تقدير انموذج انحدار كاما الممتد مع تطبيق عملي

الباحث سهاد فيصل عبود أ.م.د. ابتسام كريم عبد الله

مستخلص البحث

بلا شك يعتبر موضوع الانحدار الخطي من المواضيع المهمة التي تطرق إليها الباحثون في بحوثهم معتمدين على فرضية أن الأخطاء العشوائية لها توزيع طبيعي مستخدمين طرائق التقدير التقليدية والبيزية لتقدير معلمات أنموذج الانحدار الخطي ومن ثم المقارنة بين أسلوبي التقدير اعتمادا على مقاييس (عدم التحيز - متوسط مربعات الخطأ وذلك بتحليل البيانات الحقيقية في حال توفرها أو استخدام أسلوب المحاكاة لتحديد الأسلوب الملائم للتقدير).

أما في هذا البحث فقد تطرق لموضوع تقدير معلمات أنموذج الانحدار الخطي عندما تكون للأخطاء العشوائية توزيع متعدد المتغيرات گاما المختلط $(Mixed\ gamma)$ وقد تم استخدام بعض طرائق التقدير التقليدية المتمثلة بطريقة الإمكان الأعظم (ML) اذ لا يمكن إيجاد مقدرات صريحة الا بعد اللجوء الى الخوارزمية التكرارية العددية $(Newton\ Raphson)$ وطريقة المربعات الصغرى والتي تم تعديلها باستعمال خوارزمية $(Nelder\ Mead)$ وخوارزمية الذكاء الصناعي خوارزمية سرب الطيور $(Particle\ Swarm)$.

ومن خلال سير البحث واستخدام أسلوب المحاكاة تم التوصل إلى إن خوارزمية سرب الطيور $(Particle\ Swarm)$ هي اكثر كفاءة من الطرائق الأخرى المستعملة في البحث عند حجوم العينات (٥٠- ١٠٠- ١٥٠) أي بازدياد حجم العينة.

اما فيما يخص الجانب التطبيقي فقد تم استعمال البيانات الخاصة بالعرض النقدي وهو يمثل المتغير التابع (Y) وهو الذي يتوزع $(Mixed\ gamma)$ وبتأثير العوامل الثلاثة (العملة خارج البنوك، المضاعف النقدي، الودائع الجارية) حيث تم التوصل الى ان جميع هذه المتغيرات تؤثر تأثيراً ايجابياً على المتغير التابع.

المقدمة:

تعد مرحلة وضع البيانات ضمن أنموذج علمي مدروس يناسبها من أهم مراحل التحليل الاحصائي التي تعتمد عليها بقية المراحل وتعرف هذه المرحلة بمرحلة " نمذجة البيانات " والتي عن طريقها استعمال توزيعات احتمالية معروفة لتمثيل بيانات (الظواهر المدروسة) والتنبؤ بها . وقد عمل الباحثون والمختصون في المجال الاحصائي في العقود الأخيرة بشكل واسع وكبير على تطوير هذه التقنية الاحصائية المعروفة " بالتوزيعات الاحتمالية $(Probability\ distribution)$ والانتقال بها من مرحلة التوزيعات المفردة الى مرحلة التوزيعات المركبة $(Compound\ distribution)$ أو التوزيعات المختلطة $(Mixed\ distributions)$ أو التوزيعات الموسعة $(Extend\ distribution)$ وذلك يهدف البحث عن افضل تمثيل للبيانات وبأقل أخطاء ومن ثم خطوة متقدمة اعلى في الدقة عند العمل على ايجاد المقاييس الاحصائية المختلفة كـ (دوال البقاء ، الموثوقية ، المخاطرة .... الخ) والسبب في ذلك أنه في العديد من البيانات التي يتم الحصول وتمثيلها بيانياً تأخذ أكثر من شكل ومنحنى لتوزيع احتمالي في المدة المدروسة نفسها ، ومن ثم يكون مجتمع الدراسة متكون من مزيج من المجتمعات الجزئية لذا فان افضلية هذه الأنواع الجديدة من التوزيعات ودقتها عند اجراء حسن المطابقة حسمت افضليتها لتمثيل بيانات الظواهر المدروسة.

اذ يعتبر تحليل الانحدار من أهم الادوات التي تستعمل لبناء نماذج تمثل الظواهر المدروسة وذلك من خلال معرفة العلاقة بين المتغيرات حيث يكون أحد المتغيرات متغير تابع (معتمد) والاخرى تكون متغيرات توضيحية (تفسيرية) ومن ثم نقدر معالم الأنموذج وبعدها يمكننا التنبؤ بالظاهرة المدروسة.

ان ماورد اعلاه يبين ان محور اهتمام هذا البحث يتعلق بدراسة توزيع $(Mixed\ Gamma)$ وهو مزيج بين توزيعين احدهما $(Gamma)$ والآخر $(X\ Gamma)$ بمعلمة الدمج (P) لحد الخطأ العشوائي, اي ان أنموذج الانحدار الخطي يعاني من مشكلة الابتعاد عن التوزيع الطبيعي، من خلال استعمال طريقتين لتقدير معلمات أنموذج خطي بتوزيع خطأ $(Mixed\ Gamma)$ وهي طريقة المربعات الصغرى (LS), وطريقة الامكان الاعظم (MLE), لكن في هذه الطرائق تكونت لدينا العديد من المعادلات اللاخطية حيث تم إيجاد بعض التقديرات من خلال استعمال طريقة نيوتن العددية

بالإضافة الى ذلك تم تحسين الأنموذج من خلال استعمال خوارزميات الذكاء الصناعي لتقدير معلمات أنموذج الانحدار الخطي.
ولتحقيق الغرض والهدف المنشود من هذا البحث تم تقسيمه إلى خمسة مباحث تضمن المبحث الأول ، المقدمة والهدف من الدراسة ، والملخص المرجعي لأهم الدراسات التي ناقشت موضوع البحث ، والمبحث الثاني تم التطرق فيه الى الجانب النظري ، إذ يبين فيه توزيع $(M\Gamma)$, وخصائصه الإحصائية وكذلك عرض طرائق التقدير بالإضافة الى تقدير معالم انموذج الانحدار عندما يكون الخطأ العشوائي يتوزع $(Mixed\ Gamma)$ بينما تضمن المبحث الثالث الطريقة التجريبية والتي استعمل فيها اسلوب المحاكاة لتوليد البيانات العشوائية عند احجام مختلفة من العينات وقيم مختلفة لمعلمات التوزيع باستعمال طريقة القبول والرفض ومن ثم الحصول على نتائج تقدير معالم الانحدار والتوزيع المختلط عند تلك الحجوم المختلفة والمقارنة لاختيار افضل طريقة من هذه الطرائق وذلك باستعمال المعيار الإحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) بينما تضمن المبحث الرابع البعد الواقعي إذ تم تطبيق النموذج المختلط على البيانات الحقيقية ، ثم تقدير معادلة الانحدار باستخدام الطريقة الأفضل في الجانب التجريبي ، بينما كان المبحث الخامس عبارة عن حصيلة من نتائج الباحث وتوصياته.

المبحث الأول/ المنهجية والاستعراض المرجعي

مشكلة البحث:

المشكلة الأساسية لهذا البحث تظهر في حال افتراض ان الخطأ العشوائي لا يتوزع توزيعاً طبيعياً وبمعنى اخر كيفية تقدير معالم انموذج الانحدار الخطي بتوزيع خطأ گاما المختلط $(M\Gamma)$ اذ لا يمكن الحصول على قيم نهائية لهذه المقدرات الا عن طريق اللجوء للخوارزميات العددية او خوارزميات الذكاء الصناعي.

هدف البحث:

١- تقدير انموذج انحدار گاما المختلط $(MGRM)$ بطريقة الامكان الأعظم (MLE), وطريقة المربعات الصغرى (LS) وتحسين هذه المقدرات باستعمال خوارزميات الذكاء الصناعي وتطبيق الطرائق المذكورة على بيانات حقيقية.
٢- دراسة خصائص توزيع گاما المختلط $(Mixed\ Gamma$ distribution$)$ وتقدير معالمه.
٣- المقارنة بين طرائق التقدير باستعمال معيار المقارنة متوسط مربعات الخطأ (MSE)

فرضية البحث:

H_0: الخطاء العشوائية والمتغير التابع لا يتوزع توزيع طبيعي
H_1: الخطاء العشوائية والمتغير التابع يتوزع توزيع طبيعي

الاستعراض المرجعي:

انتشرت العديد من الكتب والبحوث والدراسات والتي تضمنت دراسة انموذج انحدار گاما المختلط وطرائق تقدير معالمه باستعمال طرائق مختلفة ، فيما يلي نستعرض اهم البحوث حول نماذج انحدار گاما المختلط $(MGRM)$ للمدة من (2010-٢٠٢١) م .

- في عام ٢٠١١ قام الباحث[7,P.1] $(ortega)$ وآخرون باقتراح توزيع گاما الاسي وهو توزيع مزيج بين توزيعين وهما توزيع گاما والتوزيع الاسي وتوظيف هذا التوزيع بنماذج الانحدار وتم استعمال طريقة الإمكان الأعظم وطريقة العزوم لتقدير معالم الانحدار ومعالم التوزيع المقترح فضلاً عن تقدير دالة البقاء وتم التطبيق على البيانات التي تكون فيها قطع والتي تسمى $(censored\ data)$ بالإضافة الى تطبيق نموذج الانحدار على البيانات الواقعية والتي تمثل أوقات فشل العلاج بالدقائق على المرضى المصابين بضعف الشبكية في العين من خلال تأثير الإصابة بمرض السكري وتوصل الباحثون الى ملائمة التوزيع للنموذج افضل من التوزيعات التقليدية والمعتادة.
- في عام ٢٠١٥م اقترح الباحث[5,P.1] $(Silva)$ وآخرون نموذجاً جديدًا معممًا اذ تمت مناقشة بعض الحالات الخاصة واشتقاق بعض الخصائص الرياضية للتوزيع المقترح بما في ذلك الدالة المولدة للعزوم ، والانحرافات المتوسطة ، ودالة المعولية ، والإحصاءات المرتبة. اذ يتم استخدام طريقة الإمكان الاعظم لتقدير معلمات النموذج
- اما في عام ٢٠١٦ قام الباحث[10,P.1] (sen) وآخرون باقتراح توزيع جديد (توزيع $Xgamma$) ودراسة خصائصه الإحصائية وهو توزيع احتمالي مزيج من التوزيع الاسي وتوزيع گاما اذ تم في هذا البحث اشتقاق الخصائص الإحصائية للتوزيع المقترح مثل المتوسط الحسابي والتباين ودالة البقاء باستعمال طريقة العزوم وطريقة الإمكان الأعظم وتم توليد بيانات عشوائية تتوزع توزيع $(Xgamma)$ باستعمال المحاكاة ومن ثم تطبيقه على بيانات حقيقية على أوقات بقاء المرضى الذين يتلقون $(analgesic)$ وتوصل الباحث ان التوزيع المقترح هو افضل ملائمة للبيانات من خلال التوزيع الأسي.

