توزيع Lomax المختلط مع تطبيق دالة البقاء لمرضى Covid 19

أ.م.د اقبال محمود علوان الباحث عباس مهدي صالح

كلية الادارة والاقتصاد - جامعة بغداد - قسم الاحصاء

المستخلص:

عندما تكون البيانات متجانسة يمكن ان تتمثل بتوزيع احتمالي معين اما اذا كانت غير متجانسة فأنها لا تتبع توزيع احتمالي واحد وانما لكل جزء من البيانات توزيع معين وقد يكون التوزيع نفسه بمعلمات مختلفة او توزيعات مختلفة وفي هذه الحالة يسمى التوزيع بالمختلط (Mixture Distribution). لذلك تبرز اهمية التوزيع المختلط كونه اكثر دقة في حسن المطابقة للبيانات مقارنةً بالتوزيعات الشائعة التي لا تأخذ بنظر الاعتبار عدم تجانس المجتمع، تناول بحثنا توزيع احتمالي مختلط (Two Parameters Mixture Lomax Distribution) وهوَ توزيع احتمالي ناتج من خلط توزيع Lomax مع توزيع Lomax المنحاز طوليا (L.B.W.L.D) ودراسة خصائصه وتطبيق دالة البقاء للتوزيع المختلط باستعمال بيانات حقيقية لعينة من المرضى المصابين بفيروس Covid 19 لإحدى المستشفيات وكذلك مقارنة توزيع Lomax المختلط مع توزيع Lomax وتوزيع (L.B.W.L.D)، وتبين ان توزيع Lomax المختلط اكثر ملائمة من التوزيعات الاخرى وفق معايير المقارنة (AIC,AICc,BIC,HQIC).

الكلمات المفتاحية: توزيع لوماكس المختلط، الانحياز الطولي، توزيع لوماكس، الامكان الاعظم، العزوم.

Abstract:

When the data is homogeneous, it can be represented by a certain probability distribution, but if it is not homogeneous, it does not follow a single probability distribution, but for each part of the data a specific distribution, and the same distribution may have different parameters or different distributions, and in this case it is called a Mixture distribution. Therefore, the importance of the Mixture distribution is that it is more accurate in the goodness of fit of the data compared to the common distributions that do not take into account the heterogeneity of the population. Our research deals with a Mixture probability distribution of Two Parameters Mixture Lomax Distribution, which is a probability distribution resulting from mixing the Lomax distribution with the longitudinally biased Lomax distribution (L.B.W.L.D). And studying its characteristics and applying the survival function to the mixed distribution using real data for a sample of patients infected with Covid 19 virus for a hospital, as well as comparing the Mixture Lomax distribution with the Lomax distribution and the (LBWLD) distribution, and it was found that the Mixture Lomax distribution is more appropriate than the other distributions according to the comparison criteria (AIC, AICc, BIC, HQIC).

Keywords: Mixture Lomax distribution, Length biased, Lomax distribution, Maximum Likelihood, Moment.

1- المقدمة وهدف البحث (Introduction & Objective Research)

يعتبر توزيع (Lomax) نموذج مهم في نظرية البقاء اذ يتم استعماله كنموذج مراقبة في المشاكل الطبية وفي تحليل البيانات المتعلقة بالإحصاءات الحيوية، كما تبرز اهمية التوزيع المختلط باعتبارها اكثر دقة في حسن المطابقة للبيانات الغير متجانسة مقارنةً بالتوزيعات الشائعة التي لاتأخذ بنظر الاعتبار عدم تجانس المجتمع، تطرقنا في هذا البحث الى دراسة بعض الخصائص لتوزيع مختلط ناتج من خلط توزيع (Lomax) الاعتيادي مع توزيع (Lomax) المنحاز طولياً لينتج توزيع (Lomax) المختلط ذو المعلمتين واستعمال طريقة الامكان الاعظم لتقدير المعلمات ودالة البقاء لما لهُ من اهمية في دراسة احتمال بقاء الكائن حي بعد مدة محددة من الزمن. يهدف البحث الى اجراء مقارنة بين التوزيع المختلط والتوزيعين (Lomax) و (Lomax) المنحاز طولياً، وكذلك تطبيق التوزيع المختلط على بيانات حقيقية متمثلة بعينة من المرضى المصابين بفيروس Covid 19.

