* 1897 012020.
- 12- Mohamaad S. F., Al-Kadim, K. A., Additive Weibull model: An application of real data set, *AIP Conference Proceedings* **2414**, 040019 (2023).
- 13- Mudholkar G.S., Srivastava D.K., Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data, *IEEE Transactions on Reliability*, 42 (1993) 299-302.
- 14-
- 15- Shaw W.T., Buckley I.R., The alchemy of probability distributions: Beyond gram-charlier & cornish-fisher expansions, and skew-normal or kurtotic-normal distributions, (2007) Submitted, Feb, 7, 64.
- 16- Shaw W.T., Buckley I.R., The alchemy of probability distributions: beyond Gram-Charlier expansions, and a skew-kurtotic-normal distribution from a rank transmutation map, arXiv preprint arXiv:0901.0434. (2009).
- 17- Taniş C., Saraçoğlu B., On the record-based transmuted model of Balakrishnan and He based on Weibull distribution, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, In press, (2020).
- 18- Taniş C., Saraçoğlu B., Kuş C., Pekgör A., Karakaya, K., Transmuted lower record type Fréchet distribution with lifetime regression analysis based on type I-censored data, *Journal of Statistical Theory and Applications*, 20(1) (2021) 86-96.
- 19- Taniş C., Transmuted lower record type inverse rayleigh distribution: estimation, characterizations and applications, *Ricerche di Matematica*, In press, (2022)
- 20- Taniş C., Transmuted lower record type power function distribution, *Journal of Science and Arts*, 21(4) (2021) 951-960.