❖ قام الباحث[9,P.1] ($Saha$ وآخرون) في عام ٢٠١٩ بتقديم توزيع جديد يسمى توزيع گاما الممتد $Extended\ gamma\ distribution(EXg)$. هذا التوزيع مشتق من توزيع $xgamma\ (Xg)$، وهو خليط محدود خاص من التوزيعات الأسية وتوزيع گاما، اذ تم اشتقاق بعض الخصائص الإحصائية المهمة ، أي ، خصائص دالة البقاء ، والانحراف المتوسط وتوليد الأرقام العشوائية. علاوة على ذلك ، وتم تطبيق النموذج المقترح من خلال مجموعة بيانات حقيقية ولاحظ أن النموذج المقترح يمكن اعتباره بديلاً أفضل لبعض توزيعات الحياة.

❖ في عام ٢٠٢٠، قدم الباحث[3,P.1] ($Altun$ وآخرون) امتدادًا جديدًا لتوزيع گاما ، يسمى توزيع گاما الممتد (المختلط) وهو مزيج بين توزيع $gamma$ و $xgamma$. اذ تم اشتقاق الخصائص الإحصائية للتوزيع المقترح مثل التباين ، الانحراف المعياري ، ومقاييس التفلطح ، ومنحنى لورنز ، ومتوسط دالة البقاء. باستعمال طريقة الإمكان الاعظم وطريقة العزوم ، والمربعات الصغرى ، وطرق تقدير المربعات الصغرى الموزونة للحصول على معلمات النموذج غير المعروفة. اذ تم توظيف التوزيع المقترح بنموذج الانحدار حيث يكون المتغير التابع يتوزع توزيع گاما المختلط اذ تم تطبيق هذا الانموذج على البيانات الاكتوارية (جرائم القتل) في عدة دول منها البرازيل وروسيا وجنوب إفريقيا واعتبر متغير جرائم القتل هو المتغير التابع (Y_i) وتؤثر فيه متغيرات مستقلة هي معدل البطالة (X_{i1}) ومتغير عدم الأمان (X_{i2})

المبحث الثاني / الجانب النظري

توزيع گاما المختلط ($Mixed\ Gamma\ distribution$) :

النموذج الاحتمالي المختلط هو خليط ناتج عن دمج توزيعين او أكثر ويستعمل عندما تكون الحالة المراد دراستها تتمثل بأكثر من توزيع ويحدث هذا الشيء في مجتمعات غير منسجمة او غير المتجانسة والتي تتضمن في محتواها مجتمعات بسيطة او جزء كل منها يُعد نسبة معينة من المجتمع الأصلي لذلك فان النموذج المختلط هو خلط المجتمعات الجزئية وحسب النسبة لكل مجتمع من مجتمعه الأصلي والنموذج المختلط المدروس هنا هو من متغيرين عشوائيين احدهما يتبع توزيع $(XGamma)$ بمعلمة (P) والآخر يتوزع گاما بمعلمة دمج $(1-P)$ حيث تكون قيم المتغير (y_i) ضمن الفترة $(0,\infty)$ وان معلمة الدمج تساوي[3,P.2]

$$P=\frac{\theta+1}{\theta+3} \qquad \dots(1)$$

دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المختلط كما يأتي: [3,P.3]

اذا كان المتغير العشوائي (y) يأخذ شكل توزيع گاما المختلط ذو المعلمتين فتكون دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) له كالاتي:

$$f_{MG}=Pf_{Xgamma}+(1-P)f_{gamma}$$

$$f_{MG}=\frac{\theta+1}{\theta+3}*\frac{\theta^2}{1+\theta}\left(1+\frac{\theta}{2}y^2\right)e^{-\theta y}+\left(1-\frac{\theta+1}{\theta+3}\right)\frac{\theta^\alpha}{\Gamma\alpha}y^{\alpha-1}e^{-\theta y} \quad \dots(2)$$

بعد التبسيط نحصل على:

$$f(y)=\left(\frac{\theta^2}{\theta+3}+\frac{\theta^3}{2(\theta+3)}y^2\right)e^{-\theta y}+\frac{2}{\theta+3}\frac{\theta^\alpha}{\Gamma\alpha}y^{\alpha-1}e^{-\theta y} \qquad I_{(0,\infty)}y\ ;\theta,\alpha>0 \quad \dots(3)$$

او يمكن كتابتها بصيغة أخرى:

$$f(y)=\frac{\theta^2e^{-\theta y}[\Gamma\alpha(2+\theta y^2)+4\theta^{\alpha-2}y^{\alpha-1}]}{2\Gamma\alpha(\theta+3)} \qquad \dots(4)$$

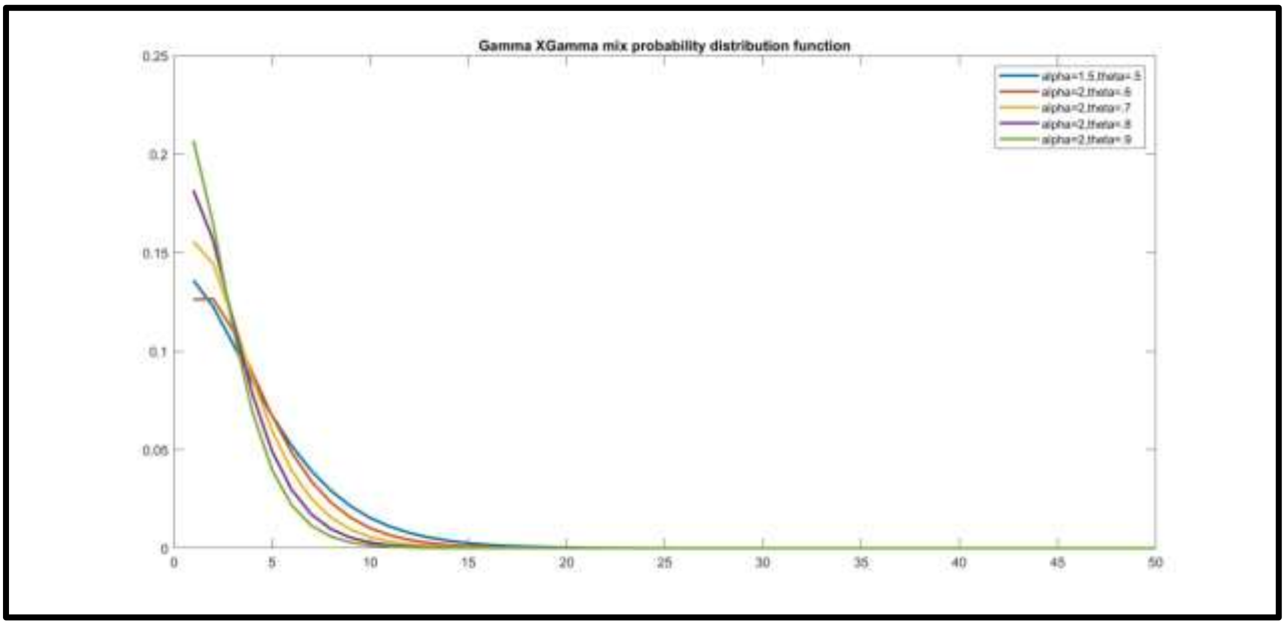
حيث ان:

α : تمثل معلمة الشكل. $(Shape\ Parameter)$

θ : معلمة القياس $(Scale\ Parameter)$

$\Gamma_{(.)}$: دالة گاما لـ (.)

والشكل الآتي يبين دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) لتوزيع گاما المختلط لعدد من المعلمات



الشكل (١) يبين دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) لتوزيع گاما المختلط

انموذج الانحدار الخطي العام گاما المختلط

Mixed Gamma General Linear Regression Model $(MGGLM)$

يمكن تمثيل العلاقة بين المتغير المعتمد(Y_i) وعدد من المتغيرات المستقلة (X_i) وحد الخطأ العشوائي (U_i) بالمعادلة الخطية الاتية:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_k X_{ik} + U_i \qquad i = 1,2,\dots,n \quad \dots(5)$$

ويمكن كتابة المعادلة (5) بشكل مختصر وكالاتي:

$$Y_i = \sum_{j=0}^{k} \beta_j X_{ij} + U_i \qquad \begin{cases} i = 1,2,\dots,n \\ j = 0,1,2,\dots,k \end{cases} \qquad \dots(6)$$

هذا وان الانموذج يتضمن $(k+1)$ من معلمات الانحدار المطلوب تقديرها، اذ ان الحد الأول منها (β_0) يمثل الحد الثابت، لذا فمن ناحية المصفوفات والمتجهات يمكن كتابته كالاتي:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \qquad \dots(7)$$

ويمكن اعادة كتابة المعادلة (7) بصورة مختصرة[1,P.114] وكالاتي:

$$Y = X\beta + U \qquad \dots(8)$$

اذ ان:

Y : متجه لمشاهدات المتغير المعتمد ذو بعد $(n*1)$

X : مصفوفة ذات ابعاد $(n*(k+1))$ لمشاهدات المتغيرات المستقلة.

β : متجه ذو بعد $\big((k+1)*1\big)$ لمعلمات الانحدار. علما بأن العنصر الأول منه يمثل الحد الثابت.

