مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
Journal of the College of Basic Education Vol.31 (NO. 132) 2025, pp. 439-452

مقارنة بعض طرائق تقدير دالة البقاء لتوزيع كوماراسوامي المعكوس المتقطع

محمد علي حسين [1]
قسم الاحصاء، الجامعة المستنصرية، كلية الادارة والاقتصاد
07705538581
mohamed.husein@uomustansiriyah.edu.iq

أ.م.د امينة كريم عيسى [2]
قسم الاحصاء، الجامعة المستنصرية ، كلية الادارة والاقتصاد
07713750083
ameena@uomstansiriyah.edu.iq

مستخلص البحث:
تناول البحث دراسة توزيع كوماراسوامي المعكوس المتقطع discrete inverted Kumaraswamy distribution المناظر لتوزيع المستمر وتم تقدير معلمات الأنموذج قيد الدراسة باستخدام طرقتين، كانت الطرائق المستخدمة هي طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Method) وطريقة بيز Bayes Method ، من أجل إيجاد افضل طريقة من بين طرائق التقدير تم استعمال اسلوب المحاكاة مونتي كارلو (Monty Carlo) باستعمال لغة البرمجة الإحصائية (R 4.2.1) ،واستخدم في الدراسة اربعة حالات مختلفة لمعلمات الأنموذج وطبقت على ثلاثة احجام للعينات (30 ، 60، 120) ، وذلك لدراسة مدى افضلية الطرائق المستخدمة في تقدير معلمات الأنموذج وتم ذلك عن طريق استخدام معيار المقارنة بين هذه الطرائق متوسط مربعات الخطأ (MSE) وتبين من خلال المقارنة ان طريقة بيز لحجوم العينات الصغيرة والمتوسط كانت الافضل لاغلب النماذج المستخدمة اما بالنسبة لحجوم العينات الكبير كانت الافضلية لطريقة الإمكان الأعظم لاغلب النماذج المستخدمة.

الكلمات المفتاحية :توزيع كوماراسوامي المعكوس المتقطع،دالة البقاء، دالة المخاطرة، طريقة الإمكان الأعظم، طريقة بيز.

ملاحظة : البحث مستل من رسالة ماجستير

1.المقدمة:

دالة البقاء هي إحدى المفاهيم الأساسية في علم الإحصاء والاحتمالات، حيث تُستخدم في تحليل استمرارية الأحداث واحتمالية وقوعها على مدى الزمن. تلعب هذه الدالة دورًا مهمًا في العديد من المجالات، مثل الطب والهندسة وعلوم الحياة، حيث يتم استخدامها لدراسة معدلات البقاء والتوزيعات الزمنية للأحداث. يساعد تحليل دالة البقاء في فهم تطورات الظواهر المختلفة واتخاذ القرارات بناءً على بيانات موثوقة.في معظم الدراسات، يتم الاعتماد على البيانات المستمرة في تحليل دالة البقاء، بينما تُستخدم البيانات المتقطعة بشكل أقل رغم أهميتها العملية. يمكن الحصول على التوزيعات المتقطعة المكافئة للتوزيعات المستمرة من خلال نماذج رياضية، مثل التوزيع الهندسي وبواسون وثنائي الحد. تعتمد هذه التوزيعات المتقطعة على خصائص نظائرها المستمرة، مما يسمح بتطبيقها على بيانات زمن البقاء المتقطعة.يهدف هذا البحث إلى مقارنة طرق تقدير دالة البقاء لتوزيع كومار اسوامي المعكوس المتقطع بناءً على معايير متعددة، تشمل الدقة وملاءمة البيانات وسهولة التطبيق. يتم تحليل مدى توافق هذه الطرق مع خصائص البيانات المتقطعة، بالإضافة إلى تقييم مدى قدرتها

على توفير تقديرات دقيقة لفترات البقاء. كما يتم التركيز على سهولة استخدام كل طريقة وإمكانية تفسير نتائجها، مما يسهم في تعزيز فهم الباحثين والممارسين لهذه الأساليب.
من خلال هذه الدراسة، يمكن للباحثين في مجالات علوم البيانات والإحصاء اختيار الطريقة الأكثر ملاءمة لتقدير دالة البقاء، مما يساعدهم في تحسين دقة التحليل واتخاذ قرارات مدروسة بناءً على بيانات موثوقة.

1.1 الدرسات السابقة

في عام (2017) اقترح الباحثون (Muhammad Maqsood Zafar Iqbal, Tahir, Naureen Riaz, Syed Azeem Ali, Munir Ahmad) [13] توزيع كوماراسوامي المعكوس المعمم، الذي يعتبر اكثر مرونة من توزيع كوماراسوامي المعكوس وجميع النماذج المرتبطة به والفرعية. ناقشت الدراسة الخصائص الاحصائية ومقايس النزعة المركزية ومقايس التشتت للتوزيع، و دراسة التوزيعات الاحتمالية ذات الصلة من خلال بعض التحولات المحددة، وكذلك تقدير معلمات التوزيع باستخدام طريقة بيز وطريقة الامكان الاعظم، والمقارنة بين الطرقتين باستخدام معايير خاصة عن طريق المحاكاة. وفي الجانب التطبيقي استخدمو بيانات لأسعار الألعاب الخشبية لـ 31 طفلاً لاستخراج تقديرات البقاء ودالة المخاطرة. في عام (2018) قدم الباحث (Atheer Abdul-Zahra Kareem) [5] التوزيع الاحصائي الملائم من خلال اشتقاق علاقة ما بين معامل الخطورة والزمن وتبين ان توزيع ويبل هو الاكثر ملائمة. قام بدراسة التوزيع وتقدير معلمات الأنموذج باستخدام طرائق معلمية طريقة الامكان الاعظم وطريقة وايت وطريقة التقلص وكذلك طرائق غير معلمية، وايضا تحليل دوال البقاء في الطرائق المعلمية واما في الطرائق غير معلمية تم الحصول على دوال البقاء خلال تطبيقات الدالة التجميعية، وكذلك المقارنة بين طرائق التقدير عن طريق المحاكاة العددية . وفي الجانب التطبيق استخدم الباحث بيانات حقيقية عن جرح احدى التفجيرات الارهابية لاستخراج دوال البقاء.

