مقارنة بعض طرائق تقدير دالة البقاء لتوزيع لوماكس المختلط باستعمال المحاكاة

أ.م.د. اقبال محمود علوان الباحث عباس مهدي صالح

كلية الادارة والاقتصاد - جامعة بغداد - قسم الاحصاء

المستخلص

تم في هذا البحث تقديم الجوانب النظرية لتوزيع مختلط ناتج من خلط توزيع لوماكس مع توزيع لوماكس المنحاز طولياً، وتبرز أهمية التوزيع المختلط كونه اكثر دقة في حسن المطابقة للبيانات الغير متجانسة مقارنةً بالتوزيعات الشائعة التي لا تأخذ بنظر الاعتبار عدم تجانس المجتمع، تم اعتماد ثلاثة طرائق لتقدير دالة البقاء واجراء مقارنة باستعمال معيار المقارنة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) وتطبيقه على مجموعة من تجارب المحاكاة عددها (40) تجربة باستعمال احجام عينات مختلفة وكذلك قيمة الافتراضية لمعلمتي الشكل والقياس، واظهرت النتائج افضلية طريقة بيز القياسية باستعمال اسلوب ليندلي التقريبي في العينات الصغيرة والمتوسطة وبالنسبة للعينات الكبيرة فكانت الافضلية لطريقة الامكان الاعظم، ولم تحقق طريقة العزوم اي افضلية.

الكلمات المفتاحية: توزيع لوماكس المختلط، الانحياز الطولي، توزيع لوماكس، الامكان الاعظم، العزوم، بيز القياسية، تقريب ليندلي.

Abstract:

In this research, the theoretical aspects of a mixture distribution resulting from mixing the Lomax distribution with the longitudinally biased Lomax distribution are presented. The importance of the mixture distribution is highlighted as it is more accurate in matching the heterogeneous data compared to the common distributions that do not take into account the heterogeneity of the population. Three methods were adopted to estimate the survival function and make a comparison using the mean of integral error squares (IMSE) comparison criterion and applied it to a group of (40) simulation experiments that varied according to the sample size and the default value of the shape and scale parameters. The results showed the advantage of the standard Bayes method using the approximate Lindley method in small samples, and for large samples the preference was given to the method of Maximum Likelihood, and the moment method did not achieve any advantage.

Keywords: Mixture Lomax distribution, Length biased, Lomax distribution, Maximum Likelihood, Moment, Standard Bayes, Lindley Approximation.

1- المقدمة وهدف البحث (Introduction & Objeective Research)

يعتبر توزيع لوماكس نموذج مهم في نظرية البقاء اذ يتم استعماله كنموذج مراقبة في المشاكل الطبية وفي تحليل البيانات المتعلقة بالإحصاءات الحيوية، كما تبرز اهمية التوزيع المختلط باعتبارها اكثر دقة في حسن المطابقة للبيانات الغير متجانسة مقارنةً بالتوزيعات الشائعة التي لاتأخذ بنظر الاعتبار عدم تجانس المجتمع، ولطرائق التقدير الاحصائي اهمية خاصة لدى الباحثين في المجال العلمي بشكل عام والعاملين في المجال الاحصائي بشكلٍ خاص اذ يستعمل مفهوم التقدير الاحصائي في الكثير من مجالات البحث العلمي ومنها موضوع تقدير دوال البقاء لما لهُ من اهمية في دراسة احتمال بقاء الكائن حي بعد مدة محددة من الزمن، لذاك تناول العديد من الباحثين موضوع دوال البقاء. يهدف البحث الى اختيار افضل طريقة لتقدير دالة البقاء لتوزيع لوماكس المختلط من بين عدة طرائق تقديرية(الامكان الأعظم، العزوم، بيز القياسية) وذلك بالمقارنة بين هذه الطرائق باستعمال اسلوب المحاكاة ومعيار المقارنة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) للوصول الى افضل طريقة للتقدير.