U: متجه ذو بعد $(n*1)$ للخطأ العشوائي، والذي يتوزع توزيع گاما المختلط $U_i \sim M\Gamma(\mu,\sigma^2)$

$\underline{1}$: متجه الوحدة ذو بعد $(n*1)$

عندما يكون حد الخطأ ذو توزيع $M\Gamma$ بالنسبة لـ $(MGGLM)$ فأن توقعه يكون كالاتي:

$$E(U) = \left(\frac{2\alpha+\theta+3}{\theta(\theta+3)}\right)\underline{1} = \mu\underline{1} \qquad \dots(9)$$

وبما أن توقع الخطأ عبارة عن حد ثابت كما موضح في المعادلة (٩) لذا استوجب ضربه هنا بمتجه الوحدة (1_{n*1}) كما موضح في المعادلة (٩) اعلاه، وذلك لإننا سنتعامل في هذه الحالة مع متجه من الاخطاء العشوائية، لذلك فأن الصيغة التقديرية للأنموذج (٨) ستكون كالاتي:

$$\hat{Y} = E(Y) = X\beta + E(U) \quad \ldots (10)$$

$$E(Y) = X\beta + \mu\underline{1} \quad \ldots (11)$$

طرائق التقدير $(Estimation\ Methods)$

بما ان الخطأ العشوائي في تقدير معلمات انموذج الانحدار الخطي يبتعد عن الطبيعية حيث يتوزع هنا توزيع $M\Gamma$ فبعد أن وضحنا التوزيع $M\Gamma$ والانموذج الخطي (البسيط والعام) له، اصبح من الضروري تقدير معلمات هذا الانموذج والذي سيتم من خلال طريقتين، وكما يأتي:

أ- **طريقة المربعات الصغرى المعدلة** $(Adjusted\ Least\ Squares\ Method)$

ان أساس طريقة المربعات الصغرى يعتمد على حساب قيم المعالم المجهولة لنموذج الانحدار والتي تجعل مجموع مربعات الأخطاء العشوائية في نهايتها الصغرى، حيث ان قيم المعالم المحسوبة بهذه الطريقة تسمى تقديرات المربعات الصغرى $(Least\ Sqzares\ Estimators)$. [6,P.140]

لذا تم العمل على استعمال طريقة المربعات الصغرى في حالة توزيع الخطأ $M\Gamma$ وللحصول على تقديرات المربعات الصغرى المكيفة (LS) بالنسبة لأنموذج خطي عام بتوزيع $M\Gamma$ فسيكون كالآتي:

$$U = Y - EY \quad \ldots (12)$$

وبتعويض المعادلة (١١) بالمعادلة (١٢) نحصل على:

$$U = Y - X\beta - \mu\underline{1} \quad \ldots (13)$$

لذلك فأن مجموع مربعات الاخطاء ستكون صيغته الحسابية كالاتي:

$$\sum_{i=1}^{n} {U_i}^2 = U'U \quad \ldots (14)$$

*بعد تعويض المعادلة (١٣) بما يساويها في المعادلة (١٤) نحصل على:

$$U'U = Y'Y - Y'X\beta - Y'\mu\underline{1} - (X\beta)'Y + (X\beta)'X\beta + (X\beta)'\mu\underline{1} - \underline{1}'\mu Y + \underline{1}'\mu(X\beta) + \underline{1}'\mu'\mu\,\underline{1} \quad \ldots (15)$$

وبتبسيط المعادلة (١٥) اكثر اذ ان $Y'\mu\,\underline{1} = \underline{1}'\mu Y$، $(X\beta)'\mu\,\underline{1} = \underline{1}'\mu'(X\beta)$ و $(X\beta)'Y = Y'X\beta$ سنحصل على الصيغة النهائية لمجموع مربعات الأخطاء وهي كالاتي:

$$U'U = Y'Y - 2\beta'X'Y - 2\underline{1}'\mu'Y + (X\beta)'X\beta + 2\underline{1}'\mu'XB + \underline{1}'\mu'\mu\,\underline{1} \quad \ldots (16)$$

بأخذ التفاضل للمعادلة (١٦) بالنسبة لمتجه معلمات الانحدار (β) وبالمساواة للصفر نحصل على الصيغة التقديرية لـ (β)

$$\frac{\partial U'U}{\partial \beta'} = -2X'Y + 2X'X\beta$$

$$-2X'Y + 2X'Xb = 0$$

$$\hat{b} = (X'X)^{-1}\ X'Y \quad \ldots (17)$$

وبأخذ التفاضل للمعادلة (١٦) بالنسبة لـ معلمة الموقع (μ) ومساواتها للصفر سنحصل على الصيغة التقديرية لمعلمة الموقع (μ) وكالآتي:

$$\frac{\partial U'U}{\partial \mu'} = -2\underline{1}'Y + 2\underline{1}'XB + \underline{1}'\mu\,\underline{1}$$

$$-2\underline{1}'Y + 2\underline{1}'Xb + \underline{1}'\mu\,\underline{1} = 0$$

$$\hat{\mu} = 1'(Y - XB)(1'1)^{-1} \quad \ldots (18)$$

ب- **طريقة الامكان الاعظم** $(Maximum\ Likelihood\ Method)$

* **الاشتقاق من قبل الباحثة بالاعتماد على فكرة طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية** Ols

طريقة احصائية لتقدير خصائص المجتمع من عينة من خلال اختيار قيم المعلمات التي تعظم احتمالية انتماء هذه العينة إلى المجتمع الذي سحبت منه. وتعتبر طريقة الامكان الأعظم أحد طرائق التقدير العامة والواسعة الانتشار، التي تستخدم في كثير من البحوث والتطبيقات حيث تعمل على أساس تعظيم دالة الكثافة الاحتمالية [2,P.17]
ان طريقة الامكان الاعظم هي الطريقة الأكثر شيوعا للحصول على مقدرات لمعلمات انموذج الانحدار عندما يكون الخطأ يتوزع گاما المختلط ومع ذلك فأن معادلات الامكان لا تمتلك حلول واضحة (صيغة صريحة للمقدرات) أي الحصول على صيغ مغلقة لمقدرات المعلمات في اغلب الاحيان لذلك يتم اللجوء الى البرامج من خلال تطبيق الخوارزميات العددية لحل هذه المشكلة.
يمكن كتابة دالة الكثافة الاحتمالية بالنسبة للخطأ العشوائي بتوزيع MG [3,P.3]كالاتي:

$$f(u) = \frac{\theta^2 e^{-\theta \underline{1}'\underline{u}}[\Gamma\alpha(2+\theta u'u) + 4\theta^{\alpha-2}{u_i}^{\alpha-1}]}{2\Gamma\alpha(\theta+3)} \quad \dots (19)$$

وبتعظيم المعادلة (١٩) ولغرض تقدير المعلمات يستوجب تحويلها الى الشكل الخطي من خلال اخذ اللوغاريتم لطرفيها وكالاتي:

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(u)$$

$$ln\ell = 2nln\theta - \theta \underline{1}'\underline{u} + \sum_{i=1}^{n} ln[\Gamma\alpha(2+\theta u'u) + 4\theta^{\alpha-2}{u_i}^{\alpha-1}] - nln[2\Gamma\alpha(\theta+3)] \quad \dots (20)$$

وبتعويض المعادلة (١٣) في المعادلة (٢٠) بما يساويها نحصل على:

$$\begin{aligned} ln\ell = {} & 2nln\theta - \theta\underline{1}'(Y - X\beta - \mu\underline{1}) \\ & + \sum_{i=1}^{n} ln\left[\Gamma\alpha\left(2+\theta(Y - X\beta - \mu\underline{1})'(Y - X\beta - \mu\underline{1})\right)\right. \\ & \left. + 4\theta^{\alpha-2}(Y - X\beta - \mu\underline{1})^{\alpha-1}\right] - nln[2\Gamma\alpha(\theta+3)] \quad \dots (21) \end{aligned}$$

*بأخذ التفاضل للمعادلة (٢١) بالنسبة لكل من معلمة الانحدار ومعلمة الموقع ,(β و μ).

$$\frac{\partial U'U}{\partial \beta'} = \sum \frac{\theta X}{\theta(\mu - y + XB) - 2} \quad \dots (22)$$

$$\frac{\partial U'U}{\partial \mu'} = \sum \frac{\theta}{\theta(\mu - y + XB) - 2} \quad \dots (23)$$

نلاحظ من المعادلات (٢٢، ٢٣) تأخذ الشكل اللاخطي وبالتالي لا يمكن إيجاد صيغ تقديرية للمعالم (β، μ) عند مساواة المعادلات المذكورة أعلاه للصفر لذا نلجأ الى الخوارزميات التكرارية العددية كخوارزمية نيوتن رافسون.

ج- خوارزمية سرب الطيور Particle Swarm Algorithm

تستند فكرة خوارزمية سرب الطيور إلى كيفية البحث عن موارد الغذاء, وتكمن هذه الكيفية بأسلوب التحرك والتعاون الموجود لدى اسراب الطيور أو قطيع الاسماك, إذ إن اسراب الطيور تجوب اماكن مختلفة بحثا عن الغذاء. لذا فان بعض الطيور تمتاز بقابليتها على ايجاد موارد الغذاء اكثر من غيرها وذلك لوجود خاصية تكوينية موجودة فيها وهي تمييز رائحة الغذاء بصورة فاعلة وقوية فضلا عن ذلك فأن لها اسلوبا خاصا في نقل المعلومات فيما بينها عن اماكن وجود الغذاء مما يساعدها على ايجاد افضل موارد الغذاء ومن ثم استغلال هذه الموارد للحصول على الغذاء الافضل[4,P.180] لذلك تكون آلية عمل الجسيمات داخل السرب هي اولا تقوم باستكشاف منطقة محددة وهذا ما يسمى بالمرحلة الاولى من عمل الخوارزمية بحسب طبيعة المشكلة وثانيا تقوم هذه الجسيمات بالتكرار حول المنطقة المحددة لإيجاد افضل موارد الغذاء بمعنى انها لا تكتفي بمورد واحد للغذاء فلربما يوجد موارد اخرى للغذاء حتى يتسنى لها تحديد افضل الموارد وهذا ما يسمى بالمرحلة الثانية من عمل الخوارزمية وهي عملية التكرار لذلك عند تحديد افضل الموارد تقوم باستغلال هذه الموارد للحصول على افضل الحلول ومن ثم تقوم الجسيمات داخل السرب بمرحلة التحديث تبعا لمواقعها وسرعتها وهذا ما يسمى

* **الاشتقاق من قبل الباحثة**

بمرحلة التحديث لمواقع وسرعة الجسيمات في الخوارزمية وبعدها تقوم الجسيمات بعملية التكرار مرة اخرى حسب ما تقتضيه الحاجه من التكرارات اي ان هناك تكرارات محددة لإيجاد البدائل الاخرى والتي تأتي بالمرتبة الثانية بعد الحل الامثل. [8,P.19]

المبحث الثالث/ الجانب التجريبي

وصف مراحل تجربة المحاكاة

تضمنت تجارب المحاكاة عدة مراحل لتقدير معلمات انموذج الانحدار في ظل التوزيع المختلط وكما يأتي:

المرحلة الأولى: مرحلة اختيار القيم الافتراضية وهي مرحلة مهمة تعتمد عليها بقية المراحل وكما يأتي:

١- اختيار احجام عينات مختلفة $n = 50{,}100{,}150$ وذلك لمعرفة تأثير تقديرات معلمات الانموذج المستعمل بتغيير احجام العينة.

