مقارنة بين طرائق تقدير المعلمات ودالة البقاء لتوزيع Inverse Gompertz باستعمال المحاكاة بطريقة Monte-Carlo

الباحث مصطفى عدنان هاشم
مركز دراسات المرأة - جامعة بغداد

ا.م. سهيل نجم عبود
كلية الادارة والاقتصاد - جامعة بغداد

المستخلص:
ان موضوع تحليل دوال البقاء من المواضيع المهمة المستعملة في معرفة مدة البقاء على قيد الحياة للشخص المصاب بمرض او ورم معين، ان الهدف الرئيسي لهذا البحث هو اختيار افضل طريقة لتقدير دالة البقاء لتوزيع(Inverse Gompertz)حيث تم استعمال ثلاث طرائق لتقدير المعالم ودالة البقاء للتوزيع المدروس وهي طريقة الامكان الاعظم(MLE) وطريقة المربعات الصغرى الموزونة(WLS) وطريقة (Cramer Von Mises) وتمت المقارنة بين طرائق التقدير بأستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ التكاملي حيث اظهرت النتائج ان طريقة Cramer Von Mises (CVM) هي افضل طريقة لتقدير دالة البقاء عند حجوم العينات الصغيرة والكبيرة.

الكلمات المفتاحية :توزيع Inverse Gompertz ، طريقة الامكان الاعظم ،طريقة المربعات الصغرى الموزونه ، طريقة Cramer Von Mises ،نتائج المحاكاة

Abstract:
The subject of survival function analysis is one of the important topics used to know the duration of survival of a person with a particular disease or tumor, the main objective of this research is to choose the best method to estimate the survival function for the distribution (Inverse Gompertz), where three methods were used to estimate the parameters and the survival function of the studied distribution, namely the Maximum likelihood method (MLE), the method of weighted least squares (WLS) and the method of (Cramer von Mises), The estimation methods were compared using the criterion of the integrated mean squares error (IMSE), where the results showed that the Cramer von Mises method (CVM) is the best method to estimate the survival function at the sizes of small and large samples.

١- المقدمة Introduction

قدم العالم (Benjamin Gompertz) في عام ١٨٢٥ توزيعا احتماليا بمعلمتين سمي بتوزيع Gompertz، يعتبر هذا التوزيع من التوزيعات الاحتمالية المستمرة وغالبا ما يستعمل في تحليل البقاء على قيد الحياة ونمذجة بيانات الوفيات والعلوم السلوكية. ان هذا التوزيع هو تعميم للتوزيع الاسي وله الكثير من التطبيقات في الدراسات الطبية والاكتوارية وله علاقة مع بعض التوزيعات المعروفة منها توزيع Gumbel وتوزيع Weibull والتوزيعات اللوجيستي المولدة والتوزيع الاسي[8].

غالبا ما يتم تطبيق توزيع Gompertz لوصف اعداد البالغين من قبل الديموغرافيين والخبراء الاكتواريين في مجالات العلوم ذات الصلة مثل علوم البيولوجيا وعلم الشيخوخة وكذلك تطبيقات مهمة لتحليل البقاء على قيد الحياة بالنسبة للكائنات الحية.

٢- توزيع Inverse Gompertz

هذا التوزيع اقترحه الباحثان (Eliwa , M .S and M .El-Morshedy)[5] في عام ٢٠١٨ ويمتلك هذا التوزيع معلمتين، ليكن y متغير عشوائي يمتلك توزيع Gompertz بالمعلمتين α ،β اذ ان:

$\alpha > 0$ هي معلمة الشكل (shape parameter) و $\beta > 0$ هي معلمة القياس (scale parameter) عندئذ تكون دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) للمتغير العشوائي y هي :

$$g(y)=\alpha e^{\frac{-\alpha}{\beta}(e^{\beta y}-1)+\beta y} \quad \ldots (1)$$

ولغرض الحصول على دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) لتوزيع Inverse Gompertz (IG) نفترض ان:

$$X = \frac{1}{Y} \Rightarrow Y = \frac{1}{X} \quad \ldots (2)$$

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{1}{X^2} \quad \ldots. (3)$$