2- توزيع لوماكس المختلط (Mixtur Lomax Distribution)

هوَ توزيع احتمالي اقترحه الباحثان(Chookait P., Kemmawadee P.)[5] في عام (2018) وهوَ توزيع مستمر ذو معلمتين ناتج من خلط توزيع لوماكس ذو المعلمتين مع توزيع لوماكس المنحاز طولياً (L.B.W.L.D) ، فأذا كان المتغير العشوائي t يتبع توزيع لوماكس المختلط فان دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع تكون وفق الصيغة الاتية:

$$f(t) = pf_1(t) + (1-p)f_2(t) \qquad ,1 > p > 0 \qquad \ldots\ldots(1)$$

اذ ان:

p : نسبة الخلط، وهيَ نسبة كل المجتمع الجزئي من المجمع الكلي، وفي هذا التوزيع ستكون:

$$p = \frac{b}{b+1} \quad \ldots\ldots(2)$$

$f_1(t)$: دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لوماكس

$f_2(t)$: دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (L.B.W.L.D)

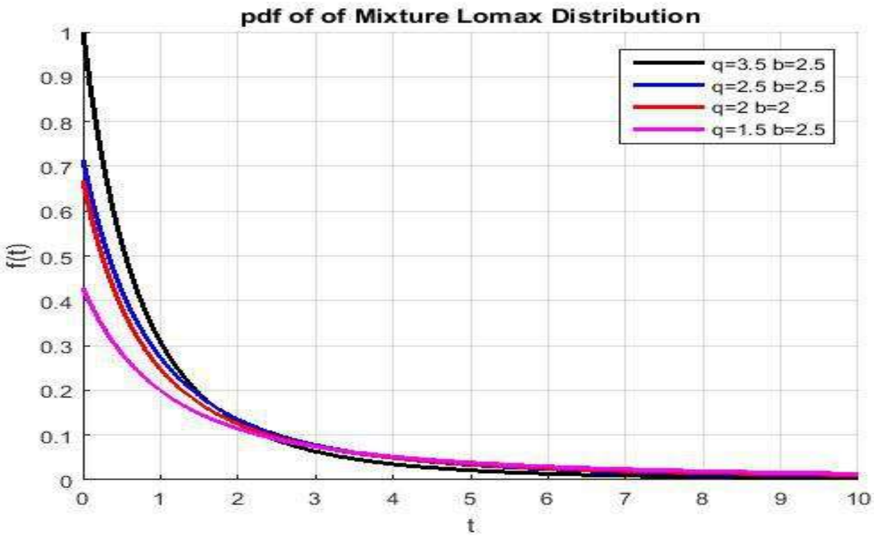
$$f_1(t) = \frac{q}{b\left[1+\frac{t}{b}\right]^{1+q}} \qquad ,t>0, \qquad q>0, \qquad b>0 \ldots\ldots(3)$$

$$f_2(t) = \frac{q(q-1)t}{b^2\left[1+\frac{t}{b}\right]^{1+q}} \qquad ,\mathrm{t}>0, \qquad \mathrm{q}>0, \qquad \mathrm{b}>0 \quad \ldots\ldots(4)$$

ومن المعادلة رقم(3) والمعادلة رقم(4) سيكون[5]:

$$f(t) = \frac{q(b^2+qt-t)}{(b^3+b^2)(1+\frac{t}{b})^{1+q}} \qquad ,t>0, \qquad q>0, \qquad b>0 \quad \ldots(5)$$

اذ ان (q) تمثل معلمة الشكل(Shape Parameter)، وان (b) تمثل معلمة القياس(Scale Parameter).



الشكل (1) دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لوماكس المختلط

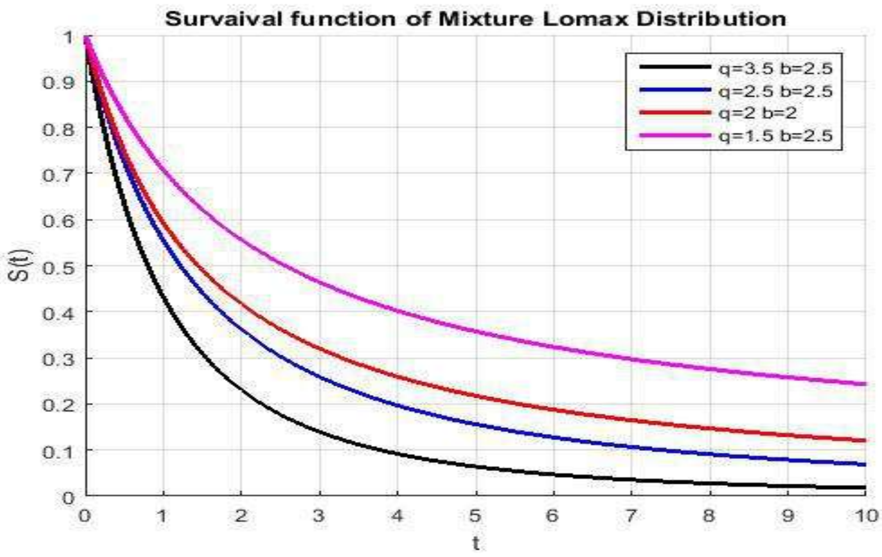
وان دالة الكثافة التجميعية(C.D.F) لتوزيع لوماكس المختلط ستكون بالصيغة الاتية:

$$F(t) = \frac{1}{b+1}\left[1 + b - \left(1 + b + \frac{q\,t}{b}\right)\left(1 + \frac{t}{b}\right)^{-q}\right] \quad \dots \dots (6)$$