٢- اختيار قيم افتراضية لمعلمات انموذج انحدار گاما المختلط و تكون القيم قريبة من تقدير معلمات انموذج انحدار گاما للبيانات الحقيقية ، اذ قمنا بفرض اربعة قيم لمعلمة الانحدار وكذلك اربعة قيم لمعلمة الشكل والقياس وكما موضح في الجدول الاتي :

جدول (٣-١) القيم الافتراضية للمعلمات

$Models$	$Regression\ Parameter$				$Shape\ Parameter$				$Scale\ Parameter$			
	β_0	β_1	β_2	β_3	α_0	α_1	α_2	α_3	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3
$Model_1$	3	2	4	6	3	1	12	4	2	1	5	15
$Model_2$	1	5	8	10	2	1.5	9.5	3.5	1.9	3.6	7	14
$Model_3$	2	4	6	8	3	6	9	12	4	8	12	16

اذ ان:

β: تمثل معلمة الانحدار

α: تمثل معلمة الشكل لتوزيع گاما المختلط

θ: تمثل معلمة القياس لتوزيع گاما المختلط

المرحلة الثانية:

توليد المتغير العشوائي للخطأ والذي يتوزع $(Mixed\ Gamma)$ بالمعلمتين (α, θ) باستعمال طريقة الرفض والقبول وكما يأتي:

١- توليد المتغير العشوائي والذي يتبع توزيعاً منتظماً بالمدة (٠،١)

٢- توليد المتغيرين العشوائيين (U_1) الذي يتبع توزيع $(XGamma)$ وهو ايضاً توزيع مزيج بين توزيعين ، الأول التوزيع الاسي بمعلمة (θ) والثاني توزيع $(Gamma)$ بمعلمة قياس (θ) ومعلمة الشكل ثابتة (٣) ، وتوليد المتغير العشوائي (U_2) الذي يتبع توزيع $(Gamma)$ الاعتيادي بمعلمة قياس (θ) ومعلمة الشكل (α) .

٣- ينتج توزيع جديد وهو توزيع $(Mixed\ Gamma)$ بمعلمة قياس (θ) ومعلمة الشكل (α) من خلال معلمة الدمج (P) من توزيع المتغير (U_1) ومعلمة الدمج $(1-P)$ من توزيع المتغير (U_2).

المرحلة الثالثة:

تقدير معلمات انموذج الانحدار عندما يتبع الخطأ توزيع گاما المختلط بالمعلمتين (α, θ) في برنامج $(Matlab\ R2021b)$ بطرائق التقدير والموضحة بالجانب النظري وهي:

١. طريقة المربعات الصغرى المعدلة ALS

٢. خوارزمية سرب الطيور $Particle\ Swarm$

٣. طريقة الإمكان الأعظم ML

المرحلة الرابعة:

سيتم في هذه المرحلة المقارنة بين طرائق التقدير اذ تم استعمال مقياس متوسط مربعات الخطأ (MSE) وكما يلي:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{q}\left(\hat{Y}_i - Y_i\right)^2}{q} \qquad \ldots (24)$$

اذ ان:

$i = 1,2, \ldots, q$

q: تمثل عدد التكرارات لكل تجربة (١٠٠) مرة

$\hat{Y}_i$: القيمة التقديرية للمتغير التابع

Y_i: القيمة الحقيقية للمتغير التابع

تحليل نتائج المحاكاة:

١- **الانموذج الاول:**

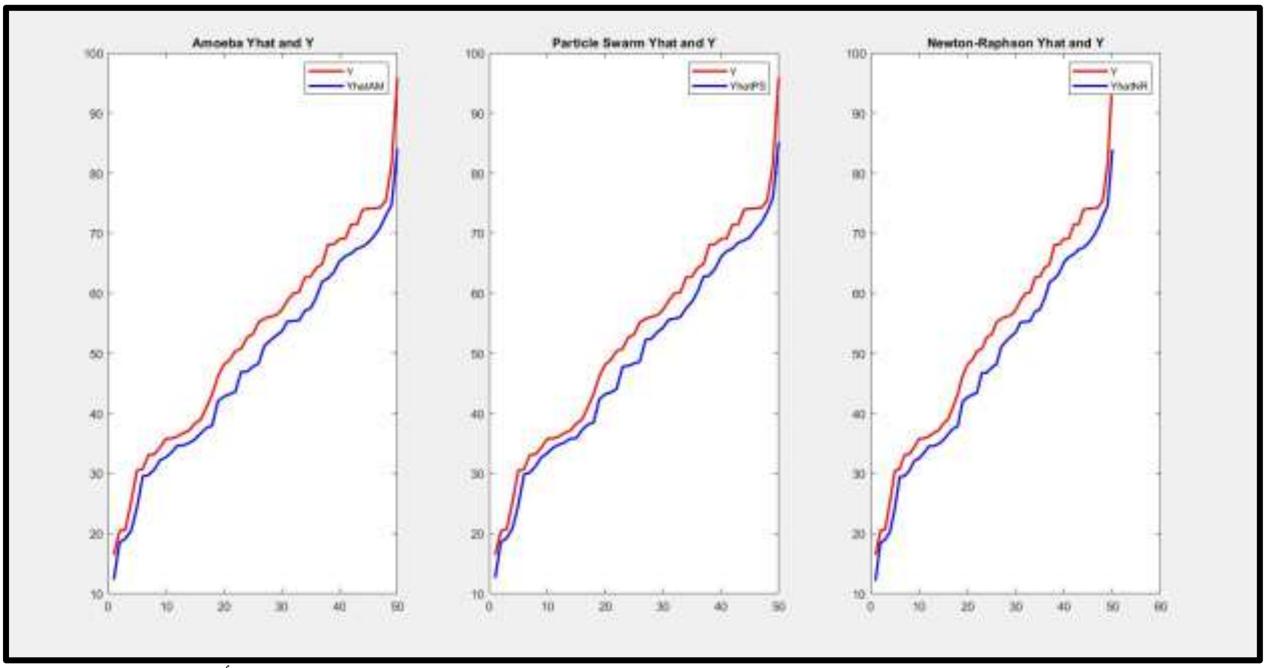
سيتم هنا تقدير معلمات الانموذج وبالطرائق المستعملة الثلاث وبحجم عينة (150,100,50).

نلاحظ من الاشكال (٤،٣،٢) ان هناك تقارب بين القيم التقديرية والقيم المفترضة وبكافة احجام العينات المستعملة وبطرائق التقدير الثلاثة.

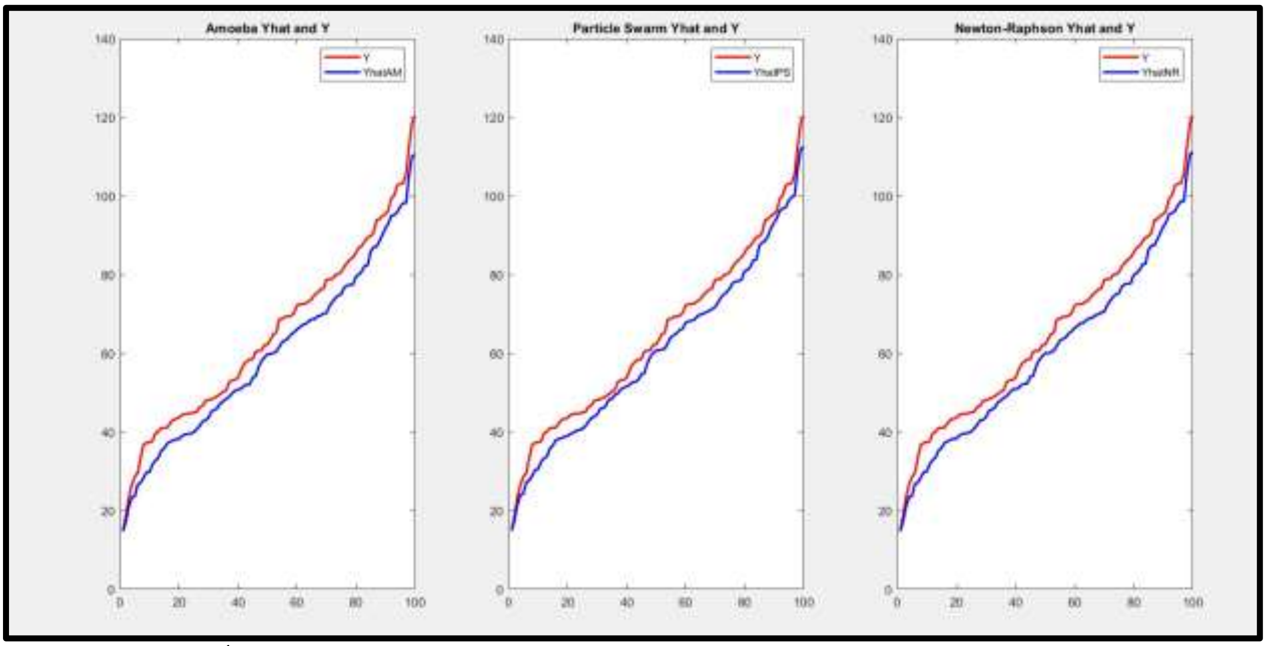
نلاحظ من الجدول (١) ان نتائج المحاكاة التي اظهرت الينا بان هنالك تفوق لخوارزمية سرب الطيور عند حجم عينة (١٠٠,٥٠) اذ بلغت قيمة (MSE) (١٥,٩٢٩، ١٩,٤٥٣) على التوالي وهو اقل قيمة من قيمة الـ (MSE) بالنسبة لطريقة المربعات الصغرى المعدلة وطريقة الإمكان الاعظم ML اما بالنسبة لحجم العينة (١٥٠) فقد كانت طريقة الإمكان الاعظم ML هي الأفضل مقارنة بالطرائق الأخرى اذ بلغت قيمة (MSE) (١٤,٨٩٤).