في عام 2022، اقترح الباحثون (Christophe Chesneau, Vijay Kumar, Mukti Khetan and Mohd Arshad). [6] التوزيع الأسي المرجح المعدل بمعلمتين، وهو ناتج عن خلط التوزيع الأسي والتوزيع الأسي المرجح. درسوا خواصه الإحصائية، مثل العزوم، إحصاءات الرتب، ودالة الكمية، وقدموا طرقًا متعددة لتقدير معلماته، منها الإمكان الأعظم، المربعات الصغرى، وكريمر فون ميسز .كما شملت الدراسة تحليل معدلات البقاء ودالة الخطورة باستخدام المحاكاة العددية، ومقارنته مع توزيعات أخرى مثل ويبل، الأسي المرجح، وجاما .أظهرت النتائج تفوق الأنموذج المقترح وفقًا للتحليلات. في عام 2022، اقترح (A. A. EL-Helbawy , M. A. Hegazy , G. R. AL-Dayian and R. E., Abd EL-Kader) [1] توزيع كوماراسوامي المعكوس المتقطع، حيث درسوا خصائصه الإحصائية، مثل العزوم، إحصاءات الرتب، دالة الكمية، بالإضافة إلى دالة الكثافة الاحتمالية، دالة المخاطر، ودالة البقاء .تم تقدير معلمات الأنموذج باستخدام طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز عبر بيانات خاضعة للرقابة من النوع الثاني بأسلوب المحاكاة. تطبيقيًا، تمت مقارنة الأنموذج مع توزيعات أخرى باستخدام ثلاث مجموعات من البيانات الحقيقية، مما أظهر ملاءمته ومرونته العالية. في عام (2023) قدمت الباحثة (Neba Saleh Hadi) [11] دراسة على بعض التوزيعات المتقطعة في مجال البقاء المناظرة للتوزيعات المستمرة ضمن العائلة الاسية المتمثلة بتوزيع (Maxwell،Gamm, Generalized Rayleigh , Weibull Burr). وركزت الدراسة على دراسة الخصائص الاحصائية للتوزيعات، وكذلك تقدير المعلمات باستخدام طريقة بيز وطريقة الامكان الاعظم والمقارنة بين اداء هذا الطريقتين باستخدام اسلوب المحاكاة. وفي الجانب

التطبيقي استخدمت الباحثة بيانات حقيقية لمرضى الجلط الدماغية لتقدير المعلمات ودالتي البقاء والخطورة.

2. دالة البقاء

تعرف دالة البقاء بأنها احتمال عدم فشل المفردات بعد مرور الزمن، (t) اي احتمال المريضة - في وضع جيد خلال فترة زمنية معينة دون حدوث الحدث بقاء المشاهدة والصيغة الرياضية لهذه الدالة [5] .

$$S(t) = \Pr(T > t) \quad \ldots.(1)$$

حيث تشير (T) إلى زمن البقاء وهو متغير عشوائي مستمر موجب، بينما تشير (t) الى اي وقت محدد لزمن البقاء ويمكن إعادة تعريف دالة البقاء $S(t)$ بالصيغة الاتية [5]

$$S(t) = 1 - \Pr(T \leq t) \quad \ldots.(2)$$

$$S(t) = 1 - F(t) \quad \ldots.(3)$$

ودالة البقاء تتناسب عكسيا مع الزمن اي ان:

$$S(t = 0) = 1 \quad \ldots.(4)$$

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = 0 \quad \ldots.(5)$$

3. دالة المخاطرة Hazard Function

هي احتمال فشل المفردة خلال الفترة الزمنية $(t{,}t+\Delta t)$ بشرط ان المفردة لم تتعرض للفشل حتى اللحظة t وبذلك يعتبر معامل الخطورة إحتمال شرطي يرمز له $h(t)$. يمثل معامل الخطورة تعبيراً رياضيا عن مدة الفشل او الاخفاق، والتي تكون محصورة بين زمنين محددين هما t_2, t_1 و .

وبناء على ذلك، تحدد الدالة الاحتمالية الشرطية لفشل المفردة وفق العلاقة الاتية[7] :

$$\Pr(t < T \leq t + \Delta t > t) = \frac{\Pr(t < T \leq t + \Delta t)}{\Pr(T > t)} \quad \ldots.(6)$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{s(t)} \quad \ldots.(7)$$

إن دالة الخطورة $h(t)$ تتناسب عكسياً مع دالة البقاء $S(t)$ وطردياً مع دالة الكثافة الاحتمالية $f(t)$. لذلك، فإن العلاقة التي تربط هذه المفردات الثلاث تتمثل بالمعادلة (7) يمكن الاستفادة من هذه العلاقة وتطبيقها في الواقع، حيث إن معرفة أي اثنتين من هذه الدوال تمكننا من الحصول على الدالة الثالثة[10].