اما دالة البقاء لتوزيع لوماكس المختلط ستكون بالصيغة الاتية:

$$S(t) = 1 - F(t)$$

$$S(t) = 1 - \left[\frac{1}{b+1}\left[1 + b - \left(1 + b + \frac{q\,t}{b}\right)\left(1 + \frac{t}{b}\right)^{-q}\right]\right] \dots \dots (7)$$



الشكل (2) دالة البقاء لتوزيع لوماكس المختلط

3- طرائق التقدير (Estimation methods)

التقدير من اهم المسائل في الاستدلال الاحصائي ويوجد العديد من طرائق التقدير، سنستعمل ثلاثة طرائق للتقدير والتي تعتبر من اهم واكثر الطرائق استعمالاً في التقدير الاحصائي وهيَ طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم وطريقة بيز القياسية.

1-3 طريقة الامكان الاعظم (Maximum Likelihood Method)

تعد هذه الطريقة من اهم الطرائق في عملية التقدير والاكثر استعمالاً بما تتميز بخصائص جيدة كخاصية الاتساق والكفاية وامتلاكها اقل تباين[2]، فاذا كانت $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ هيَ مفردات عينة عشوائية بحجم n فأن دالة الامكان الاعظم (L)[5] تكون بالصيغة الاتية:

$$L = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{q(b^2 + q\,t_i - t_i)}{(b^3 + b^2)(1+\frac{t_i}{b})^{1+q}}\right]$$

$$L = \frac{q^n \sum_{i=1}^{n}(b^2 + q\,t_i - t_i)}{(b^3 + b^2)^n \sum_{i=1}^{n}(1+\frac{t_i}{b})^{1+q}} \qquad \ldots\ldots (8)$$

وبأخذ الـ(ln) للطرفين وبأجراء التفاضل الجزئي بالنسبة للمعلمات (q,b) نحصل على :

$$\ln \mathrm{L} = n\ln(q) + \sum_{i=1}^{n}\ln\,(b^2 + q\,t_i - t_i) - n\ln\,(b^3 - b^2) - (1+q)\sum_{i=1}^{n}\ln\,(1+\frac{t_i}{b})$$

$$\frac{\partial \ln \mathrm{L}}{\partial q} = \frac{n}{q} + \sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{(b^2 + q\,t_i - t_i)} - \sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{t_i}{b})$$

$$\frac{\partial \ln \mathrm{L}}{\partial \mathrm{b}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{2b}{(b^2 + q\,t_i - t_i)} - \frac{n(3b^2 + 2b)}{(b^3 + b^2)} + (1+q)\sum_{i=1}^{n}\frac{b^{-2}}{(1+\frac{t_i}{b})}$$

وبجعل المشتقات الجزئة مساوية للصفر نحصل على :

$$\hat{q} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{t_i}{\hat{b}}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{(\hat{b}^2 + \hat{q}\,t_i - t_i)}} \qquad \ldots\ldots (9)$$

$$\frac{n(3\hat{b}+2)}{(\hat{b}+1)\hat{b}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{2\hat{b}}{(\hat{b}^2 + \hat{q}\,t_i - t_i)} + (1+\hat{q})\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{b}^{-2}}{\left(1+\frac{t_i}{\hat{b}}\right)} \qquad \ldots\ldots (10)$$

ان المعادلات (9) و (10) غير خطية ولا تحل بالطرق الاعتيادية وانما تُحل باستعمال احدى الطرق العددية.

2-3 طريقة العزوم (Moments Method)

اذا كان $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ هيَ مفردات عينة عشوائية بحجم n مسحوبة من مجتمع له دالة كثافة احتمالية $f(t_i, \theta)$ اذ ان $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_k\}$ ، واذا كان عزم المجتمع حول نقطة الاصل هوَ μ_j وعزم العينة حول نقطة الاصل هوَ $\hat{\mu}_j$ فان طريقة العزوم تكون وفق الصيغة الاتية:

$$\mu_j(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_k) = \hat{\mu}_j(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n) \qquad , j = 1,2,3, \ldots, k$$

وان

$$\mu_j(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_k) = E(t^k) \qquad \ldots\ldots (11)$$

