التقدير البيزي لمعلمات توزيع لابلاس الملتوي تحت دالتي خسارة الخطأ التربيعية والموزونة باستعمال أسلوب المحاكاة

الباحثة أسماء خميس راضي أ.م.د. ابتسام كريم عبدالله

جامعة بغداد / كلية الإدارة والاقتصاد / قسم الإحصاء

مستخلص البحث :

يتناول هذا البحث التقدير البيزي لايجاد معلمتي الالتواء والقياس لتوزيع لابلاس الملتوي تحت دالتي خسارة الخطأ التربيعية وخسارة الخطأ التربيعية الموزونة. وبافتراض اسبقية توزيع كاما والتوزيع الاسي لكل من معلمة الالتواء والقياس على التوالي حيث تم استعمال تقريب ليندلي بكفاءة في التقدير البيزي . حيث تمت مقارنة مقدرات بيز بالاعتماد على معيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي استناداً الى طريقة المحاكاة حيث أظهرت النتائج تفوق مقدر بيز تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة .

الكلمات المفتاحية : توزيع لابلاس الملتوي ، مقدر بيز تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية ، دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة ، تقريب ليندلي .

Abstract

This paper deals with, Bayesian estimation of the parameters The skewness and scale for Skewed Laplace distribution under the quadratic loss function and the weighted quadratic loss function, respectively, based on the functions of the prior of the gamma distribution and the exponential distribution for each of the skewness and scale parameters. Lindley approximation have been used effectively in Bayesian estimation. These estimates were compared in term of the integral mean square error, which was based on the simulation method . The results revealed that the bayes estimator outperformed the weighted quadratic loss function.

Keywords: Skewed Laplace distribution, Bays estimator under weighted quadratic loss function, Quadratic loss function, Lindley approximation

1- المقدمة :-

توزيع لابلاس الملتوي (الغير متماثل) هو احد التوزيعات الملتوية التي ظهرت لاول مرة في عام (1897) م و يعرف الالتواء هو درجة التماثل او البعد عن تماثل لتوزيع ما اذ كان المنحني التكراري لتوزيع ما له ذيل اكبر الى اليمين يقال ان التوزيع ملتوية لليمين يعرف (التواء موجب) او اذ كان التوزيع له ذيل اكبر الى اليسار يقال ان التوزيع ملتوي لليسار ويسمى (التواء سالب) والتوزيعات الملتوية نوعين أولهما عندما يكون التوزيع ملتويا التواء موجب او التواء الى جهة اليمين وذلك في الحالة التي تمتد فيها الفئات التي مراكزها تزيد على قيمة الوسط الحسابي الى مسافة أطول من امتداد الفئات التي يكون قيم مراكزها اقل من قيمة الوسط الحسابي ، أي ان منحني التوزيع يمتد الى جهة الواقعة بعد قيمة الوسط الحسابي الى مسافة أطول من امتداد جزئه الواقع قبل قيمة الوسط الحسابي وثانيا عندما يكون امتداد منحني في جهة يمين الوسط الحسابي اقل من امتداد في جهة اليسار يكون الالتواء سالبا او الالتواء جهة اليسار ، التي تقع قيم مراكزها قبل

الوسط الحسابي اكبر من عدد الفئات التي تقع قيمها بعد قيمة الوسط الحسابي ، المشكلة الأساسية لهذا البحث تظهر في حالة صعوبة استعمال التوزيع الطبيعي لا يمكن الحصول على قيم نهائية لهذه المقدرات الا عن طريق ملائمة توزيع معين لهذا الشكل من البيانات عن طريق استعمال الطرق البيزية .

وهذا التوزيع يعتبربديلا ملائما للتوزيع (Paretian) هو من التوزيعات الهندسية المستقرة وهذا ما يظهر في النماذج البيانات المالية [6,5] . في عام (2003) درس الباحثون [Genton , Boyer, &Wang] عائلة من التوزيعات الملتوية متعددة المتغيرات مثل توزيع لابلاس الغير متماثل , واظهروا ان أي دالة (pdf) متعددة المتغيرات تسمح بدخول حالة الالتواء . وقد بينت النتائج ان هذه التوزيعات تمتلك الشكل الرياضي الدقيق ويتم تنفيذ الجانب التطبيقي لهذا التوزيعات بسهولة[11] . يهدف البحث الى تقدير معلمات توزيع لابلاس الملتوي وباستعمال التقدير البيزي تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية ودالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة والمقارنة بين هذه الطرائق وصولا الى الطريقة الأفضل .

2- مشكلة البحث :-

يتم تقدير معلمات توزيع لابلاس الملتوي في حالة وجود بيانات يكون شكلها قريبا من التوزيع الطبيعي ملتوية في أحد ذيولها اما من اليمين او من اليسار لوجود مشاهدات شاذة هي أحد مسببات حالة الالتواء لكن المشكلة الأساسية لهذا البحث تظهر في حالة صعوبة استعمال التوزيع الطبيعي لا يمكن الحصول على قيم نهائية لهذه المقدرات الا عن طريق ملائمة توزيع معين لهذا الشكل من البيانات باستعمال بعض الطرائق البيزية .

3- أهمية البحث :-

تظهر أهمية هذا التوزيع في كون مجاميع البيانات المالية تمتاز بعدم التماثل مع وجود القمة الحادة حول نقطة الأصل وكثافة الذيل مقارنة مع توزيع لابلاس الاعتيادي المتماثل، اذ ان هذه الخصائص تبين مقدار الحاجة الماسة الى نماذج تكون بعيدة عن مجال النماذج الطبيعية ، وايضاً في كونه توزيع وحيد المنوال .

4- الجانب النظري :-

في هذا الجانب سيتم التعرف على توزيع لابلاس الملتوي وكذلك طرق التقدير وتم استعمال اسلوب المحاكاة من اجل التوصل الى الطريقة الأكفأ من بين هذه الطرائق باستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي في تقدير المعلمات وتم اختيار اربع تجارب محاكاة بتكرار قدره 1000مرة وبحجوم عينات مختلفة.

1-4 توزيع لابلاس الملتوي Skewed Laplace distribution

يعد توزيع لابلاس الغير متماثل (Skewed Laplace) من التوزيعات الحدية بالنسبة لمتغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة التوزيع وذات تباين محدد [7] . في مجال تصميم النماذج العشوائية وبالاخص جانب التطبيقات المالية يعتبر توزيع لابلاس الطبيعي (المتماثل) وتعميماته الملتوية بمثابة المنافسين بالنسبة للتوزيعات المتماثلة الاخرى[4] ، . ويمكن تعريف دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) له كما في الاتي [6] :

$$f(x,\sigma,k)=\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\,\frac{k}{1+k^2}\begin{cases} e^{\left(-\frac{\sqrt{2}k}{\sigma}x\right)} & , \quad x\geq 0 \\ e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma k}x\right)} & , \quad x<0 \end{cases} \qquad (1)$$