4. الية الحصول على المتغير المتقطع

ان النهج العام للحصول على التوزيعات المتقطعة المبنية على الأجزاء المناظرة المستمرة يكمن باستعمال أنموذج وقت الفشل المستمر لتوليد أنموذج متقطع عن طريق تحديد الفترات الزمنية المتقطعة مثل (ساعة، يوم، شهر، ...). ثم ايجاد دالة البقاء $S(y)$ المتقطعة باستعمال دالة البقاء المستمرة وتجميع القيم على محور الوقت ، لأي توزيع مستمر على الفترة $R = (0، 0)$ مع دالة كثافة احتمالية (pdf) يمكن بناء نظيراً متقطعاً معتمداً على مجموعة الاعداد الصحيحة $N = (0,1,2، \}$. فاذا كان (x) يمثل وقت الفشل المستمر وله دالة بقاء $S(x)$ ويتم تجميع الاوقات في فترات بحيث يكون متغير وقت الفشل المتقطع $Y = [X]$ ، وهو اكبر جزء صحيح في فان دالة الكتلة الاحتمالية (p.m.f) للمتغير المتقطع تكون على الشكل التالي [1] [11]:

$$(y = x) = p\,(y < X < y + 1)$$
$$= p(X \geq y) - p(X < y + 1)$$
$$= S_{x(}y) - S_x(y + 1)\ \ ,\ y = 1,2,3,\ \dots \qquad \dots\ .$$
$$(8)$$

ومن خلال الصيغة (8) يمكن توليد أي توزيع متقطع باستخدام دالة البقاء ودالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المستمر[1] [11].

5. توزيع كوماراسوامي المعكوس المتقطع inverted Kumaraswamy distributions discrete

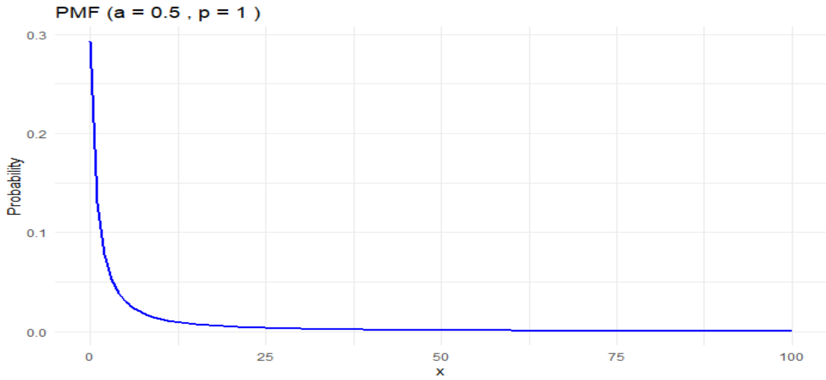
توزيع كومار اسوامي المعكوس المتقطع هو توزيع احتمالات يستخدم لتحليل البيانات ذات الطبيعة المتقطعة حيث يكون البيان متاحًا في فترات زمنية محددة. يُستخدم هذا التوزيع في مجالات مثل الطب والعلوم الاجتماعية لتقدير فترات البقاء بعد حدوث حدث معين، مما يساعد في فهم الظواهر واتخاذ القرارات السليمة بناءً على البيانات المتوفرة. ولا يجاد دالة pdf لتوزيع نتبع الصيغة رقم (2-13) بشرط توفر دالة البقاء لتوزيع كوماراسوامي المعكوس وبما دالة البقاء متوفرة فيكون التوزيع كالاتي[9] [2] [13]:

$$S(t) = 1 - (1 - (t + 1)^{-\alpha})^{\beta} \qquad t > 0،\ \alpha, \beta > 0$$

نحصل على توزيع المتقطع بتطبيق المعادلة (2-13) [3] [10]

$$p(y = t) = S_t(y) - S_t(y + 1)$$
$$p(y = t) = 1 - (1 - (y + 1)^{-\alpha})^{\beta} - (1 - (1 - (y + 1 + 1)^{-\alpha})^{\beta})$$
$$p(y = t) = (1 - (y + 2)^{-\alpha})^{\beta} - (1 - (y + 1)^{-\alpha})^{\beta}\ , y = 1,2,3 \dots \qquad \dots (9)$$

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
Journal of the College of Basic Education Vol.31 (NO. 132) 2025, pp. 439-452

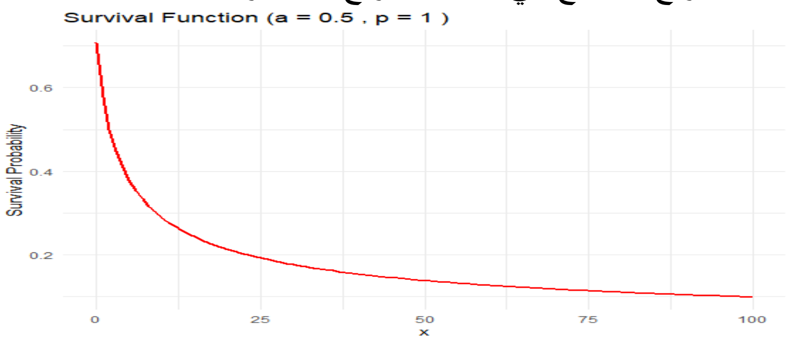


شكل رقم 1: يمثل دالة الكثافة الاحتمالية بمعلمات الشكل

اما دالة البقاء لتوزيع كومار اسوامي المعكوس المتقطع تكون بشكل التالي[9]:

$$S(y) = 1 - (1 - (y+2)^{-\alpha})^{\beta} \quad ,y = 1,2,3,\ldots \qquad \ldots.(10)$$

نلاحظ ان دالة البقاء للتوزيع المتقطع هي نفسها للتوزيع المستمر.