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^{\,j} \qquad \dots\dots(12)$$

$$\mu_1 = E(t) = \frac{b^2}{(1+b)(q-1)} + \frac{2b}{(1+b)(q-2)} \qquad \dots\dots(13)$$

$$\mu_2 = E(t^2) = \frac{2b^3}{(1+b)(q-1)(q-2)} + \frac{6b^2}{(1+b)(q-2)(q-3)} \dots\dots(14)$$

تمثل عزوم المجتمع لتوزيع لوماكس المختلط وبمساواتها بعزوم العينة نحصل على تقدير المعلمات:

$$\bar{t} \approx \frac{\hat{b}\left[\hat{b}(\hat{q}-2)+2(\hat{q}-1)\right]}{\left(1+\hat{b}\right)(\hat{q}-1)(\hat{q}-2)} \qquad \dots\dots(15)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^{\,2} \approx \frac{2\hat{b}^2\left[\hat{b}(\hat{q}-3)+3(\hat{q}-2)\right]}{\left(1+\hat{b}\right)(\hat{q}-1)(\hat{q}-2)(\hat{q}-3)} \qquad \dots\dots(16)$$

ان المعادلات (15) و (16) غير خطية ولا تحل بالطرق الاعتيادية وانما تُحل باستعمال احدى الطرق العددية.

3-3 طريقة بيز القياسية (Standard Bayes Method)

تفترض هذه الطريقة في التقدير ان المعلمة المراد تقديرها هيَ عبارة عن متغير عشوائي وليس كمية ثابتة وهذا المتغير العشوائي يمتلك توزيع اولي $\pi(\theta)$ ، ويعتمد هذا التقدير على معلومات سابقة ومتوفرة عن المعلمة المراد تقديرها اضافةً الى معلومات مشتقة من مشاهدات العينة[7], وسنستعمل قاعدة (Jeffry)[3] لاختيار التوزيع الاولي. وكذلك سنستعمل في هذه الطريقة دالة خسارة تربيعية.

$$\pi(q,b) \propto \frac{1}{q\,b} \qquad , q>0\,, b>0 \quad \dots\dots(17)$$

وان دالة الامكان الاعظم للمشاهدات $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ لتوزيع لوماكس المختلط تكون بالصيغة الاتية:

$$L(q,b/\underline{t}\,) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{q(b^2+q\,t_i-t_i)}{(b^3+b^2)(1+\frac{t_i}{b})^{1+q}}\right] \qquad \dots\dots(18)$$

وان دالة التوزيع المشتركة

$$\pi(q,b)\,L(q,b/\underline{t}\,) \propto \frac{q^{n-1}}{b(b^3+b^2)^n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(b^2+q\,t_i-t_i)}{(1+\frac{t_i}{b})^{1+q}}\right] \qquad \dots\dots(19)$$

وان دالة الكثافة الحدية للمتغير (t) تكون بالصيغة الاتية:

$$f(t_1,t_2,t_3,\dots,t_n) \propto \int_{\forall q}\int_{\forall b}\left(\frac{q^{n-1}}{b((b^3+b^2)^n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(b^2+q\,t_i-t_i)}{(1+\frac{t_i}{b})^{1+q}}\right]\right) dq\,db \dots(20)$$

وحسب نظرية بيز فأن دالة التوزيع اللاحق(Posterior p.d.f) للمعلمتين(q),(b) يمكن ان نحصل عليها بأستعمال صيغة بيز العكسية بقسمة دالة التوزيع المشتركة على دالة الكثافة الحدية وكما يلي:

$$h(q,b/t_1,t_2,t_3,\dots,t_n)\propto \frac{\frac{q^{n-1}}{b((b^3+b^2)^n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(b^2+q\,t_i-t_i)}{\left(1+\frac{t_i}{b}\right)^{1+q}}\right]}{\int_{\forall q}\int_{\forall b}\left(\frac{q^{n-1}}{b((b^3+b^2)^n}\ \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(b^2+q\,t_i-t_i)}{\left(1+\frac{t_i}{b}\right)^{1+q}}\right]\right)dq\,db}\ \dots(21)$$