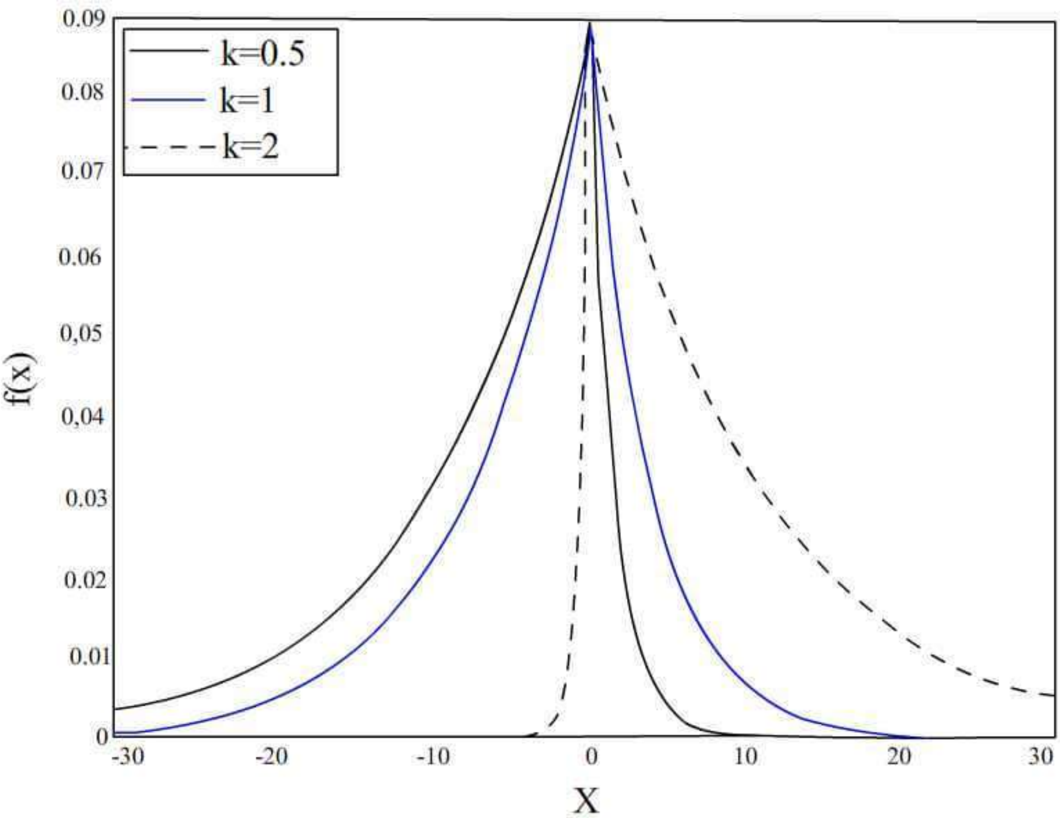
حيث ان :

k : معلمة الالتواء (Skewness Parameter)

σ : معلمة القياس (Scale parameter)

الشكل (1) يوضح (pdf) لتوزيع (SL) وذلك باختيار اكثر من قيمة ل (k) عندما تكون قيمة (k=1) فهذا يجعل من (pdf) لتوزيع (AL) يختزل للتوزيع لابلاس الاعتيادي (المتماثل) ، في حين اذ كانت قيمة (k>1) فهذا يجعل من(pdf) لتوزيع (AL) ملتوية لليمين (Right Skewed) كما في المنحني ذو اللون الأسود النقطي مقارنة مع المنحني ذو اللون الازرق الذي يمثل توزيع لابلاس الاعتيادي (المتماثل) وفي هذه الحالة يكون التواء موجب أي ان البيانات تتركز معظمها في جهة اليمين ويكون المتوسط اكبر من الوسيط أكبر من المنوال (المتوسط يقع يمين المنوال) , اما اذا كانت قيمة (k<1) فهذا يجعل دالة (pdf) لتوزيع (SL) ملتوية لليسار(Left Skewed) كما موضح في المنحني ذو

الأسود مقارنة مع التوزيع لابلاس الاعتيادي (المتماثل) ويعد التواء سالب أي ان البيانات تتركز معظمها في جهة اليسار ويكون المنوال أكبر من ألوسيط أكبر من المتوسط (المتوسط يقع يسار المنوال) . ومن الجدير بالذكر ان توزيع لابلاس الغير متماثل يعاني من الالتواء في حالة كون ذيل المنحني أطول من الجانب الاخر لمنحني التوزيع [4] .

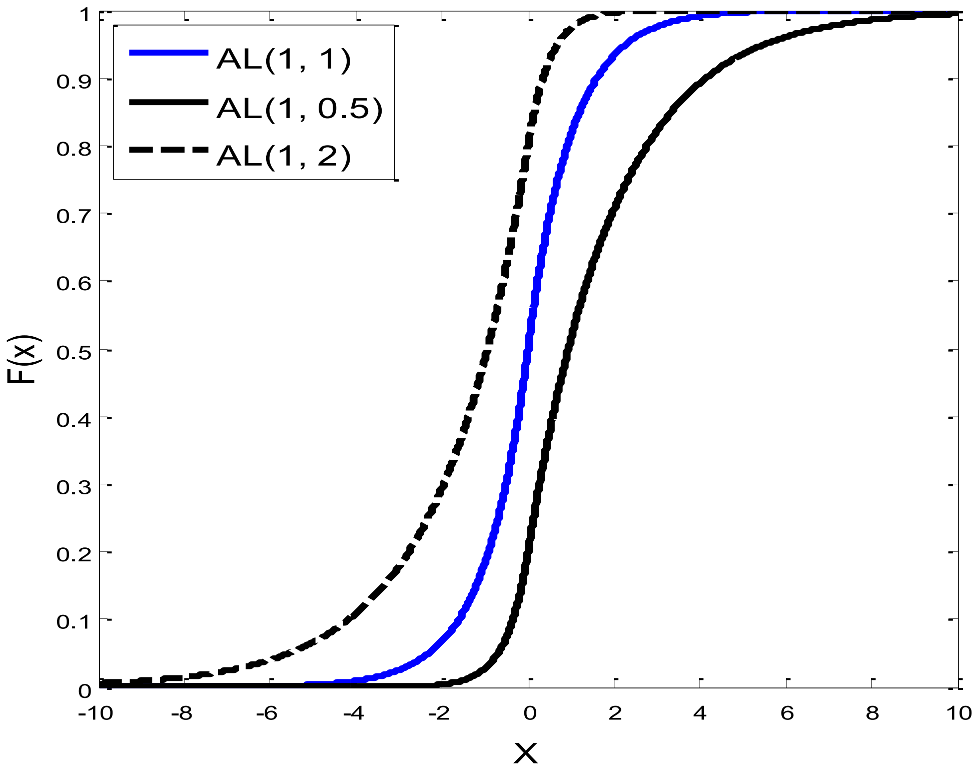


الشكل رقم (1) يوضح دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لابلاس الملتوي (SL)

النسبة لدالة التوزيع التراكمية (cdf) بالنسبة لتوزيع SL (σ, k) من خلال المعادلة الاتية [6] :-

$$F(x,\sigma,k)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{1+k^2}\,e^{\left(-\frac{\sqrt{2}k}{\sigma}x\right)}, & x>0\\[2mm] \dfrac{k^2}{1+k^2}\,e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma k}x\right)}, & x\le 0\end{cases} \qquad (2)$$

الشكل (2) يوضح دالة التوزيع التراكمية لمنحني الدالة بقيمة ثابته بالنسبة لمعلمة القياس $(\sigma=1)$ وقيمة متغيرة بالنسبة لمعلمة الالتواء (k). اذ ان المنحني باللون الازرق يبين دالة الـ cdf بالنسبة لتوزيع لابلاس المتماثل وذلك لان قيمة (k=1) . في حين ان المنحني ذو اللون الأسود النقطي يبين دالة الـ cdf بالنسبة لتوزيع (SL) ملتوية لليمين وذلك لان قيمة $k>1$. أما اذا كانت قيمة $(k<1)$ فهذا يجعل دالة cdf بالنسبة لتوزيع (SL) ملتوية لليسار وهذا ما بينه المنحني ذو اللون الأسود [4] .



شكل (2) يوضح دالة التراكمية لتوزيع لابلاس الملتوي $\mathrm{SL}(\sigma, k)$

4- 2 طريقة بيز لتقدير معلمات توزيع لابلاس الملتوي

ويعتبر اسلوب بيز من الاساليب المهمة للحصول على افضل مقدر للمعلمات الخاصة بتوزيع معين , اذ أهتم به العديد من الاحصائين الكبار وأستعملوه في مجالات عديدة منها مجال التحليل . ان هذا الاسلوب في التقدير يفترض ان المعلمة المراد تقديرها تكون بمثابة متغير عشوائي وفي حال تقديرها لابد من توفر معلومات أولية مسبقة عنها بتوزيع احتمالي يسمى التوزيع الاولي (Prior distribution) [2,1] :-

4-2-1 دالة الكثافة اللاحقة المشتركة باستعمال دالتي اسبقية توزيع كاما والتوزيع الاسي

للحصول على تقدير معلمتي الالتواء والقياس لتوزيع لابلاس الملتوي نفترض لمعلمة الالتواء (k) لها توزيع اولي $\pi_1(.)$ يتبع توزيع $\mathrm{k} \sim \Gamma(a, b)$