شكل رقم 2: يمثل دالة البقاء بمعلمات الشكل

ولايجاد دالة cdf نطبق الصيغة التالية [4]:

$$\mathrm{F(y) = 1 - S(y)}$$

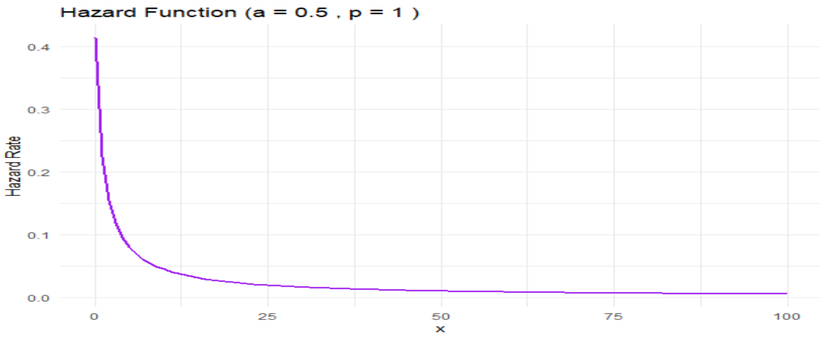
$$F(y) = 1 - (1 - (1 - (y+2)^{-\alpha})^{\beta})$$

$$F(y) = (1 - (y+2)^{-\alpha})^{\beta} \quad ,y = 1,2,3,\ldots \qquad \ldots.(11)$$

ولايجاد دالة الخطورة لتوزيع كومار اسوامي المعكوس المتقطع تكون بالشكل التالي[4]:

$$\mathrm{h(t)} = \frac{\mathrm{f}(y)}{\mathrm{s(y)}}$$

$$\mathrm{h(y)} = \frac{(1-(y+2)^{-\alpha})^{\beta} - (1-(y+1)^{-\alpha})^{\beta}}{1-(1-(y+2)^{-\alpha})^{\beta}} \;,y = 1,2,3\ldots \qquad \ldots(12)$$



شكل رقم 3: يمثل دالة الخطورة بمعلمات الشكل

6. طريقة الامكان الأعظم Maximum Likelihood Method

ان الخصائص الجيدة التي تمتاز بها هذه الطريقة جعلتها من الطرائق المهمة للتقدير والاكثر استعملا على نطاق واسع من التقديرات الاحصائية للتوزيعات الاحتمالية ، وتستند بالأساس الى ايجاد قيمة تقدير المعلمة التي تجعل دالة الامكان الاعظم عند نهايتها العظمى . [6] .

لتكن $y_1, y_2, \dots, y_n$ عينة عشوائية بحجم n تتبع توزيع كومار اسوامي المعكوس المتقطع عندما $Y - KUM(\alpha،\beta)$ ، اذ ان كل من(α و β)هي معلمات التوزيع وبدالة الكثافة الاحتمالية $p(y)$ فان دالة الإمكان الأعظم تعتمد على المعادلة(9) على نحو التالي [6] [12]:

$$p(Y = y) = (1 - (y + 2)^{-\alpha})^{\beta} - (1 - (y + 1)^{-\alpha})^{\beta}$$

وبادخال اللوغارتم على طرفي المعادلة:

$$\mathrm{LnL}(y, \alpha, \beta) = \mathrm{Ln} \prod_{i=1}^{n} (1 - (y + 2)^{-\alpha})^{\beta} - (1 - (y + 1)^{-\alpha})^{\beta}$$

وللحصول على دالة الإمكان في نهاية العضمى نشتق المعادلة بالنسبة الى المعلمات (α و β) [20] [35]

$$\frac{\partial \mathrm{LnL}(y, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{[\beta(1 - (y + 1)^{-\alpha})^{\beta-1}(y + 1)^{-\alpha}\mathrm{Ln}(y + 1)] - [\beta(1 - (y + 2)^{-\alpha})^{\beta-1}(y + 2)^{-\alpha}\mathrm{Ln}(y + 2)]}{(1 - (y + 2)^{-\alpha})^{\beta} - (1 - (y + 1)^{-\alpha})^{\beta}} \quad \dots(13)$$

$$\frac{\partial \mathrm{LnL}(y, \alpha, \beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - (y + 2)^{-\alpha})^{\beta}\mathrm{Ln}(1 - (y + 2)^{-\alpha}) - (1 - (y + 1)^{-\alpha})^{\beta}\mathrm{Ln}(1 - (y + 1)^{-\alpha})}{(1 - (y + 2)^{-\alpha})^{\beta} - (1 - (y + 1)^{-\alpha})^{\beta}} \quad \dots(14)$$

نجعل المعادلتين(13) ,(14) مساوي للصفروللصعوبة حلها بطرق العادية يتم استخدام احدى الطرائق العددية للحل للحصول على تقديرات المعلمة كطريقة نيوتن رافسن.