وباستعمال دالة الخسارة التربيعية يمكن الحصول على مقدر بيز القياسي لدالة البقاء وكما يلي:

$$\hat{S}_{Bayes}(t)=\mathrm{E}[S(t)/t_1,t_2,t_3,\dots,t_n]$$

$$\hat{S}_{Bayes}(t)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}S(t)\,h(q,b/t_1,t_2,t_3,\dots,t_n)\,dq\,db$$

$$\hat{S}_{Bayes}(t)=$$

$$\frac{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\left[1-\left[\frac{1}{1+b}\left(1+b-\left(1+b+\frac{qt}{b}\right)\left(1+\frac{t}{b}\right)^{-\hat{q}}\right)\right]\right]\frac{q^{n-1}}{b((b^3+b^2)^n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(b^2+q\,t_i-t_i)}{\left(1+\frac{t_i}{b}\right)^{1+q}}\right]\right)dq\,db}{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\frac{q^{n-1}}{b((b^3+b^2)^n}\ \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(b^2+q\,t_i-t_i)}{\left(1+\frac{t_i}{b}\right)^{1+q}}\right]\right)dq\,db}\quad \dots\dots\dots(22)$$

إن نسبة التكاملات في المعادلة (22) اعلاه انها تأخذ صيغة غير محكمة نظرياً لذلك لابد من استعمال اسلوب تقريبي لحساب هذه الكاملات المعقدة وايجاد مقدر دالة البقاء وفي هذا البحث سنستعمل اسلوب ليندلي التقريبي.

4- إسلوب ليندلي التقريبي (Lindley Approximation)

اقرح الباحث (D.V. Lindley)[6][3] في عام (1980) إسلوباً تقريبياً لحساب نسبة التكاملات، إذ تمكن من الوصول الى القيمة التقريبية باستعمال متسلسلة تايلر(Taylor's Series) لمقدر الإمكان الأعظم للمعلمة ووفق هذا الاسلوب يكون تقريب نسبة التكاملات في المعادلة (22) الى الصيغة الاتية[7]:

$$E\left[\phi(q,b)/\underline{t}\right]\cong$$
$$\phi(q,b)+\frac{1}{2}\left[A+I_{30}B_{12}+I_{03}B_{21}+I_{21}C_{12}+I_{12}C_{21}\right]+P_1A_{12}+P_2A_{21}\quad \dots(23)$$

إذ انَ

$E\left[\phi(q,b)/\underline{t}\right]$: دالة البقاء المطلوب تقديرها $\hat{S}_{Bayes}(t)$ لتوزيع لوماكس المختلط بأسلوب الباحث (Lindley).

$\phi(q,b)$: مقدر الامكان الاعظم وفي هذا البحث $\hat{S}_{M.L.E}(t)$ لتوزيع لوماكس المختلط.

$$A=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}w_{ij}\tau_{ij}\qquad \dots\dots(24)$$

$$I_{ij}=\frac{\partial^{i+j}\,logL(q,b/t\,)}{\partial q^i\,\partial b^j}\qquad ;i,j=0,1,2,3\quad ;i+j=3\qquad \dots\dots(25)$$

$$w_{ij}=\frac{\partial^2\phi(q,b)}{\partial q_i\,\partial b_j}\quad \dots\dots\dots(26)$$

$$A_{ij} = w_i\,\tau_{ii} + w_j\,\tau_{ji} \quad \ldots\ldots\ldots (27)$$
$$B_{ij} = \left(w_i\tau_{ii} + w_j\tau_{ij}\right)\tau_{ii} \quad \ldots\ldots\ldots (28)$$
$$C_{ij} = 3w_i\tau_{ii}\tau_{ij} + w_j\left(\tau_{ii}\tau_{jj} + 2\,\tau_{ij}^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots (29)$$
$$P_1 = \frac{\partial \log \pi(q,b)}{\partial q} \quad ; \quad P_2 = \frac{\partial \log \pi(q,b)}{\partial b}$$
$$w_1 = \frac{\partial \phi(q,b)}{\partial q} \quad ; \quad w_2 = \frac{\partial \phi(q,b)}{\partial b}$$

وان مصفوفة معلومات فيشر:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log L(q,b)}{\partial q^2} & \frac{\partial^2 \log L(q,b)}{\partial q\,\partial b} \\ \frac{\partial^2 \log L(q,b)}{\partial q\,\partial b} & \frac{\partial^2 \log L(q,b)}{\partial b^2} \end{bmatrix}$$

τ_{ij} : تمثل سالب معكوس مصفوفة معلومات فيشر، اي انَ

$$\tau_{ij} = -\Lambda^{-1} \ldots\ldots\ldots (30)$$

وعناصرها كما يلي [1]:

$$\tau_{ii} = \frac{-\Lambda_{jj}}{\left(\Lambda_{ii}\Lambda_{jj} - \Lambda_{ij}\Lambda_{ji}\right)}$$
$$\tau_{jj} = \frac{-\Lambda_{ii}}{\left(\Lambda_{ii}\Lambda_{jj} - \Lambda_{ij}\Lambda_{ji}\right)}$$
$$\tau_{ij} = \frac{-\Lambda_{ji}}{\left(\Lambda_{ii}\Lambda_{jj} - \Lambda_{ij}\Lambda_{ji}\right)} \quad ; i \neq j$$

5- نماذج المحاكاة (Simulation Models)

لغرض اجراء مقارنات لطرائق التقدير تم اجراء المحاكاة لثمانية نماذج مختلفة وكذلك استعمال عينات ذات احجام مختلفة(صغيرة، متوسطة، كبيرة).