وايضاً نفترض لمعلمة القياس(σ) لها توزيع اولي $\pi_2(.)$ يتبع توزيع $\sigma \sim \exp{(c)}$ حيث يكونان مستقلان عن بعضهما :-

$$\pi_1(k) = \frac{(b)^{\,a}\,(k)^{\,a-1}\,e^{-kb}}{\Gamma(a)} \qquad a > 0 \quad ,b > 0 \ ,k > 0 \qquad (3)$$

$$\pi_2\,(\sigma) = C\,e^{-c\sigma} \qquad \mathrm{C}>0 \quad ,\sigma \geq 0 \qquad (4)$$

لايجاد مقدرات بيز بالنسبة لمعلمتي الالتواء (k) والقياس (σ) لتوزيع (SL) تم استعمال أسلوب قانون تقريب ليندلي (The Lindley Approximation) وكما يلي [11] :- .

$$\mathrm{E}(\mathrm{k}|\underline{\mathrm{x}}) \approx \hat{\mathrm{k}} + \mathrm{P}_1\mathrm{u}_1\sigma_{11} + \frac{1}{2}(\mathrm{L}_{30}\mathrm{u}_1\sigma_{11}^2) + \frac{1}{2}(\mathrm{L}_{12}\mathrm{u}_1\sigma_{11}\sigma_{22}) \qquad (5)$$

ان دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لكل من معلمتي الالتواء والقياس k, σ تكون بالشكل الاتي

$$\pi(\sigma,k)=\frac{(b)^{a}\,(k)^{a-1}\,e^{-bk}}{\Gamma(a)}\,.Ce^{-c\sigma}$$

$$Ln\,\pi(\sigma,k)=aLn(b)+(a-1)Lnk-bk+Ln\,(c)-c\sigma$$

$$P_1=\frac{\partial P}{\partial k}=\frac{a-1}{k}-b$$

$$P_2=\frac{\partial P}{\partial \sigma}=-C$$

$$\text{Ln L f}(x,\sigma,k)=\frac{n}{2}Ln2-nLn\sigma+nLnk-nLn(1+k^2)-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left(k\sum_{i=1}^{n}xi+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}xi\right)$$

(L_{ij}) حيث ان المتغير (i) يمثل المشتقة بالنسبة للمعلمة الالتواء (k) مع المتغير (j) يمثل المشتقة بالنسبة للمعلمة القياس (σ)

أي ان (L_{12}) يمثل المشتقة الأولى بالنسبة لمعلمة (k) مع المشتقة الثانية بالنسبة لمعلمة(σ)

$$L_{12}=-\frac{2\sqrt{2}\,nx}{\sigma^3}-\frac{2\sqrt{2}\,nx}{k^2\sigma^3}$$

اما (L_{21}) يمثل المشتقة الثانية بالنسبة للمعلمة الالتواء(k) مع المشتقة الأولى بالنسبة للمعلمة القياس (σ) فيكون كالاتي :-

$$L_{21}=-\frac{2\sqrt{2}nx}{k^3\,\sigma^2}$$

اما (L_{03}) يمثل المشتقة الثالثة بالنسبة لمعلمة القياس (σ) وكما يلي :-

$$L_{03}=-\frac{2n}{\sigma^3}+\frac{6\sqrt{2}knx}{\sigma^4}-\frac{\sigma\sqrt{2}knx}{k\sigma^4}$$

يمثل (L_{30}) المشتقة الثالثة بالنسبة لمعلمة الالتواء (k) وكما يأتي .

$$L_{30}=\frac{2n}{k^3}+\frac{12nk}{(k^2+1)^2}-\frac{16nk^3}{(k^2+1)^3}-\frac{6\sqrt{2}\,nx}{\sigma k^4}$$

يمثل (L_{20}) المشتقة الثانية بالنسبة لمعلمة الالتواء (k) وكما يأتي .

$$L_{20}=-\frac{n}{k^2}-\frac{2n}{k^2+1}+\frac{4nk^2}{(k^2+1)^2}+\frac{2\sqrt{2}nx}{\sigma k^3}$$

اما (L_{02}) يمثل المشتقة الثانية بالنسبة لمعلمة القياس (σ) وكما يلي :-

$$L_{02}=\frac{n}{\sigma^2}-\frac{2\sqrt{2}knx}{\sigma^3}+\frac{2\sqrt{2}nx}{\sigma^3 k}$$

اما (σ_{11}) يمثل مقلوب المشتقة الثانية بالنسبة لمعلمة الالتواء(k) وكما يلي :-

$$\sigma_{11}=-\frac{1}{L_{20}}$$

$$\frac{k^3(k^2+1)^2\sigma}{n(2\sqrt{2}\,k^4x+k^5\sigma+4\sqrt{2}\,k^2x-4\sigma k^3+2\sqrt{2}x-\sigma k)}$$

اما (σ_{22}) يمثل مقلوب المشتقة الثانية بالنسبة لمعلمة القياس (σ) وكما يلي :-

$$\sigma_{22}=-\frac{1}{L_{02}}$$

$$\Rightarrow\;=\frac{\sigma^3 k}{n(2\sqrt{2}\,k^2x-2\sqrt{2}x-\sigma k)}$$

2-2-4 دالة خسارة الخطأ التربيعية

تعتبر دالة خسارة الخطأ التربيعية (Square error loss function) من اكثر دوال الخسارة شيوعاً واستعمالاً وهي دالة متماثلة والصيغة الرياضية لها كالاتي [9] :-

$L(\hat{k},k) = (\hat{k},k)^{2}$ …… $L(\hat{\sigma},\sigma) = (\hat{\sigma},\sigma)^{2}$

وبالتالي فأن مقدر بيز لمعلمتي الالتواء والقياس على التوالي تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية $(\hat{k}_s)$, $(\hat{\sigma}_s)$ كالاتي :-

$$\hat{k}_s = E(k|\underline{x}) \qquad (6)$$

$$\hat{\sigma}_s = E(\sigma|\underline{x}) \qquad (7)$$

a) مقدر بيز لمعلمة الالتواء (k) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية

لحصول على مقدر بيز لمعلمة الالتواء (k) تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية نفترض ان:-

$$u(k,\sigma) = k$$

$$u_1 = \frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial k} = 1$$

بتعويض المعادلات في قانون تقريب تقريب ليندلي في معادلة رقم (5) وكما يلي :-

$$E(k|\underline{x}) \approx \hat{k} + \left(\frac{a-1}{\hat{k}} - b\right)\left(\frac{\hat{k}^3(\hat{k}^2+1)^2\hat{\sigma}}{n(2\sqrt{2}\hat{k}^4x+\hat{k}^5\hat{\sigma}+4\sqrt{2}\hat{k}^2x-4\hat{\sigma}\hat{k}^3+2\sqrt{2}x-\hat{\sigma}\hat{k})}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2n}{\hat{k}^3} - \frac{12n\hat{k}}{(\hat{k}^2+1)^2} + \frac{16n\hat{k}^3}{(\hat{k}^2+1)^3} - \frac{6\sqrt{2}\,nx}{\hat{\sigma}\hat{k}^3}\right)\left(\frac{\hat{k}^3(\hat{k}^2+1)^2\hat{\sigma}}{n(2\sqrt{2}\,\hat{k}^4x+\hat{k}^5\hat{\sigma}\,4\sqrt{2}\hat{k}^2x-4\hat{\sigma}\hat{k}^3+2\sqrt{2}x-\hat{\sigma}\hat{k})}\right)^2 + \frac{1}{2}\Big(-\frac{2\sqrt{2}\,nx}{\hat{\sigma}^3} - \frac{2\sqrt{2}\,nx}{\hat{k}^2\,\hat{\sigma}^3}\Big)\Big(\frac{\hat{k}^3(\hat{k}^2+1)^2\hat{\sigma}}{n(2\sqrt{2}\,\hat{k}^4x+\hat{k}^5\hat{\sigma}\,4\sqrt{2}\hat{k}^2x-4\hat{\sigma}\hat{k}^3+2\sqrt{2}x-\hat{\sigma}\hat{k})}\Big)\Big(\frac{\hat{\sigma}^3\,\hat{k}}{n(2\sqrt{2}\hat{k}^2x-2\sqrt{2}\,x-\hat{\sigma}\hat{k})}\Big) \qquad (8)$$

بتعويض معادلة (8) في معادلة رقم (6) وكما يلي :-

$$\hat{k}_s \approx E(k|\underline{x})$$

$(\hat{k})$ هي مقدر دالة الامكان الأعظم

b) مقدر بيز لمعلمة القياس (σ) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية

لحصول على مقدر بيز لمعلمة القياس تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية نفترض مايلي :-

$$u(k,\sigma) = \sigma$$

$$u_1 = \frac{\partial u(k,\sigma)}{\partial \sigma} = 1$$

وبالتالي نطبق (تقريب ليندلي) لمعلمة القياس

$$E(\sigma|\underline{x}) \approx \hat{\sigma} + p_2u_2\sigma_{22} + \frac{1}{2}\left(L_{03}u_2\sigma_{22}^2\right)$$

$$E(\sigma|\underline{x}) \approx \hat{\sigma} + (-c)\left(\frac{\sigma^3k}{n(2\sqrt{2}k^2x-2\sqrt{2}\,x-\sigma k)}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{2n}{\sigma^3} + \frac{6\sqrt{2}\,Knx}{\sigma^4} - \frac{6\sqrt{2}\,nx}{\sigma^4K}\right)\left(\frac{\sigma^3k}{n(2\sqrt{2}k^2x-2\sqrt{2}\,x-\sigma k)}\right)^2 \qquad (9)$$

بتعويض معادلة (9) في معادلة رقم (7) وكما يلي :-

$$E(\sigma|\underline{x}) \approx \hat{\sigma}_s$$

حيث ان $\hat{k},\hat{\sigma}$ هي مقدرات دالة الامكان الاعظم

3-2-3 دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة

تعتبر دالة الخسارة التربيعية الموزونة من الدوال الغير المتماثلة وعليه تكون صيغة معلمة الالتواء (k) كما يلي [9] :-

$$\hat{k} = \frac{a_0E\left(\frac{1}{k^{c-1}}\middle|\underline{x}\right) + a_1E\left(\frac{1}{k^{c-2}}\middle|\underline{x}\right) + \cdots + a_tE\left(\frac{1}{k^{c-(t+1)}}\middle|\underline{x}\right)}{a_0E\left(\frac{1}{k^{c}}\middle|\underline{x}\right) + a_1E\left(\frac{1}{k^{c-1}}\middle|\underline{x}\right) + \cdots + a_tE\left(\frac{1}{k^{c-t}}\middle|\underline{x}\right)} \qquad (10)$$

وايضاً الصيغة العامة للمعلمة القياس (σ) تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة وكالتالي

$$\hat{\sigma}=\frac{a_0E\left(\frac{1}{\sigma^{c-1}}\middle|\underline{x}\right)+a_1E\left(\frac{1}{\sigma^{c-2}}\middle|\underline{x}\right)+\cdots+a_tE\left(\frac{1}{\sigma^{c-(t+1)}}\middle|\underline{x}\right)}{a_0E\left(\frac{1}{\sigma^{c}}\middle|\underline{x}\right)+a_1E\left(\frac{1}{\sigma^{c-1}}\middle|\underline{x}\right)+\cdots+a_tE\left(\frac{1}{\sigma^{c-t}}\middle|\underline{x}\right)} \qquad (11)$$

a) مقدر بيز لمعلمة الالتواء (k) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة:-

للحصول على مقدر بيز نفرض كل من (c=0, t=1) وبتعويض في معادلة (10) كالاتي: -

$$\hat{k}_{10}=\frac{a_0E(k|\underline{x})+a_1E(k^2|\underline{x})}{a_0+a_1E(k|\underline{x})} \qquad (12)$$

حيث ان (t=1,2) هو عدد صحيح موجب أما (c=0,1,2) هو قيمة ثابتة نقوم بتعويضها في الصيغة العامة للدالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة لأيجاد مقدرات معلمتي الالتواء (k) والقياس (σ)

نقوم بأيجاد قيمة $E(k^2|\underline{x})$ باستعمال تقريب ليندلي

$$u(\sigma,k)=k^2$$

$$u_1=\frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial k}=2k \qquad u_{11}=\frac{\partial^2 u(\sigma,k)}{\partial k^2}=2$$

$$E(k^2|\underline{x})\approx\hat{k}^2+\frac{1}{2}\left(2\,\frac{\hat{k}^3(\hat{k}^2+1)^2\hat{\sigma}}{n(2\sqrt{2}\hat{k}^4x+\hat{k}^5\hat{\sigma}+4\sqrt{2}\hat{k}^2x-4\hat{\sigma}\hat{k}^3+2\sqrt{2}x-\hat{\sigma}\hat{k})}\right)+\left(\frac{a-1}{\hat{k}}-b\right)(2k)\left(\frac{\hat{k}^3(\hat{k}^2+1)^2\hat{\sigma}}{n(2\sqrt{2}\hat{k}^4x+\hat{k}^5\hat{\sigma}+4\sqrt{2}\hat{k}^2x-4\hat{\sigma}\hat{k}^3+2\sqrt{2}x-\hat{\sigma}\hat{k})}\right)+etc \qquad (13)$$

وبتعويض المعادلتين (8) , (13) بالمعادلة رقم (12) لأيجاد مقدر بيز لمعلمة الالتواء (k) تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة كالاتي :-

$$\hat{k}_{10}=\frac{a_0(\hat{k}_s)+a_1(\hat{k}_s^2)}{a_0+a_1(\hat{k}_s)}$$

لأيجاد مقدر أخر عندما (C=1, t=1) بالتعويض بالمعادلة رقم (10) نحصل على الاتي :-

$$\hat{k}_{11}=\frac{a_0+a_1E(k|\underline{x})}{a_0E(\frac{1}{k}|\underline{x})+a_1} \qquad (14)$$

نقوم بأيجاد قيمة $E(\frac{1}{k}|\underline{x})$ باستعمال تقريب ليندلي

$$u(\sigma,k)=\frac{1}{k}$$

$$u_1=\frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial k}=-k^{-2} \qquad u_{11}=\frac{\partial^2 u(\sigma,k)}{\partial k^2}=2k^{-3}$$

$$E(\frac{1}{k}|\underline{x})\approx\frac{1}{\hat{k}}+\frac{1}{2}(2k^{-3})\left(\frac{\hat{k}^3(\hat{k}^2+1)^2\hat{\sigma}}{n(2\sqrt{2}\hat{k}^4x+\hat{k}^5\hat{\sigma}+4\sqrt{2}\hat{k}^2x-4\hat{\sigma}\hat{k}^3+2\sqrt{2}x-\hat{\sigma}\hat{k})}\right)\left(\frac{a-1}{\hat{k}}-b\right)(-k^{-2})+etc\,.. \qquad (15)$$

إيجاد مقدر اخر عندما (C=2, t=1) وبتعويض بالمعادلة رقم (10) نحصل على الاتي :-

$$\hat{k}_{12}=\frac{a_0E\left(\frac{1}{k}\middle|\underline{x}\right)+a_1}{a_0E\left(\frac{1}{k^2}\middle|\underline{x}\right)+a_1E\left(\frac{1}{k}\middle|\underline{x}\right)} \qquad (16)$$

نقوم بأيجاد قيمة $E(\frac{1}{k^2}|\underline{x})$ باستعمال تقريب ليندلي

$$u(\sigma,k)=\frac{1}{k^2}$$

$$u_1=\frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial k}=-2k^{-3}\quad,\qquad u_{11}=\frac{\partial^2 u(\sigma,k)}{\partial k^2}=6k^{-4}$$

$$E(\frac{1}{k^2}|\underline{x})\approx\frac{1}{\hat{k}^2}+\frac{1}{2}(-2k^{-3})(\frac{\hat{k}^3(\hat{k}^2+1)^2\hat{\sigma}}{n(2\sqrt{2}\hat{k}^4x+\hat{k}^5\hat{\sigma}+4\sqrt{2}\hat{k}^2x-4\hat{\sigma}\hat{k}^3+2\sqrt{2}x-\hat{\sigma}\hat{k})})+etc. \quad (17)$$

عندما (t =2, C=0)بتعويض بالمعادلة رقم (10) تصبح كالتالي :-

$$\hat{k}_{20}=\frac{a_0E(k|\underline{x})+a_1E(k^2|\underline{x})+a_2E(k^3|\underline{x})}{a_0+a_1E(k|\underline{x})+a_2E(k^2|\underline{x})} \quad (18)$$