جدول (١) متوسط مربعات الخطأ (MSE) للأنموذج الاول وبأحجام عينات (١٥٠,١٠٠,٥٠).

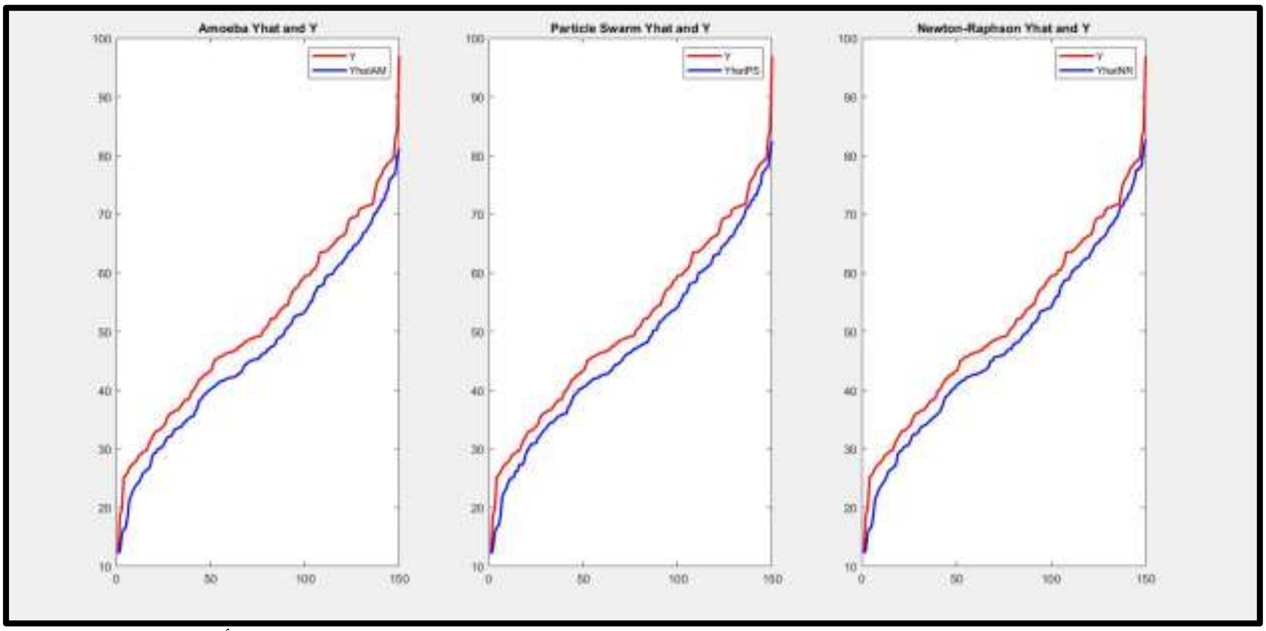
Method / n	ALS	Particle Swarm	ML	Best
50	20.945	15.929	22.116	Particle Swarm
100	29.227	19.453	26.597	Particle Swarm
150	٢٠,٩٩٧	١٥,٤٥٦	١٤,٨٩٤	ML



الشكل (٢) يبين القيم الحقيقية للمتغير المعتمد والقيم التقديرية، بالنسبة للمتغيرات التوضيحية (المستقلة) للأنموذج الاول بطريقة (ALS، Particle Swarm، ML) ولحجم عينة (٥٠)



الشكل (٣) يبين القيم الحقيقية للمتغير المعتمد والقيم التقديرية، بالنسبة للمتغيرات التوضيحية (المستقلة) للأنموذج الاول بطريقة (ALS، Particle Swarm، ML) ولحجم عينة (١٠٠)



الشكل (٤) يبين القيم الحقيقية للمتغير المعتمد والقيم التقديرية، بالنسبة للمتغيرات التوضيحية (المستقلة) للأنموذج الاول بطريقة (ALS، Particle Swarm، ML) ولحجم عينة (١٥٠)

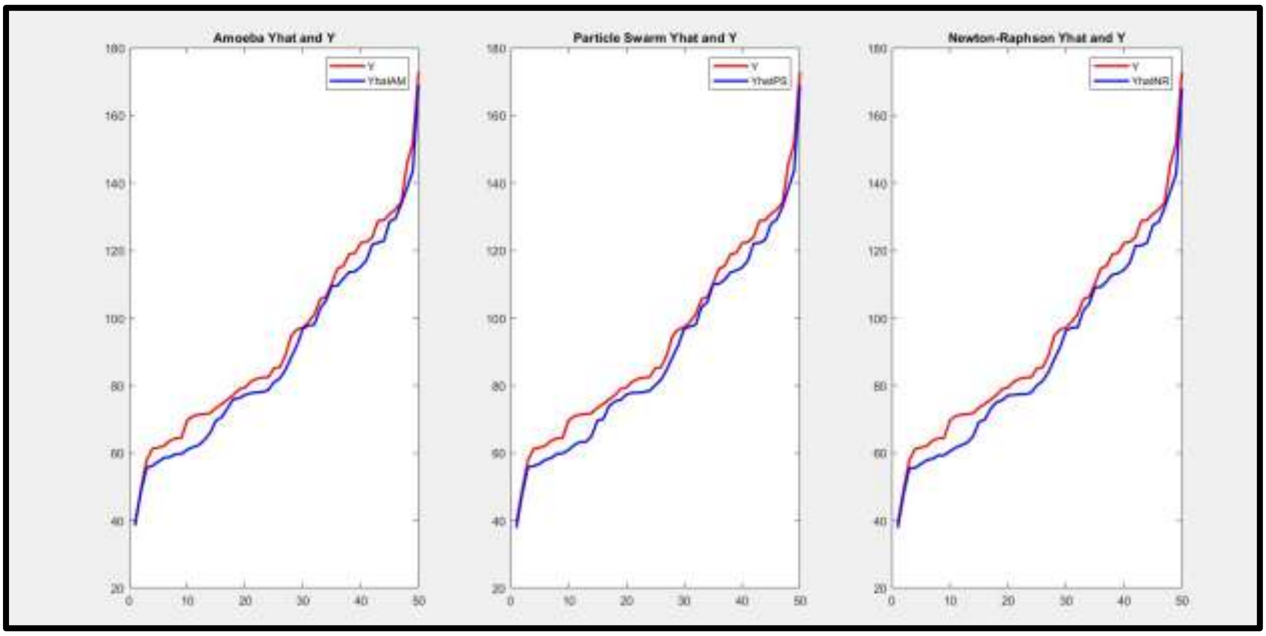
٢- **الانموذج الثاني:**

نلاحظ من الاشكال (٥،٦،٧) ان هناك تقارب بين القيم التقديرية والقيم الحقيقية (الافتراضية) وبكافة احجام العينات المستعملة وبطرائق التقدير الثلاثة.

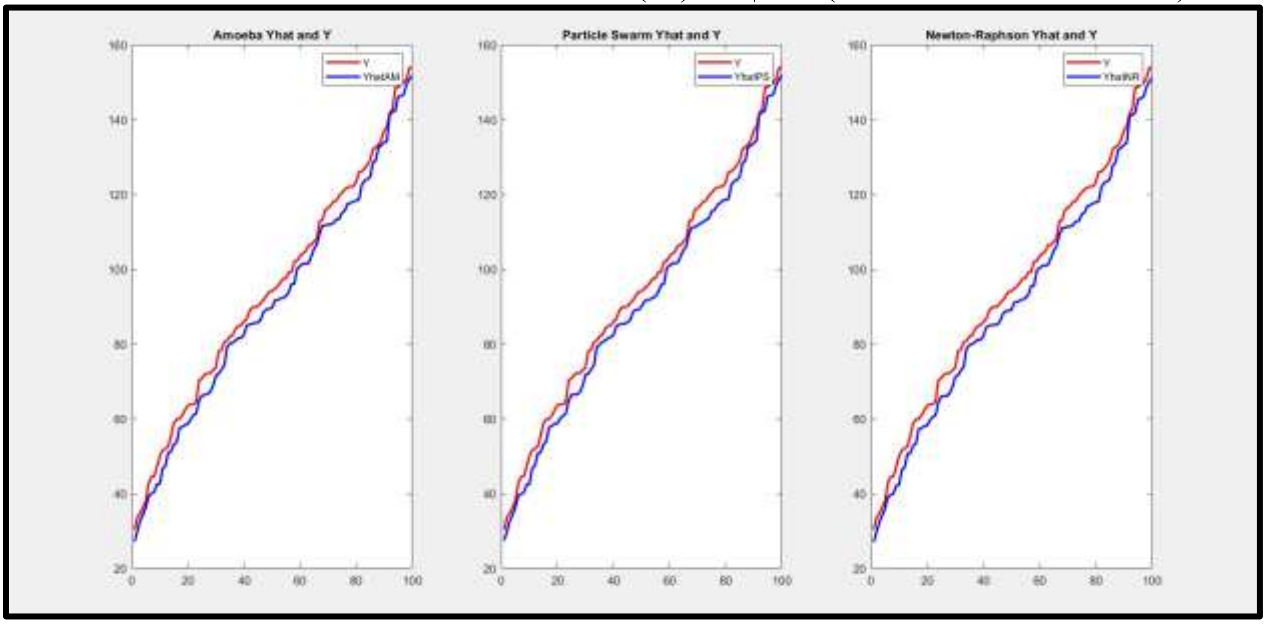
كما نلاحظ ايضاً من نتائج المحاكاة بان هنالك تفوق لخوارزمية سرب الطيور عند حجم عينة (١٠٠,١٥٠) اذ بلغت قيمة (MSE) (١٦,٥٠٩، ١٦,٥٠٠) على التوالي وهو اقل قيمة من قيمة الـ (MSE) بالنسبة لطريقة ALS وطريقة الإمكان الاعظم ML اما بالنسبة لحجم العينة (٥٠) فقد كانت طريقة ALS هي الأفضل مقارنة بالطرائق الأخرى اذ بلغت قيمة (MSE) (٢٢,١٩٥) أي ان هناك تقارب بالنتائج بين خوارزمية سرب الطيور (Particle Swarm) وبين طريقة (ALS) وللأحجام الثلاث (٥٠،١٠٠،١٥٠).