وتكون القيمة المطلقة لمؤثر Jacobian المتعلق بأبدال المتغير Y الى المتغير x هي:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n |J| = \left| -\frac{1}{X^2} \right| = \frac{1}{X^2} \;\; > ٠ \quad \ldots (4)$$

$$f(x) = g\left(\frac{1}{X}\right) * |J| \quad \ldots (5)$$

إذا دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي الذي يتوزع Inverse Gompertz (IG) هي:

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{x^2} e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)+\frac{\beta}{x}} \qquad \mathbf{x>0,\ \alpha>0,\ \beta>0} \quad \mathbf{\ldots (6)}$$

أما بالنسبة لدالة التوزيع التراكمي (CDF) لتوزيع Inverse Gompertz (IGD) هي كالاتي:

$$F(x) = p(X \le x) \quad \ldots (7)$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \quad \ldots (8)$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{\alpha}{t^2} e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{t}}-1\right)+\frac{\beta}{t}} \, dt \quad \ldots (9)$$

$$F(x) = \int_0^x e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{t}}-1\right)} \frac{\alpha}{t^2} e^{\frac{\beta}{t}} \, dt \quad \ldots (10)$$

عند التعويض بحدود التكامل يتبين لنا ان التكامل معتل من النوع الاول اي بالنسبة للنهاية الدنيا

$$F(x) = e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)} - lim\left[\frac{1}{e^{\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{t}}-1\right)}}\right] \quad \ldots (11)$$

$$F(x) = e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)} - 0 \quad \ldots (12)$$

إذا دالة التوزيع التراكمي CDF لتوزيع (IGD) هي:

$$F(x) = e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)} \qquad \mathbf{;\ x>0,\ \alpha>0,\ \beta>0} \quad \mathbf{\ldots (13)}$$

٣- دالة البقاء : (Survival Function)

تعرف دالة البقاء احتمال بقاء الكائن الحي بعد الزمن x, اي ان:

$$S(x) = p(X > x) = 1 - p(X \le x) \quad \ldots (14)$$

$$S(x) = 1 - F(X) \quad \ldots (15)$$

$$S(x) = 1 - e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)} \qquad x>0,\ \alpha>0,\ \beta>0 \quad \ldots (16)$$

ان هذه الدالة مستمرة، قابلة للتفاضل، رتيبة متناقصة وقيمها تقع بين الصفر والواحد الصحيح وبشكل خاص يكون لدينا:

$$\lim_{x\to\infty} S(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} S(x) = 1 \quad \ldots (17)$$

٤- طرائق تقدير المعلمات ودالة البقاء:

٤-١ طريقة الامكان الاعظم Maximum likelihood Method

يعد عالم الرياضيات الالماني(Carl Friedrich Gauss) أول من صاغ طريقة دالة الإمكان الأعظم ، بينما قام الباحث الإنكليزي(Ronald Aylmer Fisher) بتطبيقها لأول مرة من خلال أبحاث كثيرة.تمتاز المقدرات المستخرجة على وفق هذه الطريقة بكونها مقدرات كفوءة (Efficient Estimator) وتمتلك خاصية اقل تباين ممكن (Minimum Variance Unbiased Estimators) فضلا عن خاصية مهمة جدا وهي خاصية الثبات (Invariance Property) وتكون اكثر دقة عند زيادة حجم العينة (n) وتعتمد على فكرة ايجاد المقدر الذي يجعل دالة الامكان للمشاهدات في نهايتها العظمى[4][5][2]

لتكن $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ عينة عشوائية بحجم n مسحوبة من مجتمع تتوزع مفرداته بحسب دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (Inverse Gompertz) ذو المعلمتين (α, β)، فان دالة الإمكان للمشاهدات هي حسب الصيغ الآتية:

$$L(\alpha,\beta;x1,\ldots,xn)=\prod_{i=1}^{n}f(xi) \qquad \ldots(18)$$

$$L(\alpha,\beta;x1,\ldots,xn)=\frac{\alpha^n}{\prod_{i=1}^{n}xi^2}e^{\frac{-\alpha}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{\beta}{xi}}-1\right)+\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{xi}} \qquad \ldots(19)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان الاعظم نحصل على مقدري الامكان الاعظم للمعلمتين α,β بتعظيم الدالة $\ln L$ بالنسبة β,α:

$$Ln\ L=nln\alpha-2\sum_{i=1}^{n}ln\,(xi)-\frac{\alpha}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{\beta}{xi}}-1\right)+\ \beta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{xi} \qquad \ldots(20)$$