نقوم بأيجاد قيمة $E(k^3|\underline{x})$ باستعمال تقريب ليندلي

$$u(\sigma,k)=k^3$$

$$u_1=\frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial k}=-3k^2\quad,\qquad u_{11}=\frac{\partial^2 u(\sigma,k)}{\partial k^2}=6k$$

$$E(k^3|\underline{x})\approx\hat{k}^3+\frac{1}{2}(6k)(\frac{\hat{k}^3(\hat{k}^2+1)^2\hat{\sigma}}{n(2\sqrt{2}\hat{k}^4x+\hat{k}^5\hat{\sigma}+4\sqrt{2}\hat{k}^2x-4\hat{\sigma}\hat{k}^3+2\sqrt{2}x-\hat{\sigma}\hat{k})})+etc\ldots \quad (19)$$

عندما (t =2, C=1) بتعويض بالمعادلة رقم (10) نحصل على الاتي :-

$$\hat{k}_{21}=\frac{a_0+a_1E(k|\underline{x})+a_2E(k^2|\underline{x})}{a_0E(\frac{1}{k}|\underline{x})+a_1+a_2E(k|\underline{x})} \quad (20)$$

وأيضا إيجاد مقدر بيز عندما (t =2, C=2) بتعويض بالمعادلة (10) كالاتي :-

$$\hat{k}_{22}=\frac{a_0\,E(\frac{1}{k}|\underline{x})+a_1+a_2\,E(k|\underline{x})}{a_0\,E(\frac{1}{k^2}/\underline{x})+a_1E(\frac{1}{k}|\underline{x})+a_2} \quad (21)$$

b) مقدر بيز لمعلمة القياس (σ) باستعمال دالة الخسارة الخطأ التربيعية الموزونة :-

للحصول على مقدر بيز لمعلمة القياس (σ) نفرض (t=1,2 , C= 0,1,2)

لايجاد مقدر بيز نفرض (c=0, t=1) بتعويض بالمعادلة رقم (11) وكما يأتي :

$$\hat{\sigma}_{10}=\frac{a_0E(\sigma|\underline{x})+a_1E(\sigma^2|\underline{x})}{a_0+a_1E(\sigma|\underline{x})} \quad (22)$$

نقوم بأيجاد قيمة $E(\sigma^2|\underline{x})$ باستعمال تقريب ليندلي

$$u(\sigma,k)=\sigma^2$$

$$u_2=\frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial\sigma}=2\sigma\qquad u_{22}=\frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial\sigma^2}=2$$

$$E(\sigma^2|\underline{x})\approx\hat{\sigma}^2+\frac{1}{2}(2)\left(\frac{\hat{\sigma}^3\,\hat{k}}{n(2\sqrt{2}\,\hat{k}^2x-2\sqrt{2}\,x-\hat{\sigma}\,\hat{k})}\right)+etc \quad (23)$$

$\hat{k},\hat{\sigma}$ مقدرات دالة الإمكان الأعظم

عندما (C=1, t=1) بتعويض بالمعادلة رقم (11) كالاتي :-

$$\hat{\sigma}_{11}=\frac{a_0+a_1\,E(\sigma|\underline{x})}{a_0\,E(\frac{1}{\sigma}|\underline{x})+a_1} \quad (24)$$

نقوم بأيجاد قيمة $E(\frac{1}{\sigma}|\underline{x})$ باستعمال تقريب ليندلي

$$u(\sigma,k)=\frac{1}{\sigma}$$

$$u_2=\frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial\sigma}=-\sigma^{-2}\qquad u_{22}=\frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial\sigma^2}=2\sigma^{-3}$$

$$E(\frac{1}{\sigma}|\underline{x}) \approx \frac{1}{\hat\sigma} + \frac{1}{2}(-\sigma^{-2})\left(\frac{\hat\sigma^3\,\hat k}{n(2\sqrt{2}\,\hat k^{\,2}\,x - 2\sqrt{2}\,x - \hat\sigma\,\hat k)}\right) + etc \qquad (25)$$

$\hat k, \hat\sigma$ مقدرات دالة الإمكان الأعظم

عندما (C=2, t=1) بتعويض بالمعادلة (11) كالاتي :-

$$\hat\sigma_{12} = \frac{a_0 E(\frac{1}{\sigma}|\underline{x}) + a_1}{a_0 E(\frac{1}{\sigma^2}|\underline{x}) + a_1 E(\frac{1}{\sigma}|\underline{x})} \qquad (26)$$

لايجاد قيمة $E(\frac{1}{\sigma^2}|\underline{x})$ باستعمال تقريب ليندلي يكون بالشكل الاتي :-

$$u(\sigma,k) = \frac{1}{\sigma^2}$$

$$u_2 = \frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial\sigma} = -2\sigma^{-3} \qquad u_{22} = \frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial\sigma^2} = 6\sigma^{-4}$$

$$E(\frac{1}{\sigma^2}|\underline{x}) \approx \frac{1}{\hat\sigma^2} + \frac{1}{2}(6\sigma^{-4})\left(\frac{\hat\sigma^3\,\hat k}{n(2\sqrt{2}\,\hat k^{\,2}\,x - 2\sqrt{2}\,x - \hat\sigma\,\hat k)}\right) + (-c)(-2\sigma^{-3})$$
$$\left(\frac{\hat k^3(\hat k^2+1)^2\hat\sigma}{n(2\sqrt{2}\hat k^4 x + \hat k^5\,\hat\sigma + 4\sqrt{2}\hat k^2 x - 4\,\hat\sigma\hat k^3 + 2\sqrt{2}x - \hat\sigma\hat k)}\right) + etc \qquad (27)$$

عندما (C=0, t=2) بتعويض بالمعادلة (11) نحصل على التالي :-

$$\hat\sigma_{20} = \frac{a_0 E(\sigma|\underline{x}) + a_1 E(\sigma^2|\underline{x}) + a_2 E(\sigma^3|\underline{x})}{a_0 + a_1 E(\sigma|\underline{x}) + a_2 E(\sigma^2|\underline{x})} \qquad (28)$$

نقوم بأيجاد قيمة $E(\sigma^3|\underline{x})$ باستعمال تقريب ليندلي

$$u(\sigma,k) = \sigma^3$$

$$u_2 = \frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial\sigma} = 3\sigma^2 \qquad u_{22} = \frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial\sigma^2} = 6\sigma$$

$$E(\sigma^3|\underline{x}) \approx \hat\sigma^3 + \frac{1}{2}(2\sigma)\left(\frac{\hat\sigma^3\,\hat k}{n(2\sqrt{2}\,\hat k^{\,2}\,x - 2\sqrt{2}\,x - \hat\sigma\,\hat k)}\right) + etc \qquad (29)$$

عندما (C=1, t=2) وبتعويض بالمعادلة رقم (11) وكما يلي :-

$$\hat\sigma_{21} = \frac{a_0 + a_1 E(\sigma|\underline{x}) + a_2 E(\sigma^2|\underline{x})}{a_0 E(\frac{1}{\sigma}|\underline{x}) + a_1 + a_2 E(\sigma|\underline{x})} \qquad (30)$$

عندما (C=2, t=2) وبتعويض بالمعادلة (11) تصبح كالتالي :-

$$\hat\sigma_{22} = \frac{a_0 E\left(\frac{1}{\sigma}|\underline{x}\right) + a_1 + a_2 E(\sigma|\underline{x})}{a_0 E\left(\frac{1}{\sigma^2}|\underline{x}\right) + a_1 E\left(\frac{1}{\sigma}|\underline{x}\right) + a_2} \qquad (31)$$

4- الجانب التجريبي:-

تم استخدام أسلوب المحاكاة في هذا البحث لغرض إيجاد قيم مقدرات معلمات توزيع لابلاس الملتوي باستعمال دالتي خسارة التربيعية والموزونة . ويتميز هذا الأسلوب من مرونة ويوفر الوقت والجهد ويتم توليد البيانات نظريا دون الاخلال بدقة النتائج المطلوبة .