احجام العينة التي تم اعتمادها: n=10, 25, 50, 75, 100

القيم الافتراضية للمعلمتين (معلمة الشكل q ومعلمة القياس b) كانت ثمانية نماذج افتراضية:

جدول(1) القيم الافتراضية لمعلمتي توزيع لوماكس المختلط

Model	q	b
I	**1**	**0.5**
II	**1**	**1**
III	**1**	**2**
IV	**2**	**1**
V	**3**	**1.3**
VI	**3.2**	**1.1**
VII	**0.3**	**1.5**
VIII	**0.9**	**0.3**

في هذه المرحلة تجري عملية توليد بيانات عشوائية تتبع توزيع لوماكس المختلط ذو المعلمتين باستعمال طريقة الرفض والقبول وكما يأتي[9]:

1) توليد متغير عشوائي u_i يتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة (0, 1).

$u_i \sim u(0,1) \quad ,i = 1,2, \dots ,n$

u_i : يمثل متغير عشوائي مستمر يتم توليده باستعمال الايعاز $u = rand(1,n)$

2) توليد متغير عشوائي y_i يتبع توزيع لوماكس (Lomax Distribution)[8] بالمعلمتين (q , b)

$y_i \sim Lomax(q,b) \quad ,i = 1,2, \dots ,n$

y_i : يمثل متغير عشوائي يتبع توزيع لوماكس يتم الحصول عليه باستعمال طريقة التحويل المعكوس من خلال مساواة الدالة التجميعية لتوزيع لوماكس بقيمة المشاهدة المولدة(u_i) كالآتي:

$$y_i = F^{-1}(y_i)$$

$$u_i = F(y_i) = 1 - \left[1 + \frac{y_i}{b}\right]^{-q}$$

$$y_i = b\left[(1 - u_i)^{-1/q} - 1\right] \quad \dots\dots (31)$$

3) توليد متغير عشوائي z_i يتبع توزيع لوماكس المنحاز طولياً (L.B.W.L.D) (Length-Biased Weighted Lomax Distribution)[4] بالمعلمتين (q , b)

$z_i \sim LBLomax(q,b) \quad ,i = 1,2, \dots ,n$

z_i : يمثل متغير عشوائي يتبع توزيع (Length-Biased Weighted Lomax) وكذلك يتم الحصول عليه باستعمال طريقة التحويل المعكوس وكالآتي:

$$z_i = F^{-1}(z_i)$$

$$u_i = F(z_i) = 1 - \left[1 + \frac{z_i}{b}\right]^{-q} \left[1 + \frac{qz_i}{b}\right]$$

$$z_i = b\left[-1 + (1 - u_i)^{-1/1-q}\right] \quad \dots\dots (32)$$

4) اذا كان $u_i \le \frac{b}{b+1}$ فأن $t_i = y_i$ واذا كان غير ذلك فأن $t_i = z_i$.

ولغرض تطبيق المقارنة لطرائق التقدير تم الاعتماد على معيار متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) وصيغة هذا المقياس كالاتي[1]:

$$.IMSE\left(\hat{S}(t)\right) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left\{\frac{1}{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}(\hat{S}i(tj) - S(tj))^2\right\}$$

$$. \qquad = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} MSE(\hat{S}(ti)) \quad \dots\dots (33)$$

اذ أن :

L : تمثل عدد مرات تكرار التجربة (500 مرة).

n_t : هي معبرة عن حدود المتغير (t_i) من الحد الادنى الى الحد الاعلى .