بالاشتقاق الجزئي بالنسبة للمعلمة α والمساواة بالصفر نحصل على

$$n\hat{\beta}-\hat{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1)=0 \qquad \ldots(21)$$

ومن المعادلة (٢١) نجد قيمة ال $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1)}{n\hat{\beta}} \qquad \ldots(22)$$

وبالاشتقاق الجزئي بالنسبة للمعلمة β والمساواة بالصفر نحصل على:

$$-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{xi}e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}\right)+\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}^2}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{xi}=0 \qquad \ldots(23)$$

وبحل المعادلة أعلاه وذلك باستعمال طريقة (Newton–Raphson) **نجد مقدري الامكان الاعظم** $\hat{\beta},\hat{\alpha}$ **للمعلمتين** α,β **وبتعويض هذين المقدرين في دالة البقاء نحصل على مقدر الامكان الاعظم لدالة البقاء:**

$$\hat{S}_{(x)ml}=1-e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{x}}-1\right)} \qquad \ldots(24)$$

2-4 **طريقة المربعات الصغرى الموزونة** Weighted Least Square Method

تهدف هذه الطريقة الى جعل مجموع مربعات الانحرافات اقل ما يمكن، وباستخدام طريقة وايت (**White's Method**) التي تعتمد بصورة أساسية في تطبيقها على دالة البقاء للتوزيع المراد تقدير معلماته وتحويل صيغة الدالة الى معادلة خطية[1][5].

يمكن الحصول على مقدري المربعات الصغرى الموزونه للمعلمتين $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ وذلك بتصغير الدالة التالية:

$$w(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}W_i\left(F(xi)-\hat{F}(xi)\right)^2 \qquad \ldots(25)$$

$$W_i=\frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)}$$ حيث ان

$$\boldsymbol{w(\alpha,\beta)}=\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\frac{\mathbf{(n+1)^2(n+2)}}{\mathbf{i(n-i+1)}}\left(\boldsymbol{e}^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{xi}}-1\right)}-\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{n+1}}\right)^{\mathbf{2}} \qquad \ldots(26)$$

حيث ان $\widehat{F}_{(xi)}= E\{F_{(Xi:n)}\}$ مقدر غير متحيز لدالة التوزيع التراكمية يمكن الحصول عليه بعد ترتيب البيانات تصاعديا وبأستخدام صيغ تجريبية منها $\widehat{F}_{(xi)}=\frac{i}{n+1}$

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha} = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)}\{e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{xi}}-1\right)} - \frac{i}{n+i}\}\{e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{xi}}-1\right)} - \frac{1}{\beta}(e^{\frac{\beta}{xi}}-1)\} \quad ...(27)$$

وبمساواة $\frac{\partial w}{\partial \alpha}$ بالصفر نحصل:"

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)}[e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right)} - \frac{i}{n+i}]\left[e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right)}\right][-\frac{1}{\hat{\beta}}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right)] = 0 \quad ...(28)$$

وبالضرب الطرفين $\frac{-\hat{\beta}}{2}$ نحصل على

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)}[e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right)} - \frac{i}{n+i}]\left[e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right][e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right)}] = 0 \quad ...(29)$$

وبالاشتقاق الجزئي للدالة $w(\alpha,\beta)$ بالنسبة للمعلمة β نحصل على:

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)}[e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right)} - \frac{i}{n+i}][(\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}xi}\, e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}) - \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}^2}(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1)]\, e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right)} \quad .. (30)$$

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)}[e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right)} - \frac{i}{n+i}]\,\hat{\alpha}[(\frac{1}{\hat{\beta}xi}\, e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}) - \frac{1}{\hat{\beta}^2}(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1)]\, e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right)} \quad (31)$$

وبمساواة المعادلة أعلاه بالصفر والقسمة على $2\hat{\alpha}$ نحصل على الاتي:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)}[e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right)} - \frac{i}{n+i}][(\frac{1}{\hat{\beta}xi}\, e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}) - \frac{1}{\hat{\beta}^2}(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1)]\, e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right)} = 0 \quad .(32)$$