7. طريقة بيز Bayes Method

على فرض $y_1, y_2, \dots, y_n$ عينة عشوائية بحجم n تتبع توزيع كومار اسوامي المعكوس المتقطع عندما$Y - KUM(\alpha، \beta)$ وبدالة الكثافة الاحتمالية $p(y)$، وان المعلمتان متغيرين عشوائين (α و β) لهما توزيع مسبق حيث تتبع المعلمة (β) توزيع كاما عندما ($\omega،\rho$) G- β وبدالة الكثافة الاحتمالية

$p(\beta)$، وان المعلمة (α) تتبع توزيع كاما بالاعتماد على المعلمة (β) عندما(α -G ($\delta+1$،$\frac{\beta}{\gamma}$ وبدالة كثافة احتمالية [1][20] $p(\alpha\backslash\beta)$.

$$g_1(\alpha\backslash\beta)=\frac{\beta^{\delta+1}}{\Gamma(\delta+1)\gamma^{\delta+1}}\alpha^{\delta}e^{-\frac{\alpha\beta}{\gamma}} \qquad \delta>-1 \quad \gamma>0 \qquad \dots(15)$$

$$g_2(\beta)=\frac{\beta^{\omega-1}}{\Gamma(\omega)\rho^{\omega}}e^{-\frac{\beta}{\rho}} \qquad \omega>0 \quad \rho>0 \qquad \dots(16)$$

ان دالة التوزيع المسبق تكون:

$$\pi(\alpha,\beta)=g_1(\alpha\backslash\beta)\,g_2(\beta)$$

$$\pi(\alpha,\beta)\propto\beta^{\delta+\omega}\,\alpha^{\delta}e^{-\beta\left(\frac{1}{\rho}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)} \qquad \alpha,\beta\geq 0 \qquad \dots(17)$$

وان دالة الامكان لتوزيع كومار اسوامي المعكوس المتقطع كانت:

$$L(\alpha,\beta\setminus y)=\prod_{i=1}^{n}(d_1-d_2)$$

$$d_1=(1-(y+2)^{-\alpha})^{\beta} \qquad d_2=(1-(y+1)^{-\alpha})^{\beta}$$

دالة التوزيع الاحتمالية الشرطية اللاحقة المشتركة بين (α,β) تكون وفق الصيغة الاتية:

$$\pi(\alpha,\beta\setminus y)=\frac{L(\alpha,\beta\setminus y)\pi(\alpha,\beta)}{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}L(\alpha,\beta\setminus y)\pi(\alpha,\beta)d\alpha d\beta}$$

$$\pi(\alpha,\beta\setminus y)=\frac{\beta^{\delta+\omega}\,\alpha^{\delta}e^{-\beta\left(\frac{1}{\rho}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)}\prod_{i=1}^{n}(d_1-d_2)}{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\beta^{\delta+\omega}\,\alpha^{\delta}e^{-\beta\left(\frac{1}{\rho}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)}\prod_{i=1}^{n}(d_1-d_2)d\alpha d\beta} \qquad \dots(18)$$

$$k=\frac{1}{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\beta^{\delta+\omega}\,\alpha^{\delta}e^{-\beta\left(\frac{1}{\rho}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)}\prod_{i=1}^{n}(d_1-d_2)d\alpha d\beta} \qquad \dots(19)$$

$$\pi(\alpha,\beta\setminus y)=k\beta^{\delta+\omega}\,\alpha^{\delta}e^{-\beta\left(\frac{1}{\rho}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)}\prod_{i=1}^{n}(d_1-d_2)$$

دالة التوزيع اللاحقة الحدي الى α عندما تكون β, y معطاة:

$$\pi_1(\alpha \backslash \beta ، y) = k \int_0^\infty \beta^{\delta+\omega} \alpha^\delta e^{-\beta\left(\frac{1}{\rho}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)} \prod_{i=1}^{n} (d_1 - d_2) d\beta \qquad ...(20)$$

دالة التوزيع اللاحقة الحدي الى β عندما تكون α , y معطاة:

$$\pi_2(\beta \backslash \alpha ، y) = k \int_0^\infty \beta^{\delta+\omega} \alpha^\delta e^{-\beta\left(\frac{1}{\rho}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)} \prod_{i=1}^{n} (d_1 - d_2) d\alpha \qquad ...(21)$$

باستخدم دالة الخسارة لخطا التربيعية، فان التوقع للتوزيع الحدي اللاحقة ال α عندما تكون β , y معطاة تكون بشكل الاتي:

$$E(\alpha \backslash \beta ، y) = \int_0^\infty \alpha \pi_1(\beta \backslash \alpha ، y)\, d\alpha$$

$$E(\alpha \backslash \beta ، y) = k \int_0^\infty \alpha^{\delta+1} \left\{ \int_0^\infty \beta^{\delta+\omega} e^{-\beta\left(\frac{1}{\rho}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)} \prod_{i=1}^{n} (d_1 - d_2) d\beta \right\} d\alpha \qquad ...(22)$$

اما بالنسبة الى β عندما تكون α , y معطاة تكون بشكل الاتي:

$$E(\beta \backslash \alpha ، y) = \int_0^\infty \beta \pi_2(\beta \backslash \alpha ، y)\, d\beta$$

$$E(\beta \backslash \alpha ، y) = k \int_0^\infty \beta^{\delta+\omega+1} \left\{ \int_0^\infty \alpha^{\delta} e^{-\beta\left(\frac{1}{\rho}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)} \prod_{i=1}^{n} (d_1 - d_2) d\alpha \right\} d\beta \qquad ...(23)$$

8. المحاكاة

هي طريقة علمية تعتمد على الأساليب الرياضية لوصف سلوك الأنظمة من خلال توليد مشاهدات عشوائية وتكرار التجارب. تُستخدم كأداة عددية عبر الحاسوب لمعالجة التجارب خاصة في النظم المعقدة. تمثل نهجًا تجريبيًا لبناء النماذج وتقييمها، وتشمل النماذج الاحتمالية. تهدف إلى توقع سلوك الأنظمة الواقعية، ومن أشهر أساليبها محاكاة مونت كارلو لتوليد توزيعات احتمالية تحاكي المجتمع الحقيقي[5].