جدول (٢) متوسط مربعات الخطأ (MSE) للأنموذج الثاني وبأحجام عينات (٥٠,١٠٠,١٥٠).

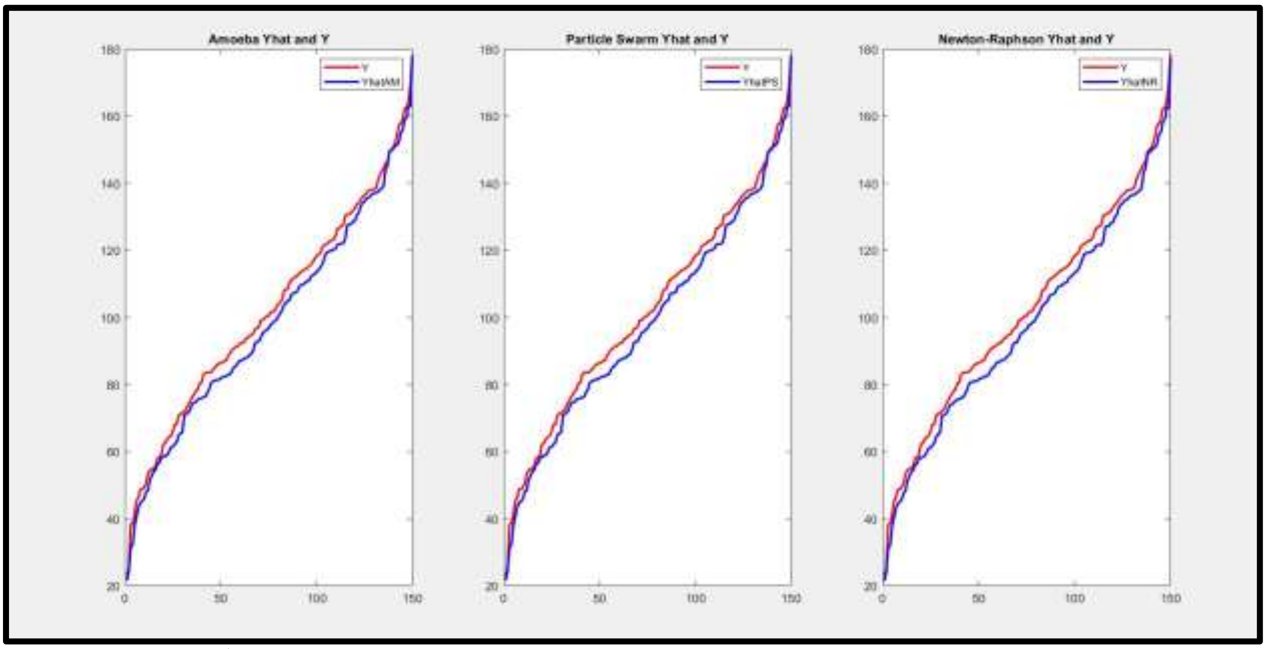
Method / n	ALS	Particle Swarm	ML	Best
50	٢٢,١٩٥	٢٢,٧٨٦	٢٧,٧٣٨	ALS
100	١٦,٥٣٤	١٦,٥٠٩	٢٠,١٨٣	Particle Swarm
150	١٦,٥١٦	١٦,٥٠٠	١٩,٦٣٥	Particle Swarm



الشكل (٥) يبين القيم الحقيقية للمتغير المعتمد والقيم التقديرية، بالنسبة للمتغيرات التوضيحية (المستقلة) للأنموذج الثاني بطريقة (ALS، Particle Swarm، ML) ولحجم عينة (٥٠)



الشكل (٦) يبين القيم الحقيقية للمتغير المعتمد والقيم التقديرية، بالنسبة للمتغيرات التوضيحية (المستقلة) للأنموذج الثاني بطريقة (ALS، Particle Swarm، ML) ولحجم عينة (١٠٠)



الشكل (٧) يبين القيم الحقيقية للمتغير المعتمد والقيم التقديرية، بالنسبة للمتغيرات التوضيحية (المستقلة) للأنموذج الثاني بطريقة (ALS، Particle Swarm، ML) ولحجم عينة (١٥٠)

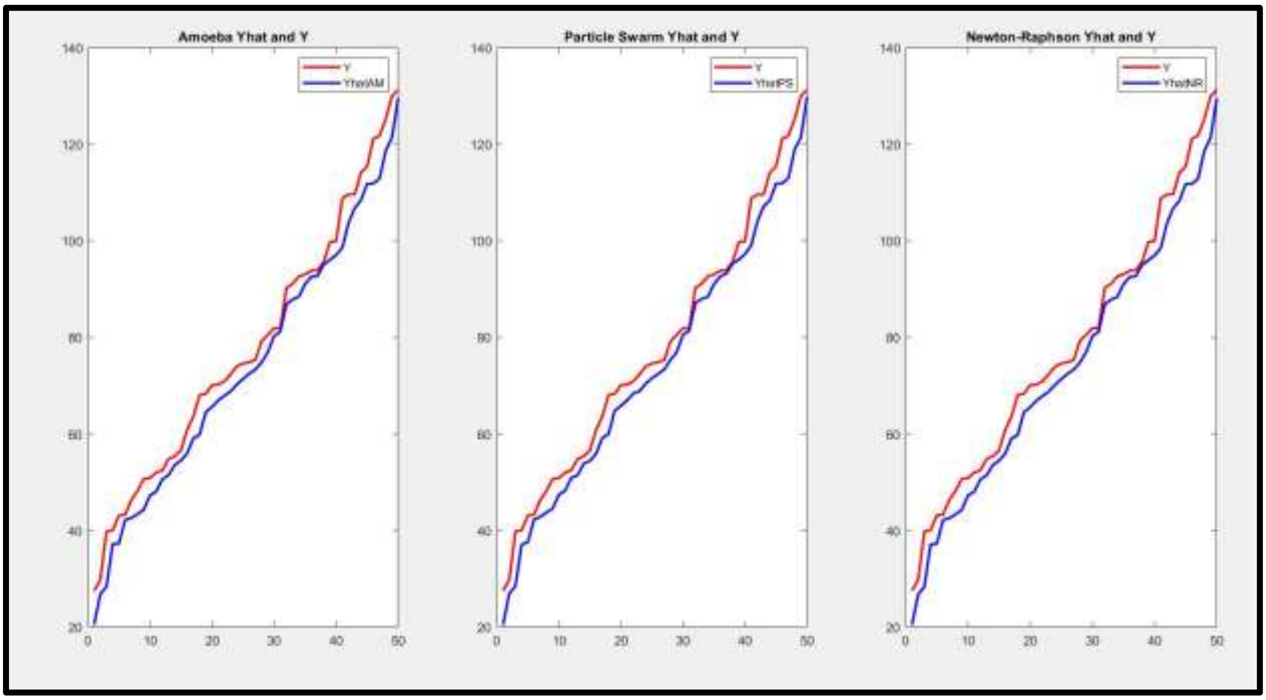
٣- **الانموذج الثالث:**

سيتم هنا تقدير معلمات الانموذج وبالطرائق المستعملة الثلاث وبحجم عينة (١٥٠،١٠٠،٥٠)
نلاحظ من الاشكال (١٠،٩،٨) ان هناك تقارب بين القيم التقديرية والقيم المفترضة وبكافة احجام العينات المستعملة وبطرائق التقدير الثلاثة .

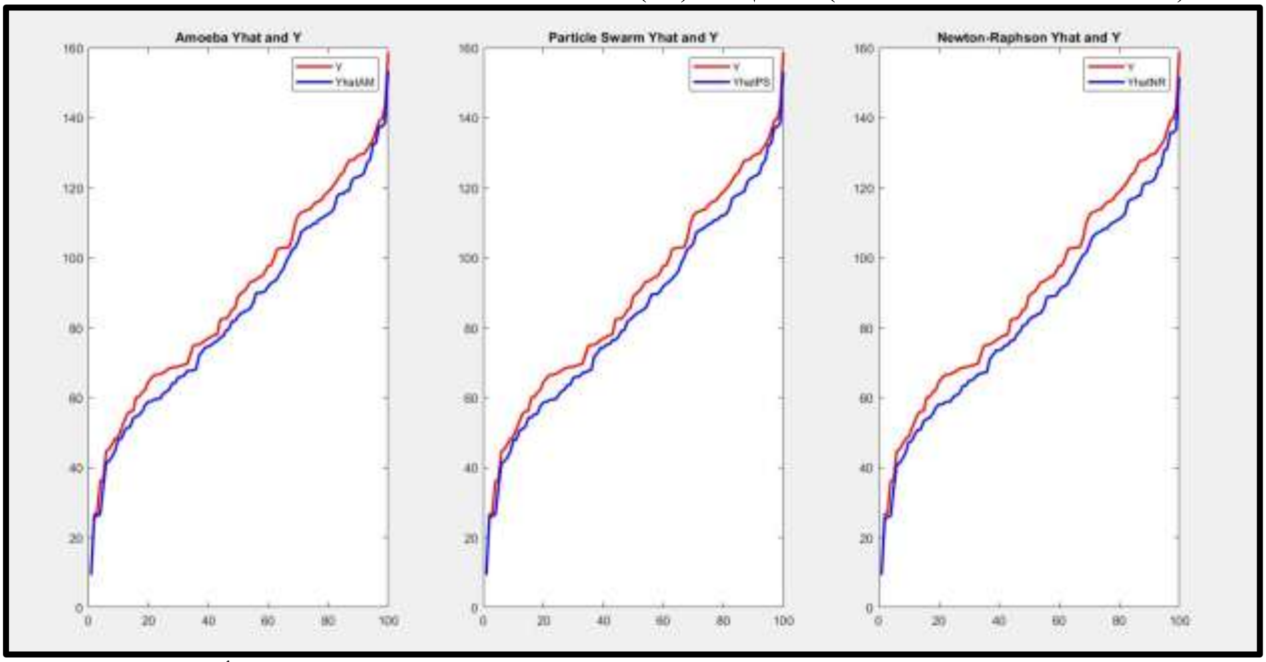
وكذلك نلاحظ من الجدول (٣) ان نتائج المحاكاة التي اظهرت الينا بان هنالك تفوق لخوارزمية سرب الطيور (Particle Swarm) عند حجم عينة (٥٠، ١٥٠) اذ بلغت قيمة (MSE) له (٢١,٩١٩، ١٢,٧٩٦) على الترتيب وهي اقل قيمة من قيمة الـ (MSE) بالنسبة لطريقة الإمكان الاعظم (ML) وطريقة (ALS) ، اما حجم العينة (١٠٠) فنلاحظ ان هنالك زيادة في قيم مقياس معيار المقارنة (MSE) لجميع الطرائق مقارنة بحجم العينة (٥٠) ثم بدأ بالتناقص في حجم العينة (١٥٠) وان افضل طريقة هي طريقة (ALS) عند حجم عينة (١٠٠) لأنها تمتلك اقل (MSE).