وبحل المعادلتين (**29**) و(**32**) باستعمال طريقة (**Newton–Raphson**) نحصل على مقدرات المربعات الصغرى الموزونة $\hat{\beta}_{wls}$، $\hat{\alpha}_{wls}$ للمعلمتين **α,β** وبذلك فأن مقدر المربعات الصغرى الموزونة لدالة البقاء يحسب بالصيغة الاتية:

$$\hat{S}_{(x)wls} = 1 - e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{x}}-1\right)} \quad ...(33)$$

3-4 طريقة Cramer-Von Mises

قدمت هذه الطريقة من قبل(Harald Cramer1928 and Richard Edler von Mises1991) في وهي من معايير حسن المطابقة وتعتمد على الفرق بين دالة التوزيع التراكمي مع دالة التوزيع التجريبية لتكن $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ عينة عشوائية من مجتمع يتوزع توزيع (IG) بحيث ترتب قيم هذه البيانات تصاعديا عندئذ يمكن الحصول على مقدري (CVM) للمعلمتين α,β وذلك بتصغير الدالة الآتية التي اقترحها الباحثين[3][5][1]

$$C(\alpha,\beta) = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left(F_{(xi)} - \frac{2i-1}{2n}\right)^2 \quad .... (34)$$

وبالاشتقاق الجزئي للدالة$C(\alpha,\beta)$ بالنسبة α,β ومساواتها بالصفر $\frac{\partial C}{\partial \alpha} = 0$ و$\frac{\partial C}{\partial \beta} = 0$ نحصل على الاتي :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right)} - \frac{2i-1}{2n}\right)\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right)e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right)} = 0 \quad ... (35)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right)}-\frac{2i-1}{2n}\right)\left(\frac{1}{\hat{\beta}xi}e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-\frac{1}{\hat{\beta}^{2}}e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right)e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{xi}}-1\right)}=0\ ...\ (36)$$

وبحل المعادلتين (٣٥)و(٣٦) باستعمال طريقة (Newton–Raphson) نجد مقدري Cramér-VonMises للمعلمتين α,β ويكون مقدر دالة البقاء كالاتي.

$$\hat{S}_{(x)CVM}=1-e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\left(e^{\frac{\hat{\beta}}{x}}-1\right)}\qquad ...\ (٣٧)$$

٦- عرض ومناقشة تجارب المحاكاة

تضمنت تجارب المحاكاة عدة مراحل لمناقشة نتائج تقدير المعالم ودالة البقاء.

١-اختيار القيم الافتراضية لمعلمتي التوزيع (α=0.5, 0.9, 1.5 and β=0.3, 1.2, 1.5) وباحجام عينات مختلفة (n=20,50,75,100,150).

٢- توليد المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع (Inverse gompertz) بالمعلمتين (α,β) وكالاتي :

$$x=\frac{\beta}{Ln(1-\frac{\beta}{\alpha}LnU)}\qquad ...(38)$$

٣- تقدير المعالم ودالة البقاء للتوزيع باستخدام طرائق التقدير الثلاثة .

٤- المقارنة بين طر ائق التقدير باستخدام معيار متوسط مربعات الخطأ التكاملي وحسب المعادلة الاتية:

$$\boldsymbol{IMSE(\hat{S}(x))=\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}\left[\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{ni}\left(\hat{S}_i(x_i)-S(x_i)\right)^2\right]}\qquad ...\ (39)$$

حيث ان

q: عدد التكرارات (Replication) لكل تجربة (1000) مرة .

$\hat{S}_{(x)}$: مقدر دالة البقاء بحسب طريقة التقدير .

$S_{(X)}$: دالة البقاء وفق القيم الابتدائية .

من خلال الجدول (١) و(٢) سوف يتم عرض نتائج تقدير متوسط مربعات الخطأ MSE للمعالم المقدرة ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE وكما مبين ادناه:

جدول(١) يبين قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) لمقدرات المعلمات لجميع حجوم العينات