4-1مراحل تجربة المحاكاة :

ان مراحل تجربة المحاكاة نفذت وفقا لبرنامج كتب بلغة الماتلاب هي كالتالي :-

المرحلة الأولى :وهي المرحلة الأساسية والتي تم فيها :

أولا: اختيار قيم افتراضية أولية لمعلمتي الالتواء والقياس على التوالي وكما مبين بالجدول التالي :

جدول (4-1) يبين حجوم العينات والقيم الافتراضية لمعلمة الالتواء (k) ومعلمة القياس (σ) لتوزيع (SL) .

احجام العينات	معلمة k	معلمة σ
15	0.5 1 2	0.1 0.5 1
30	0.5 1 2	0.1 0.5 1
60	0.5 1 2	0.1 0.5 1
100	0.5 1 2	0.1 0.5 1

ثانيا : اختيار أربعة حجوم عينات مختلفة صغيرة ومتوسطة وكبيرة (15,30,60,100) وبتكرار التجارب 1000مرة لكل تجربة .

2-5 مناقشة تجربة المحاكاة :-

بعد تطبيق تجربة المحاكاة تم الحصول على النتائج الاتية :-

جدول (1) يبين نتائج IMSE لمعلمة الالتواء (k) لتوزيع SLعندما (k=2) باستعمال (SELF & WSELF) كما في الجدول الاتي :-

Estimation	N / σ	15	30	60	100
$\hat{k}_S = 2$	$\sigma = 0.1$	0.7285	0.7585	0.7682	0.7708
	$\sigma = 0.5$	0.7387	0.7594	0.7679	0.7712
	$\sigma = 1$	0.7267	0.7572	0.7697	0.7707
$\hat{k}_{W10=2}$	$\sigma = 0.1$	0.7307	0.7602	0.7685	0.7704
	$\sigma = 0.5$	0.7311	0.7604	0.7683	0.7710
	$\sigma = 1$	0.7278	0.7593	0.7686	0.7708
$\hat{k}_{W11=2}$	$\sigma = 0.1$	0. 8170	0.7836	0.7742	0.7725
	$\sigma = 0.5$	0.8173	0.7839	0.7740	0.7731
	$\sigma = 1$	0.8158	0.7228	0.7743	0.7729
$\hat{k}_{W20=2}$	$\sigma = 0.1$	0. 7629	0.7689	0.7706	0.7712
	$\sigma = 0.5$	0.7632	0.7692	0.7704	0.7718
	$\sigma = 1$	0.7619	0.7681	0.7707	0.7716

$\hat{k}_{W21=2}$	$\sigma = 0.1$	1.0697	1.0620	1.0598	1.0593
	$\sigma = 0.5$	1.0696	1.0619	1.0598	1.0591
	$\sigma = 1$	1.0699	1.0622	1.0597	1.0592
$\hat{k}_{W22=2}$	$\sigma = 0.1$	0.7410	0.7630	0.7692	0.7707
	$\sigma = 0.5$	0.7413	0.7632	0.7690	0.7713
	$\sigma = 1$	0.7400	0.7621	0.7692	0.7711
Best		$\hat{k}_{W10} \mid \sigma = 1$	$\hat{k}_{W11} \mid \sigma = 0.1$	$\hat{k}_{S} \mid \sigma = 0.5$	$\hat{k}_{W10} \mid \sigma = 0.1$

من ملاحظة الجدول رقم (1) يبين نتائج IMSE لمعلمة الالتواء (k) وكما يأتي :-

1- عندما يكون حجم العينة (n=15) تظهر افضلية نتائج قيم (IMSE) لمقدر بيز لمعلمة الالتواء (k) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة عند ($\sigma = 0.1$,0.5 ,1) .

2- عندما تكون حجم العينة (n=30) تظهر نتائج قيم (IMSE) لمقدر بيز لمعلمة الالتواء (k) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة هي الأفضل عندما تكون قيمة ($\sigma = 1$) .

3- عندما تكون حجم العينة (n=60) تظهر نتائج قيم (IMSE) لمقدر بيز لمعلمة الالتواء (k) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية هي الأفضل عندما تكون قيمة ($\sigma = 0.5$) .

3- عندما تكون حجم العينة (n=100) تظهر نتائج قيم (IMSE) لمقدر بيز لمعلمة الالتواء (k) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة هي الأفضل في حالة (t=1 ,c=0) ($\hat{k}_{W10}$) عندما تكون قيمة ($\sigma = 0.1$)

جدول (2) يبين نتائج IMSE لمعلمة الالتواء (k) لتوزيع SLعندما (k=1) باستعمال (SELF & WSELF) كما في الجدول الاتي :-

Estimation	N / σ	15	30	60	100
$\hat{k}_{S} = 1$	$\sigma = 0.1$	0.1585	0.1219	0.1030	0.0959
	$\sigma = 0.5$	0.1584	0.1219	0.1030	0.0959
	$\sigma = 1$	0.1586	0.1216	0.1029	0.0959
$\hat{k}_{W10=1}$	$\sigma = 0.1$	0.0770	0.0736	0.0715	0.0701
	$\sigma = 0.5$	0.0795	0.0748	0.0731	0.0671
	$\sigma = 1$	0.0796	0.0721	0.0715	0.0725

$\hat{k}_{W11=1}$	$\sigma = 0.1$	0.0286	0.0432	0.0546	0.0596
	$\sigma = 0.5$	0.0296	0.0439	0.0558	0.0570
	$\sigma = 1$	0.0294	0.0423	0.0546	0.0616
$\hat{k}_{W20=1}$	$\sigma = 0.1$	0.0722	0.0696	0.0691	0.0686
	$\sigma = 0.5$	0.0745	0.0708	0.0707	0.0657
	$\sigma = 1$	0.0747	0.0683	0.0691	0.0709
$\hat{k}_{W21=1}$	$\sigma = 0.1$	0.0151	0.0123	0.0110	0.0104
	$\sigma = 0.5$	0.0156	0.0125	0.0112	0.0100
	$\sigma = 1$	0.0155	0.0121	0.0110	0.0108
$\hat{k}_{W22=1}$	$\sigma = 0.1$	0.0627	0.0650	0.0669	0.0673
	$\sigma = 0.5$	0.0647	0.0661	0.0684	0.0644
	$\sigma = 1$	0.0649	0.0637	0.0669	0.0695
Best		$\hat{k}_{W21}\|\sigma = 1$	$\hat{k}_{W21}\|\sigma = 1$	$\hat{k}_{W21}\|\sigma = 1$	$\hat{k}_{W21}\|\sigma = 0.5$

من ملاحظة الجدول رقم (2) يبين نتائج IMSE لمعلمة الالتواء (k) وكما يأتي :-

1- عندما تكون حجم العينة (n=15) تظهر نتائج قيم (IMSE) لمقدر بيز لمعلمة الالتواء (k) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة هي الأفضل في حالة (c=1, t=2) ($\hat{k}_{W21}$)عندما تكون قيمة ($\sigma = 1$) .

2- عندما تكون حجم العينة (n=30) نلاحظ افضلية نتائج قيم (IMSE) لمقدر بيز لمعلمة الالتواء (k) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (c=1, t=2) ($\hat{k}_{W21}$) عندما تكون قيمة ($\sigma = 1$) .

3- عندما تكون حجم العينة (n=60) تظهر نتائج قيم (IMSE) لمقدر بيز لمعلمة الالتواء (k) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة هي الأفضل في حالة (c=1, t=2) ($\hat{k}_{W21}$) عندما تكون قيمة ($\sigma = 1$) .

4- عندما تكون حجم العينة (n=100) تظهر نتائج قيم (IMSE) لمقدر بيز لمعلمة الالتواء (k) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة هي الأفضل في حالة (c=1, t=2) ($\hat{k}_{W21}$) عندما تكون قيمة ($\sigma = 0.5$)

5- نلاحظ عندما يكون مقدار معلمة الالتواء (k=1) و ($\sigma = 0,5$) وحجم العينة (n=100) يكون مقدر بيز لمعلمة الالتواء (k) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة ($\hat{k}_{W21}$) هي الافضل.