6- نتائج تجارب المحاكاة (Simulation Result)

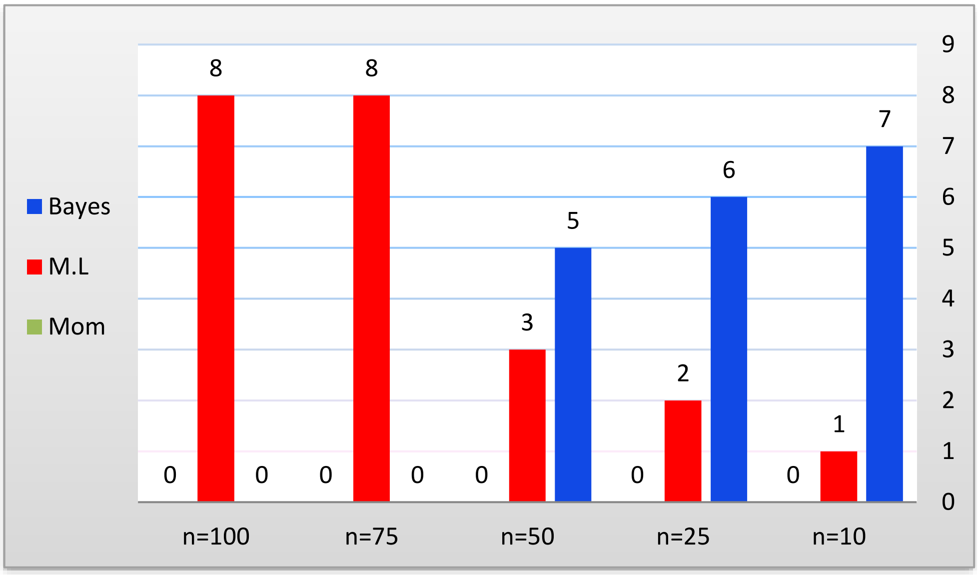
جدول(2) يظهر متوسط مربعات الخطأ التكاملي(IMSE) لدالة البقاء وفق حجم العينة وطريقة التقدير

n	q	b	IMSE			Best
			ML	Mom	Bayes	
10	1	0.5	0.00237	0.01549	0.00184	Bayes
	1	1	0.03211	0.05752	0.01914	Bayes
	1	2	0.00637	0.28713	0.02004	ML

	2	1	0.01847	0.32612	0.00931	Bayes
	3	1.3	0.0144	0.36744	0.00593	Bayes
	3.2	1.1	0.00476	0.02499	0.00359	Bayes
	0.3	1.5	0.01342	0.0395	0.00818	Bayes
	0.9	0.3	0.00249	0.0183	0.00234	Bayes
25	1	0.5	0.00294	0.0183	0.00261	Bayes
	1	1	0.01842	0.03394	0.01239	Bayes
	1	2	0.02196	0.41332	0.00859	Bayes
	2	1	0.0199	0.37972	0.00843	Bayes
	3	1.3	0.00332	0.31466	0.06061	ML
	3.2	1.1	0.004	0.02274	0.00353	Bayes
	0.3	1.5	0.02286	0.04887	0.01964	Bayes
	0.9	0.3	0.00372	0.02273	0.00381	ML
50	1	0.5	0.00267	0.01749	0.00252	Bayes
	1	1	0.00582	0.10626	0.12723	ML
	1	2	0.01439	0.36276	0.00009	Bayes
	2	1	0.00814	0.32556	0.00132	Bayes
	3	1.3	0.0057	0.32534	0.1875	ML
	3.2	1.1	0.00421	0.0234	0.00397	Bayes
	0.3	1.5	0.01338	0.03968	0.01218	Bayes
	0.9	0.3	0.00408	0.02364	0.00414	ML
75	1	0.5	0.00222	0.01569	0.01545	ML
	1	1	0.00877	0.09126	0.10715	ML
	1	2	0.01714	0.34213	0.28349	ML
	2	1	0.00822	0.33792	0.24125	ML
	3	1.3	0.00044	0.2776	0.19201	ML
	3.2	1.1	0.00349	0.02122	0.02083	ML
	0.3	1.5	0.01776	0.04446	0.04294	ML
	0.9	0.3	0.00432	0.02425	0.00437	ML
100	1	0.5	0.00196	0.01459	0.01441	ML
	1	1	0.01648	0.06205	0.07675	ML
	1	2	0.0027	0.29903	0.2263	ML
	2	1	0.00107	0.28741	0.21223	ML
	3	1.3	0.00411	0.32274	0.25262	ML
	3.2	1.1	0.00369	0.02168	0.02138	ML
	0.3	1.5	0.01483	0.04146	0.04038	ML
	0.9	0.3	0.00433	0.0243	0.00438	ML

ويلاحظ من الشكل (3) الافضلية لكل طريقة من طرائق التقدير وعدد مرات الافضلية عند كل حجم من احجام العينات المفترضة في كل تجارب المحاكاة (40) تجربة وفقاً لمعيار(IMSE)، وتبين ان طريقة الامكان الاعظم هي الافضل في

التقدير للعينات الكبيرة، اما العينات الصغيرة والمتوسطة فكانت الافضلية لطريقة بيز القياسية ولم تحقق طريقة العزوم اي افضلية.