المرحلة الاولى: وهي المرحلة الاساس التي تعتمد علية باقي المراحل. حيث يتم اختيار احجام العينة، وكذلك اختيار قيم افتراضية لمعلمات التوزيع كوماراسوامي المعكوس المتقطع ذو المعلمتين (α, β) (30 ، 60، 120).

- $\alpha = 1,2$
- $\beta = 3,7$

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
Journal of the College of Basic Education Vol.31 (NO. 132) 2025, pp. 439-452

المرحلة الثانية: توليد الاعداد العشوائية
حيث تم توليد البيانات بالاعتماد على توزيع كوماراسوامي المعكوس المتقطع.
المرحلة الثالثة: مرحلة التقدير
في هذا المرحلة سوف يتم تقدير معلمات التوزيع باستخدم طريقين، الإمكان الأعظم و بيز:
المرحلة الرابعة: تكرار التجربة
حيث يتم تكرار التجربة (1000) باستحدم لغة البرمجة الإحصائية (R 4.2.1)
المرحلة الخامسة: المقارنة بين الطرائق
في هذا المرحلة سوف تتم المقارنة بين المقدرات الناتجة من كافة طرائق التقدير لتوزيع كوماراسوامي المعكوس المتقطع باستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطا (MSE) وبحسب الصيغة:

$$\text{MSE} = \frac{1}{R}\sum_{I=1}^{R}(\hat{\theta}-\theta)^2 \qquad \text{....}(24)$$

MSE : متوسط مربعات الخطا
R : عدد تكرارت التجربة والمساوي(1000)
$\hat{\theta}$: القيم المقدرة لمعلمات حسب طريقة التقدير المستخدمة
θ : القيمة الافتراضية للمعلمات التوزيع

9. تحليل نتائج المحاكاة Analysis of Simulation Result

وضع في هذا القسم نتائج عمليات المحاكات من متوسط قيم التقديرات وقيمة معيار متوسط مربعات الاخطاء وتقدير كل من دالة البقاء والخطورة لتوزيع كوماراسوامي المعكوس المتقطع.

جدول (1) تقديرات معلمتين توزيع كوماراسوامي المعكوس المتقطع

N	Prmt.	$\alpha=1$	$\beta=3$	$\alpha=1$	$\beta=7$	$\alpha=2$	$\beta=3$	$\alpha=2$	$\beta=7$
Mel	Bayes	Mel	Bayes	Mel	Bayes	Mel	Bayes	Mel	Bayes
30	$\hat{\alpha}$	1.0771	1.1884	0.8932	0.875	1.8783	1.958	2.03771	1.693
	MSE	**0.0103**	0.0368	0.028	**0.0204**	0.122	**0.0151**	0.64815	**0.1226**
	$\hat{\beta}$	3.0108	3.5715	5.9253	45.466	2.8939	2.9238	14.4971	74.951
	MSE	**0.5288**	0.6015	4.2567	**32.617**	2.3153	**0.1827**	434.081	**6.143**
60	$\hat{\alpha}$	1.0995	1.1386	1.1289	1.0313	1.5899	1.7653	2.4337	1.936
	MSE	**0.01**	0.02	0.0166	**0.001**	0.1685	**0.0551**	0.1881	**0.0041**
	β	3.689	63.978	8.594	6.9871	2.4783	83.144	12.4528	6.8061
	MSE	**0.4747**	0.9576	2.5405	**20.000**	0.2722	**710.02**	29.7329	**80.03**
120	$\hat{\alpha}$	1.241	1.2238	1.0267	0.9811	1.8227	2.0076	1.894	1.7769
	MSE	0.0581	**0.0501**	**0.0003**	0.0004	0.0314	**5.8E-05**	**0.0111**	0.0498
	β	3.985	3.861	7.5592	6.2832	2.3715	72.970	6.2706	5.4299
	MSE	0.9701	**0.7413**	**0.3127**	80.513	0.3951	**90.000**	**0.5321**	32.465

- عند حجم العينة (30 و 60) الافضلية لطريقة بيز في جميع النماذج باستثناء نموذج ($\beta=3$ $\alpha=1$) حيث جاءت في المرتبة الثانية، اما عند حجم العينة (120) احتلت المرتبة الثانية باستثناء نموذج ($\beta=3$ $\alpha=1$) حيث جاءت في المرتبة الاولى
- عند حجم العينة (30 و 60) جاءت طريقة الامكان الاعظم في المرتبة الثانية في جميع النماذج باستثناء نموذج ($\beta=3$ $\alpha=1$) حيث جاءت في المرتبة الاولى، اما عند حجم العينة (120) احتلت المرتبة الاولى باستثناء نموذج ($\beta=3$ $\alpha=1$) حيث جاءت في المرتبة الثانية