جدول (3) يبين نتائج IMSE لمعلمة الالتواء (k) لتوزيع SLعندما (k=0.5) باستعمال (SELF & WSELF) كما في الجدول الاتي :-

Estimation	N / σ	15	30	60	100
$\hat{k}_S = 0.5$	$\sigma = 0.1$	6.4117	0.3568	0.0793	0.0689
	$\sigma = 0.5$	1.0288	0.4391	0.2150	0.0719
	$\sigma = 1$	1.0670	1.6362	0.0739	0.0735
$\hat{k}_{W10=0.5}$	$\sigma = 0.1$	0.6204	0.7193	0.0815	0.0704
	$\sigma = 0.5$	2.5017	2.4034	0.5094	0.0726
	$\sigma = 1$	0.3599	5.0324	0.0897	0.0727
$\hat{k}_{W11=0.5}$	$\sigma = 0.1$	3.5520	0.9287	0.0852	0.0709
	$\sigma = 0.5$	4.8926	0.0921	0.1102	0.0764
	$\sigma = 1$	0.1410	0.2781	0.0734	0.0790
$\hat{k}_{W20=0.5}$	$\sigma = 0.1$	0.2242	0.1033	0.1340	0.0709
	$\sigma = 0.5$	0.2256	0.0925	0.1893	0.1784
	$\sigma = 1$	0.1373	0.1474	0.0736	1.1478
$\hat{k}_{W21=0.5}$	$\sigma = 0.1$	0.4043	1.3332	0.3339	0.3403
	$\sigma = 0.5$	0.3203	0.3377	0.3459	0.3406
	$\sigma = 1$	0.3156	0.5393	0.3398	0.3628
$\hat{k}_{W22=0.5}$	$\sigma = 0.1$	1.1514	0.1164	0.0811	0.0704
	$\sigma = 0.5$	4.0483	0.2347	0.0980	0.0724
	$\sigma = 1$	0.1767	0.1164	0.8800	0.0721
Best		$\hat{k}_{W20} \vert \sigma = 1$	$\hat{k}_{W11} \vert \sigma = 0.5$	$\hat{k}_{W11} \vert \sigma = 1$	$\hat{k}_{W22} \vert \sigma = 0.1$

من ملاحظة الجدول رقم (3) يبين نتائج IMSE لمعلمة الالتواء (k) وكما يأتي :-

تظهر عند جميع حجوم العينات افضلية مقدر بيز تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة .

جدول (4) يبين نتائج IMSE لمعلمة القياس (σ) لتوزيع SLعندما (σ =0.1) باستعمال (WSELF&SELF) كما في الجدول الاتي :

Estimation	N / k	15	30	60	100
$\hat{\sigma}_S = 0.1$	$k = 2$	0.1745	0.1680	0.1672	0.1674
	$k = 1$	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
	$k = 0.5$	0.0200	0.0225	0.0239	0.0212
$\hat{\sigma}_{W10=0.1}$	$k = 2$	0. 1743	0.6401	0.1674	0.1670
	$k = 1$	0.0049	0.0061	0.0070	0.0073
	$k = 0.5$	0.0048	0.0224	0.0233	0.0218
$\hat{\sigma}_{W11=0.1}$	$k = 2$	0.1684	0.1677	0.1670	0.1669
	$k = 1$	0.0049	0.0061	0.0070	0.0073
	$k = 0.5$	0.1683	0.0221	0.0219	0.0212
$\hat{\sigma}_{W20=0.1}$	$k = 2$	0. 1867	0.1721	0.1681	0.1673
	$k = 1$	0.0049	0.0061	0.0070	0.0073
	$k = 0.5$	0.0463	0.0251	0.0312	0.6121
$\hat{\sigma}_{W21=0.1}$	$k = 2$	0. 0990	0.0989	0.0980	0.0968
	$k = 1$	2.6489	2.3781	2.6230	0.8793
	$k = 0.5$	0.0930	3.5589	1.3523	4.9249
$\hat{\sigma}_{W22=0.1}$	$k = 2$	1.0804	1.0540	1.0466	1.0448
	$k = 1$	0.1436	0.1991	0.2423	0.2608
	$k = 0.5$	0.1547	0.5055	0.4660	0.4414
Best		$\hat{\sigma}_{W20} \| k = 1$	$\hat{\sigma}_{W10} \| k = 1$	$\hat{\sigma}_{W20} \| k = 1$	$\hat{\sigma}_{W20} \| k = 1$

من ملاحظة الجدول رقم (4) يبين نتائج IMSE لمعلمة القياس (σ) وكما يأتي :-

1- عندما تكون حجم العينة (n=15) نلاحظ افضلية نتائج قيم (IMSE) لمعلمة القياس (σ) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (t=2 ,c=0) , ($\hat{\sigma}_{W20}$) عندما تكون (k=1) يليه مقدر بيز باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (t=1 , c=1) ,($\hat{\sigma}_{W11}$) عند قيمة (k=1) يليه ايضاً مقدر بيز باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (t=2 ,c=0), ($\hat{\sigma}_{W20}$) عند (k=1) .

2- عندما تكون حجم العينة (n=30) تظهر نتائج قيم (IMSE) لمعلمة القياس (σ) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (t=1 ,c=0) , ($\hat{\sigma}_{W10}$) هي الأفضل عندما تكون (k=1) يليه مقدر بيز باستعمال دالة

خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (t=1 , c=1) ,$\hat{\sigma}_{W11}$) عند قيمة (k=1) يليه ايضاً مقدر بيز باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (t=2 ,c=0) ,($\hat{\sigma}_{W20}$) عند (k=1) .

3- عندما تكون حجم العينة (n=60) نلاحظ تفوق نتائج قيم (IMSE) لمعلمة القياس (σ) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (t=2 ,c=0) , ($\hat{\sigma}_{W20}$) عندما تكون (k=1) يليه مقدر بيز باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (t=1 , c=1) ,$\hat{\sigma}_{W11}$) عند قيمة (k=1) .

4- عندما تكون حجم العينة (n=100) نلاحظ افضلية نتائج قيم (IMSE) لمعلمة القياس (σ) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (t=1 ,c=0) , ($\hat{\sigma}_{W10}$) عندما تكون (k=1) يليه مقدر بيز باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (t=1 , c=1) ,$\hat{\sigma}_{W11}$) عند قيمة (k=1) يليه ايضاً مقدر بيز باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (t=2 ,c=0) ,($\hat{\sigma}_{W20}$) عند (k=1) .

جدول (5) يبين نتائج IMSE لمعلمة القياس (σ) لتوزيع SLعندما (σ =0.5) باستعمال (WSELF&SELF) كما في الجدول الاتي :

Estimation	N / k	15	30	60	100
$\hat{\sigma}_S = 0.5$	$k = 2$	4. 4138	4.2464	4.1809	4.1990
	$k = 1$	0.2498	0.2500	0.2500	0.2500
	$k = 0.5$	0.2394	4.2721	0.6771	0.5362
$\hat{\sigma}_{W10=0.5}$	$k = 2$	4. 4689	4.2638	4.1893	4.1942
	$k = 1$	0.1263	0.1542	0.1780	0.1752
	$k = 0.5$	3.3594	1.1529	3.5655	0.5438
$\hat{\sigma}_{W11=0.5}$	$k = 2$	3.7037	4.0623	4.1425	4.1776
	$k = 1$	0.1263	0.1542	0.1780	0.1752
	$k = 0.5$	0.1154	0.5579	0.5328	0.5303
$\hat{\sigma}_{W20=0.5}$	$k = 2$	4.4344	4.2558	4.1876	4.1936
	$k = 1$	0.1263	0.1542	0.1780	0.1752
	$k = 0.5$	0.4583	0.6268	0.5580	1.7509
$\hat{\sigma}_{W21=0.5}$	$k = 2$	0.0031	0.0026	0.0024	0.0024
	$k = 1$	1.0263	4.6142	2.7380	2.5552
	$k = 0.5$	13.7523	4.4190	74.1772	2.1608
$\hat{\sigma}_{W22=0.5}$	$k = 2$	0.4086	0.3926	0.3884	03867
	$k = 1$	0.0102	0.0184	0.0257	0.0272
	$k = 0.5$	4.0483	0.2347	0.0980	0.0724
Best		$\hat{\sigma}_{W22}\|k = 1$	$\hat{\sigma}_{W21}\|k = 2$	$\hat{\sigma}_{W21}\|k = 2$	$\hat{\sigma}_{W21}\|k = 2$