شكل(3) يوضح نتائج تجارب المحاكاة حسب طريقة التقدير وحجم العينة

7- الاستنتاجات (Conclusion)

يتضح من كل نتائج تجارب المحاكاة (40) تجربة ما يأتي:

1) دالة البقاء المقدرة بطريقة بيز القياسية اكثر اقتراباً الى دالة البقاء الحقيقية في معظم أحجام العينات(n=10,25,50).
2) دالة البقاء المقدرة بطريقة الامكان الاعظم اكثر اقتراباً الى دالة البقاء الحقيقية في جميع احجام العينات الكبيرة (n=75,100).
3) لم تحقق طريقة العزوم اي نسبة افضلية
4) تفوق طريقة الامكان الاعظم على طريقة بيز في تقدير دالة البقاء لتوزيع لوماكس المختلط اذ حققت طريقة الامكان الاعظم نسبة (55%) وطريقة بيز حققت نسبة (45%) وفق معيار المقارنة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE).

8- التوصيات (Suggestion)

1) الاعتماد على طريقة الإمكان الأعظم في تقدير دالة البقاء لتوزيع لوماكس المختلط عندما يكون حجم العينة كبير، اما اذا كانت العينة صغيرة او متوسطة فيتم الاعتماد على طريقة بيز القياسية.
2) في طريقة تقدير بيز القياسية نوصي بدراسة دوال خسارة اخرى كدالة الخسارة اللوغاريتمية، الاسية الخطية، الانتروبي العامة وغيرها من دوال خسارة والمقارنة بينها للوصول على مقدرات اكثر دقة لدالة البقاء لتوزيع لوماكس المختلط.
3) في طريقة بيز القياسية نوصي باجراء مقارنة بين استعمال الاساليب التقريبية الرياضية واستعمال الخوارزميات في حل التكاملات التي لا يبدو انها تاخذ صيغ محكمة.
4) التوسع في دراسة طرائق تقدير اخرى مثل الطرائق اللامعلمية والطرائق الحصينة وغيرها من الطرائق في تقدير دالة البقاء لتوزيع لوماكس المختلط.
5) التوسع في دراسة التوزيعات المختلطة خصوصاً في تقدير دالة البقاء والمخاطرة كون هذه التوزيعات اكثر دقة ومرونة في تمثيل البيانات مقارنةً بالتوزيعات الشائعة.

المصادر (References)

1) صالح، احمد علوان (2016)، "طرائق تقدير دالة المخاطرة لتوزيع Quasi-Lindely بحث مقارن مع تطبيق عملي"، رسالة ماجستير، كلية الادارة والاقتصاد، جامعة بغداد.
2) الصراف، نزار مصطفى واخرون (2016)، "التقدير الاحصائي"، كتاب، بغداد، مكتبة الجزيرة للطباعة والنشر.
3) فرحان، حلا سلمان (2007)، " مقارنة طرائق تقدير دالة البقاء لتوزيع لوماكس باستخدام عينات مراقبة من النوع الثاني"، رسالة ماجستير، كلية الادارة والاقصاد، جامعة بغداد.
4) Afaq Ahmad, S. P. Ahmad and A. Ahmed(2016), "Length-Biased Weighted Lomax Distribution: Statistical Properties and Application", Pakistan Journal of Statistics and Operation Research, Vol. 12, No. 2, pp. 245-255.
5) Chookait Pudprommarat, Kemmawadee Preedalikit (2018), "A New Mixture Lomax Distribution and Its Application", Suan Sunandha Science and Technology Journal, Vol. 05, No. 1, pp. 12–19.
6) D.V. Lindley(1980), "Approximate Bayesian Methods (With Discussants)", Trabajos Estadist Investigation opera, Vol. 31, pp. 232–245.
7) Debasis Kundua, Rameshwar D. Gupta(2008), "Generalized exponential distribution: Bayesian estimations", Computational Statistics & Data Analysis, Vol. 52, No. 4, pp. 1873–1883.
8) Lomax, K.S. (1954), "Business Failures: Another Example of the Analysis of Failure Data", Journal of the American Statistical Association ,Vol. 49, No. 26, pp. 847-852 .
9) M.E. Ghitany, B. Atieh, S. Nadarajah(2008), "Lindley distribution and its application", Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 78, pp. 493–506.