جدول (2) تقديرات دالة البقاء عندما $\beta=3$ $\alpha=1$							
t	**Real**	**n=30**		**n=60**		**n=120**	
		Mel	**Bayes**	**Mel**	**Bayes**	**Mel**	**Bayes**
1	0.7037	0.65609	0.67208	0.73003	0.73857	0.69189	0.6884
2	0.57813	0.52564	30.5311	0.59589	0.60115	0.54431	0.54243
3	0.488	0.43477	30.43	0.49798	0.50027	0.44074	0.44015
4	0.4213	0.36907	0.36242	0.42535	0.42541	0.36646	0.36675
5	0.37026	0.31974	190.3	0.36995	0.36841	0.31141	0.31229
جدول (3) تقديرات دالة المخاطرة عندما $\beta=3$ $\alpha=1$							
1	0.125	0.13229	0.0713	0.06647	0.04926	0.04059	0.04684
2	0.03704	0.04629	10.016	0.01342	0.00835	0.00609	0.00763
3	0.01563	0.02298	0.00577	0.00432	0.00238	0.0016	0.00212
4	0.008	0.01359	70.002	0.0018	0.0009	0.00057	0.00078
5	0.00463	0.00893	20.0014	0.00088	0.00041	0.00024	0.00035
جدول (4) تقديرات دالة البقاء عندما $\beta=7$ $\alpha=1$							
1	0.9415	0.92928	0.85291	0.94687	0.93386	0.94159	0.92675
2	0.8665	0.85705	0.78237	0.8668	0.85219	0.86285	0.84486
3	0.79029	0.78674	0.71984	0.78223	0.77095	0.78213	0.76561
4	0.72092	0.72371	0.66555	0.70462	0.69823	0.70878	0.69547
5	0.66008	0.66864	0.10378	0.63678	0.63527	0.64473	0.63502
جدول (5) تقديرات دالة المخاطرة عندما $\beta=7$ $\alpha=1$							
1	0.00781	0.04217	0.00577	0.00124	0.00686	0.00402	0.01381
2	0.00046	0.00873	0.0016	0.00003	0.00037	0.00016	0.00113
3	0.00006	0.00293	0.0006	1.63E-06	0.00005	0.00002	0.00019

4	0.00001	0.00127	0.00027	1.94E-07	0.00001	2.82E-06	0.00005
5	0	0.00064	0.09774	3.49E-08	2.60E-06	6.68E-07	0.00002

جدول (6) تقديرات دالة البقاء عندما β=3 α=2

t	Real	n=30		n=60		n=120	
		Mel	Bayes	Mel	Bayes	Mel	Bayes
1	0.29767	0.29588	0.18274	0.37798	0.38629	0.29102	0.29304
2	0.17603	0.17967	0.12132	0.25156	0.24772	0.17923	0.17274
3	0.11526	0.12079	0.08629	0.18096	0.17231	0.12161	0.11286
4	0.08104	0.08711	0.06452	0.13744	0.12709	0.08815	0.07922
5	0.05998	0.06605	0.55489	0.10859	0.09788	0.06699	0.05856

جدول (7) تقديرات دالة المخاطرة عندما β=3 α=2

1	0.04788	0.21635	0.0121	0.13746	0.04939	0.14197	0.0498
2	0.00641	0.09071	0.00371	0.03553	0.00723	0.03439	0.00678
3	0.00156	0.05061	0.0015	0.01372	0.00187	0.01271	0.00167
4	0.00053	0.03259	0.00072	0.00657	0.00066	0.00589	0.00057
5	0.00022	0.02289	0.02328	0.0036	0.00028	0.00314	0.00023

جدول (8) تقديرات دالة البقاء عندما β=7 α=2

1	0.56154	0.56122	0.38469	0.58945	0.57861	0.56643	0.56459
2	0.3635	0.36128	0.28085	0.35214	0.38226	0.37557	0.38325
3	0.24855	0.24951	0.21439	0.22146	0.26569	0.26254	0.27408
4	0.17897	0.18435	0.16955	0.1479	0.19388	0.1927	0.20528
5	0.1344	0.14323	0	0.10395	0.14723	0.14714	0.15956

جدول (9) تقديرات دالة المخاطرة عندما β=7 α=2

1	0.0001	0.05812	0.00431	7.744E-07	0.00019	0.00046	0.00216
2	5.649E-07	0.01769	0.0014	2.410E-10	1.323E-06	5.533E-06	0.00006
3	1.432E-08	0.0078	0.00059	8.482E-13	4.170E-08	2.494E-07	0.00001
4	8.441E-10	0.00418	0.0003	1.132E-14	2.901E-09	2.285E-08	7.274E-07
5	8.397E-11	0.00252	0	0	3.304E-10	3.255E-09	1.506E-07

- من خلال قيم الجداول من (2) الى (9) الخاصة بنتائج دوال البقاء والخطورة، يلاحظ أن تقديرات الدالتين تقترب من قيمها الحقيقية عند استعمال القيم الافتراضية للمعلمات في جميع النماذج وأحجام العينات.
- كما يلاحظ أن قيم دوال البقاء تتناقص مع تزايد الوقت، ويتزامن مع ذلك تناقص في قيم دوال الخطورة، مما يعني أن العلاقة بين القيم التقديرية لدالتي البقاء والخطورة هي علاقة طردية

10. الاستنتاجات

تُظهر طريقة بيز تفوقًا عند أحجام العينات 30 و60، باستثناء نموذج (α=1, β=3) حيث جاءت في المرتبة الثانية، بينما تحتل المرتبة الثانية عند حجم 120 باستثناء نفس الأنموذج حيث تكون الأفضل. أما طريقة الإمكان الأعظم، فتأتي في المرتبة الثانية عند 30 و60، لكنها تحتل المرتبة الأولى عند 120، باستثناء نموذج (α=1, β=3) حيث تكون في المرتبة الثانية. تقديرات دالتي البقاء والخطورة تقترب من القيم الحقيقية عند استخدام القيم الافتراضية للمعلمات، وتتناقص دالة البقاء مع الزمن بالتزامن مع تناقص دالة الخطورة، مما يعكس علاقة طردية بينهما.