من ملاحظة الجدول رقم (5) يبين نتائج IMSE لمعلمة القياس (σ) وكما يأتي :-

1- عند حجم العينة (n=15) تظهر نتائج قيم (IMSE) لمعلمة القياس (σ) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (c=2, t=2) , ($\hat{\sigma}_{W22}$) هي الأفضل عندما تكون (k=1) ،
2- عند حجم العينة (n=30) تظهر نتائج قيم (IMSE) لمعلمة القياس (σ) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (c=1, t=2) , ($\hat{\sigma}_{W21}$) هي الأفضل عندما تكون (k=2) ،
3- عند حجم العينة (n=60) تظهر نتائج قيم (IMSE) لمعلمة القياس (σ) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (c=1, t=2) , ($\hat{\sigma}_{W21}$) هي الأفضل عندما تكون (k=2) ،
4- عند حجم العينة (n=100) تظهر نتائج قيم (IMSE) لمعلمة القياس (σ) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (c=1, t=2) , ($\hat{\sigma}_{W21}$) هي الأفضل عندما تكون (k=2) ،

جدول (6) يبين نتائج IMSE لمعلمة القياس (σ) لتوزيع SLعندما (σ =1) باستعمال (WSELF&SELF) كما في الجدول الاتي :

Estimation	N / k	15	30	60	100
$\hat{\sigma}_S = 1$	$k = 2$	17.8560	16.8553	16.9258	16.7621
	$k = 1$	8.6528	0.9980	0.9990	1.0000
	$k = 0.5$	15.6529	2.7362	2.1722	2.3332
$\hat{\sigma}_{W10=1}$	$k = 2$	18.5367	17.1370	16.8272	16.7735
	$k = 1$	16.5423	0.5950	0.6960	0.7570
	$k = 0.5$	7.1765	3.5999	4.8757	15.9833
$\hat{\sigma}_{W11=1}$	$k = 2$	9.0535	13.7135	15.9162	16.4459
	$k = 1$	8.05432	0.5950	0.6960	0.7570
	$k = 0.5$	13.6523	2.2352	2.0590	2.1313
$\hat{\sigma}_{W20=1}$	$k = 2$	17.294	16.8383	16.7572	16.7489
	$k = 1$	11.8734	0.5950	0.6960	0.7570
	$k = 0.5$	12.9826	4.1217	6.7814	2.6469
$\hat{\sigma}_{W21=1}$	$k = 2$	0.1285	0.1301	0.1304	0.1304
	$k = 1$	0.1765	1.7950	1.2560	3.2770
	$k = 0.5$	0.0923	1.0964	1.4575	1.6288
$\hat{\sigma}_{W22=1}$	$k = 2$	0.02198	0.0163	0.0152	0.0149
	$k = 1$	0.0564	0.0637	0.0669	0.0695
	$k = 0.5$	10.1437	0.0680	0.8925	0.0573
Best		$\hat{\sigma}_{W22} \mid k = 2$	$\hat{\sigma}_{W22} \mid k = 2$	$\hat{\sigma}_{W22} \mid k = 2$	$\hat{\sigma}_{W22} \mid k = 2$

من ملاحظة الجدول رقم (6) يبين نتائج IMSE لمعلمة القياس (σ) وكما يأتي :-
1- عند حجم العينة (n=15) تظهر نتائج قيم (IMSE) لمعلمة القياس (σ) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (c=2, t=2) , $(\hat{\sigma}_{W22})$ هي الأفضل عندما تكون (k=2) ،
2 - عند حجم العينة (n=30) نلاحظ تفوق نتائج قيم (IMSE) لمعلمة القياس (σ) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (c=2, t=2) , $(\hat{\sigma}_{W22})$ هي الأفضل عندما (k=2) ،
3- عند حجم العينة (n=60) نلاحظ تفوق نتائج قيم (IMSE) لمعلمة القياس (σ) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة عندما(c=2, t=2) , $(\hat{\sigma}_{W22})$ هي الأفضل عندما (k=2) ،
4- عند حجم العينة (n=100) نلاحظ تفوق نتائج قيم (IMSE) لمعلمة القياس (σ) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (c=2, t=2) , $(\hat{\sigma}_{W22})$ هي الأفضل عندما تكون (k=2) ،
5- عند احجام العينات (n=15,30,60,100) نلاحظ مقدار معلمة القياس $(\sigma = 1)$ و (k=2) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة في حالة (c=2, t=2) , $(\hat{\sigma}_{W22})$ هي الأفضل .

5- الاستنتاجات (Conclusions)

1- أظهرت نتائج المحاكاة لجميع حجوم العينات بالنسبة لمعلمة القياس (σ) بأن دالة الخسارة التربيعية الموزونة هي الأفضل المستعملة في تقدير قيمة معلمات توزيع لابلاس الملتوي عندما تكون قيمة المعلمة (k>1)هي التي تمتلك اقل (IMSE) من خلال تكرار التجربة لـ 1000مرة مقارنة مع توزيع لابلاس المتماثل عند قيمة المعلمة (k=1) بشكل متساوي ، اما عندما تكون قيمة المعلمة (k<1) هي التي تمتلك أيضا اقل مقدر IMSE لكل من معلمتي الالتواء والقياس
2- وبالتالي يتضح من الجدول ان قيم نتائج (IMSE) لمقدرات معلمتي الالتواء (k) والقياس (σ) لتوزيع لابلاس الملتوي تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة (WSELF) هي الأفضل لجميع حجوم العينات مقارنة مع مقدر دالة خسارة الخطأ التربيعية ، مما يؤكد كفاءة مقدر بيز تحت دالة خسارة التربيعية الموزونة والخصائص التي تتميز بها، مما يجعلها مفضلة على غيرها من الطرائق .

6-التوصيات (Recommendations)

بناءاً على نتائج المحاكاة والاستنتاجات التي تم التوصل اليها نوصي باستخدام طريقة Bayes المعتمدة على دالة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة لتقدير معلمات توزيع لابلاس الملتوي عندما تكون k>1 وذلك لأنها اعطت نتائج افضل من مقدر بيز تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية .

المصادر

[1] Aksoy,S., (2008)," Bayesian Decision Theory ", Bilkent University , Department Of Computer Engineering , Sakosoy@cs.bilkent.edu.tr ,CS 551.
[2] Ghosh, J., K., Delampady, M., and Samanta, T. ,(2006), " An Introduction to Bayesian Analysis: Theory and Methods", Springer , first Edition.
[3] Jammalamadaka, S. R., and Kozubowski, T. J., (2004), " New Families of Wrapped Distributions for Modeling Skew Circular Data",Communications in Statistics-Theory and Methods, Vol.(33),No. (9),pp.(2059-2074).
[4] Kotz, S., Kozubowski, T., and Podgorski, K., (2001), "The Laplace Distribution and Generalizations: A revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering, and Finance",Springer, Science and Business Media .
[5] Kotz,S., Kozubowski,T., J., and Podgbrski,K., (2003), "An Asymmetric Multivariate Laplace Distribution", No. 367, PP. 1-26.
[6] Kozubowski, T. J., and Podgórski, K., (2001),"Asymmetric Laplace Laws and Modeling Financial Data", Mathematical and Computer Modelling, Vol. (34), pp.(1003-1021).
[7] Kozubowski, T. J., and Podgorski, K. ,(2000), " Asymmetric Laplace Distributions", Mathematical Scientist, Vol. (25), No. (1), pp. (37-46).

[8] Rahman, H., Roy, M. K., and Baizid, A. R., (2012), "Bayes Estimation Under Conjugate Prior for the Case of Power Function Distribution", American Journal of Mathematics and Statistics, Vol. (2), No. (3), pp. (44-48).

[9] Rasheed, H., A., and Khalifa, Z., N.,(2017), "Some Bayes Estimators for Maxwell Distribution by Using New Loss Function", Al-Mustansiriyah Journal of Science, Vol.(28) ,No.(1),pp (103-111) .

[10] Sultan, H., and Ahmad, S., P., (2017), " Bayesian Analysis for Generalized Rayleigh Distribution: Lindley's approximation",International Journal of Advance Research in Science and Engineering,Vol.(6),No.(3),pp(214-223).

[11] Wang, J., Boyer, J., & Genton, M. G., (2004), "A Skew-Symmetric Representation of Multivariate Distributions" ,Statistica Sinica, vol.14, no.4, pp.(1259-1270) .