α=0.5 & β=0.3								
N	Method MSE ($\hat{\alpha}$)			Best	Method MSE($\hat{\beta}$)			Best
	MLE	WLS	CVM		MLE	WLS	CVM	
20	1.81943	0.000459	0.17665	WLS	0.00209	0.1761847	0.00021	CVM
50	7.123172	0.0004990	0.001186	WLS	٠,٠٠٠٠٠٨٤	0.0001799	0.000199	MLE
75	2.331964	0.00050	0.000686	WLS	0.000083	0.00018	0.000192	MLE
100	١,٦٥٢٨٤٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٠١٨٣	CVM	٠,٠٠٠٠١٠٦	٠,٠٠٠١٨	٠,٠٠٠٠١٨٩	MLE
150	٠,٩٠٢٠٢٤	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٠٠١٢	CVM	٠,٠٠٠٠١٢٢	٠,٠٠٠١٨	٠,٠٠٠٠١٨٦	MLE
α=0.9 & β=1.2								
20	2.029006	0.0016098	0.000194	CVM	3.12E-05	0.0027928	0.004285	MLE

50	1.574838	0.0016199	4.48E-09	CVM	0.00224	0.0028795	0.003578	MLE
75	1.235035	0.0016199	0.00042	CVM	0.002345	0.0028798	0.003327	MLE
100	١,١٢١٢٦٥	٠,٠٠١٦٢	٠,٠٠٠٦٦٦	CVM	٠,٠٠٢٤٧٨	٠,٠٠٢٨٧٩٩	٠,٠٠٣٢٠٧	MLE
150	١,٠٠٧٤٧١	٠,٠٠١٦٢	٠,٠٠١٠٠٩	CVM	٠,٠٠٢٥٩٣	٠,٠٠٢٨٨	٠,٠٠٣٠٩٩	MLE
α=1.5 & β=1.5								
20	7.269983	0.004498	0.000019	CVM	0.000453	0.004468	0.005975	MLE
50	4.886237	0.0044999	0.002714	CVM	0.003414	0.004499	0.00523	MLE
75	٣,٦٣٧٧٨٨	٠,٠٠٤٥	٠,٠٠٣٠٣٥	CVM	٠,٠٠٣٥٦٦	٠,٠٠٤٤٩٩٥	٠,٠٠٤٩٦٧	MLE
100	٣,٢٦٣٤٥٣	٠,٠٠٤٥	٠,٠٠٣٣٩١	CVM	٠,٠٠٣٧٩٨	٠,٠٠٤٤٩٩٨	٠,٠٠٤٨٤٥	MLE
150	٢,٨٨٥٩١	٠,٠٠٤٥	٠,٠٠٣٧١٢	CVM	٠,٠٠٣٩٩٤	٠,٠٠٤٤٩٩٩	٠,٠٠٤٧٣	MLE

من خلال نتائج المحاكاة في الجدول(١) ولجميع حجوم العينات تبين لنا الاتي:

- في تقدير معلمة الشكل α في النموذج الاول كانت طريقة المربعات الصغرى الموزونه هي الافضل عند حجوم عينات($n=20,50,75$) وطريقة CVM عند حجم العينة($n=100,150$) اما في النموذج الثاني والثالث كانت طريقة CVM هي الافضل ولجميع حجوم العينات.
- اما في تقدير معلمة القياس β في النموذج الاول كانت طريقة المربعات الصغرى الموزونه(WLS)هي الافضل عند حجم عينة ($n=20$) وطريقة الامكان الاعظم(MLE)هي الافضل عند حجوم العينات ($n=50,75,100,150$) اما في النموذج الثاني والثالث كانت طريقة الامكان الاعظم(MLE)هي الافضل ولجميع حجوم العينات.

جدول(٢)يمثل متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لمقدر دالة البقاء لجميع حجوم العينات

α=0.5 & β=0.3				
N	Method			Best
	IMSE $\hat{S}(x)$ MLE	IMSE $\hat{S}(x)$ WLS	IMSE $\hat{S}(x)$ CVM	
20	0.0035000	0.000375	0.000712	WLS
50	٧,٨٠٩٠٩٨٤	0.00033	0.0000392	CVM
75	1.6028029	0.0001995	0.0000179	CVM
100	٠,٠٦٦٧٥٤٢	٠,٠٠٠١٥	٠,٠٠٠٠٠٣	CVM
150	٠,٠٠٢٢٢٦٥	٠,٠٠٠١٢	٠,٠٠٠٠٠٠٧	CVM
α=0.9 & β=1.2				
20	0.0018308	0.0004131	0.0000066	CVM
50	0.0008461	0.0003256	0.0000254	CVM
75	0.0003429	0.0001996	0.0000648	CVM
100	٠,٠٠٠٢٢٥٢	٠,٠٠٠١٥٠٤	٠,٠٠٠٠٦٦٨	CVM
150	١,٥٣٨٣٠٩٨	٠,٠٠٠١١٨٨	٠,٠٠٠٠٧٤٥	CVM
α=1.5 & β=1.5				