11. التوصيات

- استخراج توزيعات احصائية متقطعة من التوزيعات المستمرة لتقدير دالتين البقاء والخطورة.
- استخدم طريقة بيز في تقدير دالتين البقاء والخطورة في حجوم الصغيرة والمتوسط وطريقة الامكان الاعظم في حجوم الكبيرة.
- استخدام طرائق تقدير اخرى لتقدير دالتين البقاء والخطورة.

12. المصادر

1. A. A. EL-Helbawy , M. A. Hegazy , G. R. AL-Dayian and R. E., Abd EL-Kader (2022), “A Discrete Analog of the Inverted Kumaraswamy Distribution: Properties and Estimation with Application to COVID-19 Data” Pakistan Journal of Statistics and Operation Research..11
2. Abd AL-Fattah, A. M., EL-Helbawy, A. A. and AL-Dayian, G.R. (2017), “Inverted Kumaraswamy Properties and Estimation” Statistics Pakistan Journal of Statistics.12
3. Ahid Nekoukhou, Hamid Bidram (2015), “The Exponentiated Discrete Weibull Distribution” Department of Statistics, University of Isfahan, Khansar Unit, Isfahan, Iran.13
4. Alaa Fares Majid (2020), "Comparison of Some Estimation Methods for Reliability and Hazard Functions of the Logarithmic Rayleigh Distribution Using Simulation with an Applied Study", Master's Thesis in Statistics, College of Administration and Economics - University of Baghdad.2
5. Atheer Abdul-Zahra Kareem (2018), "Analysis of the Survival Function When the Hazard Ratio is Proportional to Time", Master's Thesis in Statistics, College of Administration and Economics - University of Karbala.3

6. Christophe Chesneau, Vijay Kumar, Mukti Khetan and Mohd Arshad (2022), "On a Modified Weighted Exponential Distribution" Journal of Mathematical and Computational Applications.19
7. Dr. Layla Matar Nasser (2017), "Comparison of Estimation Methods for the Reliability Function of the Composite Rayleigh Distribution", Department of Mechanical Engineering, College of Engineering - Al-Mustansiriyah University.4
8. Eldin M.E., Khalil N., Amein M. (2014)" Estimation of Parameters of The Kumaraswamy Distribution Based on General Progressive Typeii Censoring" , American Journal of Theoretical and Applied Statistics.20
9. Hussein Eledum,and Alaa R El-Alosey (2023), "Discrete Kumaraswamy Erlang-Truncated Exponential Distribution with Applications to Count Data" Journal of Statistics Applications & Probability.24
10. Krishna, H. and Pundi, P. S. (2009), "Discrete Burr and Discrete Pareto Distributions" Journal of Statistical Methodology.27
11. Neba Saleh Hadi (2023), "Utilization of Discrete Probability Distributions of the Exponential Family in Survival Applications", PhD Dissertation in Statistics, College of Administration and Economics - Al-Mustansiriyah University.9
12. P. Nasir, M. Jabbari Nooghabi (2009), "Estimation Of $p[y < x]$ For Generalized Exponention Distribution in Presence of Outlier" Journal of Mathematics of Science.31
13. Zafar Iqbal, Muhammad Maqsood Tahir, Naureen Riaz, Syed Azeem Ali, Munir Ahmad (2017) "Generalized Inverted Kumaraswamy Distribution: Properties and Application" Journal of Statistics36.

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
Journal of the College of Basic Education Vol.31 (NO. 132) 2025, pp. 439-452

Comparison of Some Estimation Methods for the Survival Function of the Discrete Inverted Kumaraswamy Distribution.

Mohammed ali hussin(1)
(Department of Statistics, College of Administration and Economics, Al-Mustansiriyah University)
mohamed.husein@uomustansiriyah.edu.iq

Amina Karim Issa (2)
(Department of Statistics College of Administration and Economics, Al-Mustansiriyah University)
ameena@uomstansiriyah.edu.iq

Abstract:
The research examines the **Discrete Inverted Kumaraswamy Distribution**, which corresponds to the continuous distribution, and estimates the parameters of the studied model using two methods: the **Maximum Likelihood Method (MLE)** and the **Bayes Method**. To determine the best estimation method, the **Monte Carlo simulation** approach was applied using the **statistical programming language R (version 4.2.1).** The study considered **four different cases of model parameters** and applied them to **three different sample sizes (30, 60, 120)** to evaluate the effectiveness of the estimation methods. This evaluation was conducted using the **Mean Squared Error (MSE)** criterion to compare these methods. The comparison results indicated that the **Bayes method** was the most effective for **small and medium sample sizes** in most models. However, for **large sample sizes**, the **Maximum Likelihood Method** was found to be superior in most of the models used.

Keyword:
Discrete Inverted Kumaraswamy Distribution, Survival Function, Hazard Function, Maximum Likelihood Method, Bayes Method.

Note: The research is excerpted from a master's thesis.