جدول (٣) متوسط مربعات الخطأ (MSE) للأنموذج الثالث وبأحجام عينات (١٥٠,١٠٠,٥٠).

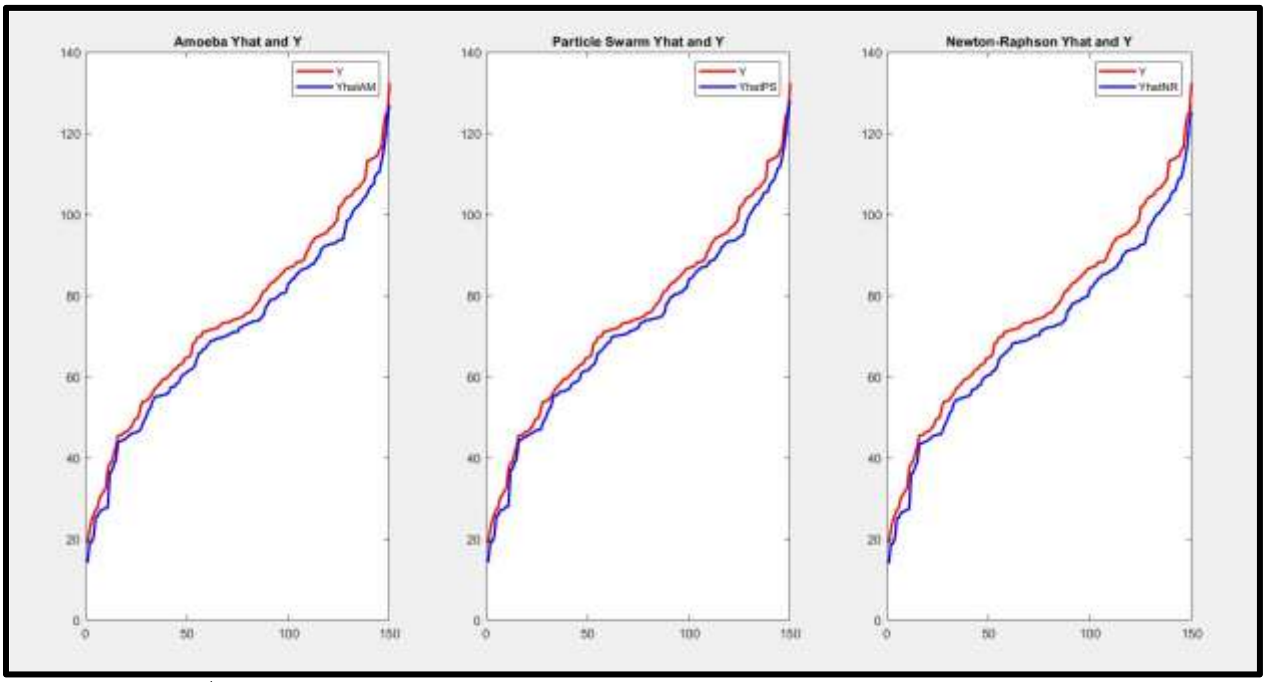
Method / n	ALS	Particle Swarm	ML	Best
50	٢٣,١٢١	٢١,٩١٩	٢٣,٥٢	Particle Swarm
100	٢٥,٨٢١	٢٧,٧٩٦	٣٧,٨٢١	ALS
150	١٨,٢٠١	١٢,٧٩٦	٢٦,٦٣٢	Particle Swarm



الشكل (٨) يبين القيم الحقيقية للمتغير المعتمد والقيم التقديرية، بالنسبة للمتغيرات التوضيحية (المستقلة) للأنموذج الثالث بطريقة (ML ،Particle Swarm ،ALS) ولحجم عينة (٥٠)



الشكل (٩) يبين القيم الحقيقية للمتغير المعتمد والقيم التقديرية، بالنسبة للمتغيرات التوضيحية (المستقلة) للأنموذج الثالث بطريقة (ML ،Particle Swarm ،ALS) ولحجم عينة (١٠٠)



الشكل (١٠) يبين القيم الحقيقية للمتغير المعتمد والقيم التقديرية، بالنسبة للمتغيرات التوضيحية (المستقلة) للأنموذج الثالث بطريقة (ALS، Particle Swarm، ML) ولحجم عينة (١٥٠)

<u>تفسير مخرجات الجداول آنفاً:</u>

١. عند حجم العينة (٥٠) كانت خوارزمية سرب الطيور (Particle Swarm) لتقدير معادلة الانحدار افضل وبنسبة ٦٧٪ لأنها تملك اقل (MSE) في الأنموذج الأول والثالث اما النسبة المتبقية ٣٣٪ فقد كانت طريقة (ALS) هي الأفضل في الأنموذج الثاني.
٢. عند حجم العينة (١٠٠) كانت خوارزمية سرب الطيور (Particle Swarm) لتقدير معادلة الانحدار افضل وبنسبة ٦٧٪ لأنها تملك اقل (MSE) في الأنموذج الأول والثاني اما النسبة المتبقية ٣٣٪ فقد كانت طريقة (ALS) هي الأفضل في الأنموذج الثالث.
٣. عند حجم العينة (١٥٠) كانت خوارزمية سرب الطيور (Particle Swarm) لتقدير معادلة الانحدار افضل وبنسبة ٦٧٪ لأنها تملك اقل (MSE) في الأنموذج الثاني والثالث اما النسبة المتبقية ٣٣٪ فقد كانت طريقة الإمكان الاعظم (ML) هي الأفضل في الأنموذج الاول.
٤. الرسوم البيانية توضح التقارب بين طرائق التقدير كافة التي تم استعمالها في تقدير معادلة الانحدار للتوزيع المختلط $(gamma - Xgamma)$ والقيم الحقيقية لها ومما يفسر ملائمة كافة الطرائق التي تم استعمالها لتقدير معادلة الانحدار في ظل التوزيع المختلط $(gamma - Xgamma)$.
٥. تناقص القيم الخاصة بالمقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) كلما زاد حجم العينة وهذا يطابق النظرية الإحصائية لهذا المؤشر.

<u>**المبحث الرابع / الجانب التطبيقي**</u>

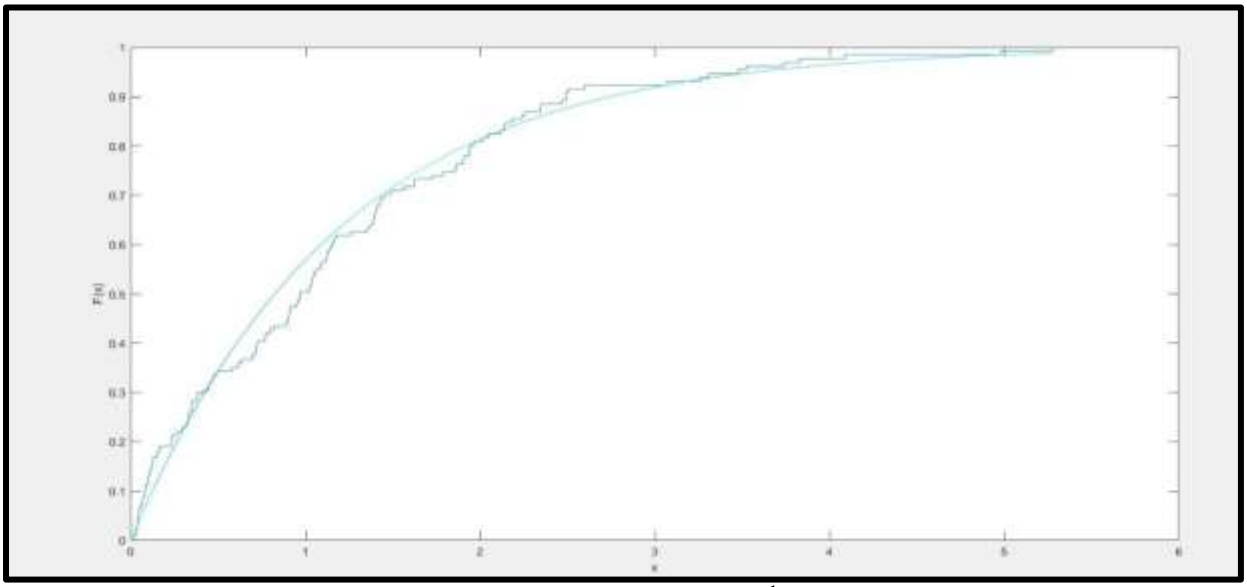
<u>**وصف البيانات:**</u>

تم الاعتماد على بيانات حقيقية حول العرض النقدي ، حيث توجد الكثير من المتغيرات التي تؤثر على هذا المتغير ، وان في هذا البحث اخذنا بعض المتغيرات وذلك باستشارة بعض المختصين في هذا المجال وبالاعتماد على المصادر حيث تم اخذ عينة حسب البيانات المتاحة للسنوات (٢٠١١-٢٠٢١) أي لمدة ١٠ سنوات وعلى حسب الأشهر ، وان المتغير المعتمد (Y) يمثل العرض النقدي والمتغير (X_1) يمثل العملة خارج البنوك والمتغير (X_2) يمثل المضاعف النقدي والمتغير (X_3) يمثل الودائع الجارية.