20	0.0132407	0.0004345	0.0000294	CVM
50	0.0011878	0.0003256	0.0001858	CVM
75	٠,٠٠٠٤٠٠٩	٠,٠٠٠١٩٩٦	٠,٠٠٠١٢٨٥	CVM
100	٠,٠٠٠٢٥٣٠	٠,٠٠٠١٥٠٤	٠,٠٠٠١٠٨٦	CVM
150	٠,٠٠٠١٦٥٢	٠,٠٠٠١١٨٨	٠,٠٠٠٠٩٤٩	CVM

من الجدول(٢) تبين لنا الاتي:

- في النموذج الاول كانت طريقة WLS هي الافضل عند حجم عينة(n=20) وطريقة CVM عند حجوم العينات (n=50,75,100,150).
- اما في النموذج الثاني والثالث كانت طريقة CVM هي الافضل ولجميع حجوم العينات حيث اعطت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي IMSE لتقدير دالة البقاء.

٧-الاستنتاجات: Conclusions

من خلال تجارب المحاكاة نستنتج الاتي :

اولا: عند تقدير متوسط مربعات الخطأ (MSE) لمعلمة الشكل(α) ظهرت طريقة المربعات الصغرى الموزونة(WLS) بالافضلية في النموذج الاول وعند حجم العينات الصغيرة(n=20,50,75) اما في حالة العينات الكبيرة (n=100,150) كانت طريقة (CVM) الافضل واعطت اقل متوسط مربعات خطأ (MSE)، اما في النموذج الثاني والثالث كانت طريقة (CVM)الافضل ولجميع حجوم العينات

ثانيا: عند تقدير متوسط مربعات الخطأ(MSE) لمعلمة القياس(β) كانت طريقة الامكان الاعظم(MLE) هي الافضل حيث اعطت اقل(MSE) ولجميع حجوم العينات وللنماذج الثلاثة.

ثالثا:عند تقدير متوسط مربعات الخطأ التكاملي(IMSE)لدالة البقاء لتوزيع(IG) كانت طريقة (CVM) هي الافضل للعينات الصغيرة والكبيرة.

المصادر References

1. Dey, S., Moala, F.A. and Kumar, D., 2018. **"Statistical properties and different methods of estimation of Gompertz distribution with application"**. Journal of Statistics and Management Systems, 21(5), pp.839-876.
2. Eghwerido, J.T., Efe-Eyefia, E. and Otakore, O., 2021. **"Performance Rating of the Zubair Gompertz distribution: properties and applications"**. *Journal of Statistics and Management Systems*, *24*(8), pp.1601-1626.
3. El-Damcese, M.A., Mustafa, A. and Eliwa, M.S., 2014. **"Exponentiated Generalized Weibull Gompertz Distribution".** *arXiv preprint arXiv:1412.0705*.
4. El-Gohary, A., Alshamrani, A. and Al-Otaibi, A.N., 2013. **"The generalized Gompertz distribution"**. *Applied mathematical modelling*, *37*(1-2), pp.13-24.
5. Eliwa, M.S., El-Morshedy, M. and Ibrahim, M., 2019. **"Inverse Gompertz distribution: properties and different estimation methods with application to complete and censored data"**. *Annals of data science*, *6*(2), pp.321-339.
6. El-Morshedy, M., El-Faheem, A.A. and El-Dawoody, M., 2020. **"Kumaraswamy inverse Gompertz distribution: Properties and engineering applications to complete, type-II right censored and upper record data"**. *Plos one*, *15*(12), p.e0241970.
7. Garg, M.L., Rao, B.R. and Redmond, C.K., 1970. **"Maximum-likelihood estimation of the parameters of the Gompertz survival function"**. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, *19*(2), pp.152-159.
8. Gompertz, B., 1825. XXIV. **“On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies”** . In a letter to Francis Baily, Esq. FRS &c. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, (115), pp.513-583.