اختبار البيانات:

لمعرفة فيما اذا البيانات الخاصة بالعرض النقدي (Y) تتبع توزيع گاما المختلط اذ ان توزيع (Y) هو ذاته توزيع الخطأ فقد تم اختبار بيانات المتغير المعتمد (Y) للبيانات الحقيقية باستعمال برنامج $(MATLAB\ R2021b)$لاختبار حسن المطابقة وتبين ان العرض النقدي (Y) يتبع توزيع $(Mixed\ Gamma\ distribution)$ وكما موضح في الجدول (٤) والشكل (١١).

جدول (٤) يبين اختبار Kolmogorov-Smirnov للمتغير التابع باستعمال برنامج $(MATLAB\ R2021b)$				
Mixed Gamma				
Kolmogorov-Smirnov				
Sample Size	132			
Statistic	0.6565			
P-Value	1.9394e-50			
α	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.1056	0.1173	0.1312	0.1407
Reject?	No	No	No	No



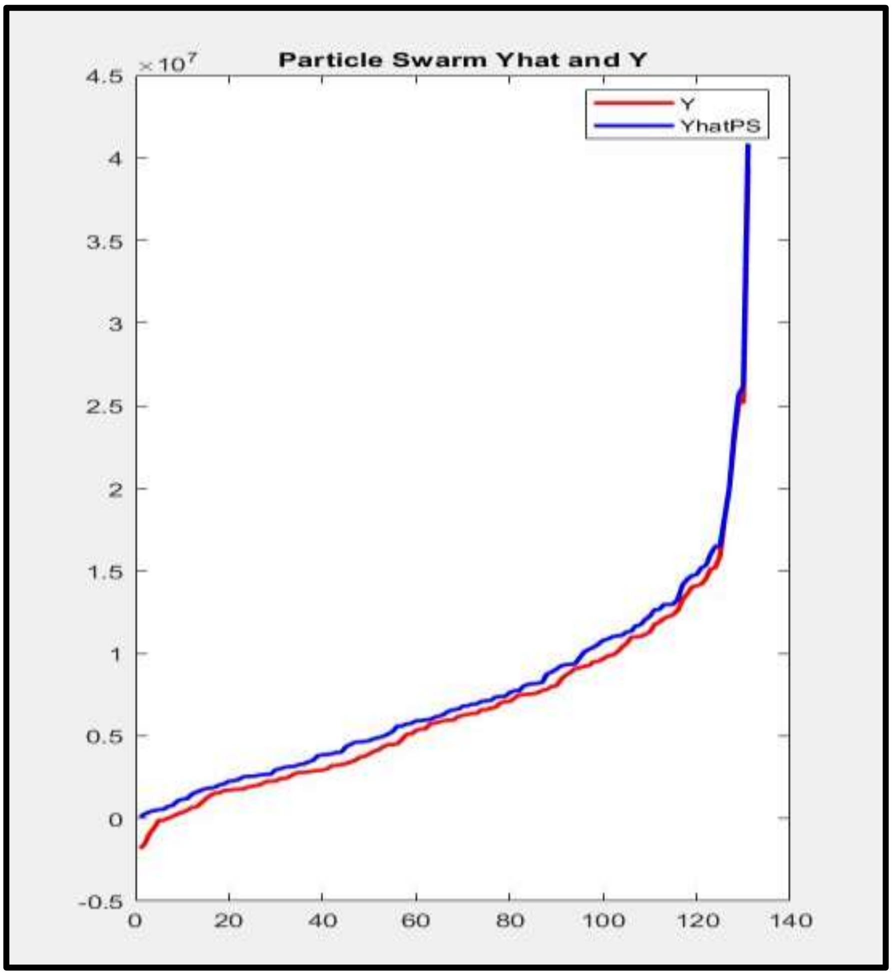
الشكل (١١) يبين الدالة التجميعية لتوزيع گاما المختلط للمتغير المعتمد (Y) للبيانات الحقيقية باستعمال برنامج $(MATLAB\ R2021b)$

تحليل النتائج:

بعدما تم تعريف ووصف البيانات الحقيقية ، تم استعمال برنامج $(MATLAB\ R2021b)$ للحصول على تقدير معلمات انموذج انحدار گاما المختلط باستخدام البيانات الحقيقية ، حيث سيتم استخدام افضل الطرائق المستخدمة في الجانب التجريبي وكانت افضل طريقة للتقدير هي خوارزمية (Particle Swarm)، وتم الحصول على النتائج التالية :

جدول (٥) يوضح القيم التقديرية للمعلمات عند البيانات الحقيقية											
Regression Parameters				Shape Parameters				Scale Parameters			
$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\theta}_0$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$
٠,٨٦٥٠	٠,٦٠٢٧	٠,٥٩٤٩	٠,٥٤٥٧	٥,٩٠٧١	١,٥٥٧	٥,٦٧٠٤	٥,٩٨٧١	٥,٣٢٨	٣,٣٢٨	٤,٣٢٨	٤,٣٢٨

والشكل (١٢) يوضح القيم التقديرية والقيم الحقيقية للبيانات الحقيقية باستخدام خوارزمية (Swarm Particle)



$$\hat{Y}_i = 0.8650 + 0.6027X_1 + 0.5949X_2 + 0.5457X_3 \qquad \dots(25)$$

ونلاحظ من خلال معادلة الانحدار (٢٥) أعلاه بان جميع المتغيرات المستقلة الثلاثة (العملة خارج النقود، المضاعف النقدي، الودائع الجارية) لها تأثير إيجابي وعلاقة طردية مع المتغير التابع (العرض النقدي) اذ ان تغير وحدة واحدة في العملة خارج النقود سيؤدي الى تغير في العرض النقدي بنسبة ٦٠٪ اما اذا كان هناك تغير وحدة واحدة في المضاعف النقدي سيؤدي الى تغير في العرض النقدي بنسبة ٥٩٪ اما فيما يخص التغير في الودائع الجارية سينتج عنه تغير في العرض النقدي بنسبة ٥٥٪ تقريباً

الاستنتاجات:

١. نستنتج من الاشكال (٢،...،١٠) ان جميع تقديرات المعلمات قريبة من المعلمات المفترضة لقيم الانموذج وبكافة احجام العينات (٥٠،١٠٠،١٥٠) وباستعمال طرائق التقدير الثلاثة.
٢. باستعمال طرائق التقدير المستعملة في البحث اظهرت لدينا نتائج المحاكاة بان قيم مقياس معيار المقارنة متوسط مربعات الخطأ (MSE) يتناقص بازدياد حجم العينة وهذا مايدل على صحة النظرية الاحصائية.
٣. من خلال تجارب المحاكاة اظهرت النتائج وباستعمال متوسط مربعات الخطأ (MSE)بان أفضل طريقة لتقدير انموذج انحدار گاما المختلط هي خوارزمية سرب الطيور $(Particle\ Swarm)$.
٤. من خلال اختبار $(Kolmogorov - Smirnov)$ نلاحظ ان المتغير التابع (Y) يتبع توزيع $(Mixed\ gamma)$ وهو ذاته لتوزيع الخطأ العشوائي في معادلة الانحدار.
٥. من خلال الجدول (٤-٣) نلاحظ ان نتائج التطبيق العملي اظهرت لدينا تقديرات جيدة لمعلمات الانموذج ونلاحظ ايضاً ان المتغيرات المستقلة لها تأثير إيجابي وتغير طردي مع متغير الاستجابة.

التوصيات:

١. استعمال خوارزمية سرب الطيور ($Particle\ Swarm$) في تقدير معلمات انحدار گاما المختلط كونها اعطت تقديرات مرنه وكفوءة في التقدير.
٢. استعمال طرائق تقدير اخرى في تقدير معلمات انحدار گاما المختلط وتطبيق خوارزميات الذكاء الصناعي الأخرى او الطرائق الحصينة.
٣. يمكن اخذ عوامل ومتغيرات أخرى لم تذكر في هذا البحث كالاحتياطي النقدي والرقم القياسي للأسعار ...الخ والتي تؤثر على العرض النقدي وتطبيقها في البحوث المستقبلية.
٤. توظيف التوزيع نفسه في عملية التقدير لمعلمات أنموذج الانحدار بوجود أحدى مشاكل أنموذج الانحدار الخطي المتعدد (عدم تجانس التباين , الارتباط الذاتي , التعدد الخطي)
٥. توظيف التوزيع المستخدم في هذه الدراسة ($Mixed\ gamma$) في عملية التقدير لمعلمات أنموذج الانحدار غير الخطي باستخدام الطرائق التي تم استخدامها في هذه الدراسة.

المصادر:

١. كاظم، اموري هادي و الدليمي، محمد مناجد عيفان (١٩٨٨) "مقدمة في تحليل الانحدار الخطي" ، جامعة بغداد ، كلية الإدارة والاقتصاد.
٢. كاظم، اموري هادي. و مسلم، باسم شليبة. (٢٠٠٢) القياس الاقتصادي المتقدم-النظرية والتطبيق، بغداد.
3. Altun, E., Korkmaz, M. Ç., El-Morshedy, M., & Eliwa, M. S. (2020). “The extended gamma distribution with regression model and applications”, AIMS Mathematics, 6(3): 2418–2439.
4. Bai, Q. (2010). “Analysis of particle swarm optimization algorithm”. Computer and information science, 3(1), 180
5. da Silva, R. V., Gomes-Silva, F., Ramos, M. W. A., & Cordeiro, G. M. (2015). “A new extended gamma generalized model”, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 100(2), 309-335.
6. Khalaf, Kamal Alwan, Ali, Omar Abdul Muhsin (2015) “Fundamentals of Financial Statistics” , Al-Jazeera Bureau for Printing and Publishing
7. Ortega, E. M., Cordeiro, G. M., Pascoa, M. A., & Couto, E. V. (2012). “The log-exponentiated generalized gamma regression model for censored data”, Journal of Statistical Computation and Simulation, 82(8), 1169-1189.
8. Rini, D. P., Shamsuddin, S. M., & Yuhaniz, S. S. (2011). “Particle swarm optimization: technique, system and challenges”, International journal of computer applications, 14(1), 19-26.
9. Saha, M., Yadav, A. S., Pandey, A., Shukla, S., & Maiti, S. S. (2019). “The extended xgamma distribution”, arXiv preprint arXiv:1909.01103
10. Sen, S., Maiti, S. S., & Chandra, N. (2016). “The xgamma distribution: statistical properties and application”, Journal of Modern Applied Statistical Methods, 15(1), 38.