2- دالة البقاء (Survival Function):

هيَ دالة إحتمالية غير متزايدة ولا يختلف مفهومها الرياضي عن دالة المعولية الأ انها تستعمل في الجوانب الطبية والحياتية، فهيَ احتمال بقاء الكائن حياً بعد الزمن t ويُعبر عنها بالاسلوب الرياضي وفق الصيغة الاتية[9]:

$$S(t) = Pr(T > t) \quad \dots \dots (1)$$

اذ ان:

$S(t)$ دالة البقاء عند الوقت (t) والذي يمثل زمن البقاء ويكون اكبر او مساوي للصفر

وان T هوَ متغير عشوائي مستمر ويمثل الزمن المتراكم.

وان دالة البقاء هيَ دالة متممة لدالة الكثافة التجميعية(Cumulative Distribution Function) ولتكن F(t) فان:

$$\mathrm{F(t) = Pr\ (T \le t)}$$

وان

$$S(t) = 1 - \Pr\ (T \le t)$$

$$S(t) = 1 - F(t) \quad \dots \dots (2)$$

3- توزيع لوماكس (Lomax Distribution)

هوَ توزيع احتمالي مستمر تم استعماله لاول مرة في سنة 1954 من قبل الباحث (Lomax)[8] ويسمى ايضاً بتوزيع باريتو من النوع الثاني (Pareto Type II) وكذلك يسمى بتوزيع بيرسون من النوع السادس (Pearson Type VI)[6] ويعتبر هذا التوزيع احد نماذج الفشل ويستعمل في مشكلات الطب الحياتي (Biomedical Problems) ونماذج الحياة ولهذا التوزيع اهمية في نظرية المعولية يستعمل في دراسات الدخل. فاذا كان المتغير العشوائي t يتبع توزيع (Lomax) فان دالة الكثافة الاحتمالية تكون بالصيغة الاتية:

$$f_1(t) = \frac{q}{b\left[1+\frac{t}{b}\right]^{1+q}} \qquad , t > 0,\ q > 0,\ b > 0 \dots \dots (3)$$

اذ ان:

q : معلمة الشكل(Shape Parameter).

b : معلمة القياس(Scale Parameter).

وان دالة الكثافة التجميعية(C.D.F) لتوزيع (Lomax) تكون بالصيغة الاتية[4]:

$$F_1(t) = \frac{q}{b}\int_0^t (1+\frac{u}{b})^{-(q+1)} du$$

$$F_1(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{b}\right)^{-q} \quad \dots \dots (4)$$

وبالرجوع للمعادلة(2) فان دالة البقاء لتوزيع (Lomax) تكون وفق الصيغة الاتية:

$$S_1(t) = \left(1 + \frac{t}{b}\right)^{-q} \quad \dots \dots (5)$$

وان الوسط الحسابي لتوزيع (Lomax) يكون بالصيغة الاتية[3]:

$$Mean = \frac{b}{q-1} \quad , \quad q > 1$$

اما التباين لتوزيع (Lomax) فيكون بالصيغة الاتية[3]:

$$Varianse = \frac{q\,b}{(q-1)^2(q-2)} \quad , \quad q > 2$$

4- توزيع لوماكس المنحاز طولياً(L.B.W.L.D)

(Length-Biased Weighted Lomax Distribution)

هوَ توزيع احتمالي اقترحه الباحثون (Afaq Ahmad, S. P. Ahmad, A. Ahmed)[5] في عام (2016) وهوَ توزيع مستمر ناتج من تحويل لتوزيع Lomax ذو المعلمتين، فأذا كان المتغير العشوائي t يتبع توزيع Lomax فان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (L.B.W.L.D) تكون وفق الصيغة الاتية:

$$f_2(t) = \frac{t\, f_1(t)}{E(t)} \quad , t > 0 \quad \dots \dots .(6)$$

وبذلك يكون توزيع (L.B.W.L.D) احتمالي اذ ان تكامل هذه الدالة لمجال تعريفها يكون مساوي للواحد وكذلك هيَ دالة موجبة:

$$\int_0^\infty f_2(t)dt = \int_0^\infty \frac{t\, f_1(t)}{E(t)}\, dt = \frac{E(t)}{E(t)} = 1$$

فتكون دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (L.B.W.L.D) بالصيغة الاتية:

$$f_2(t) = \frac{q-1}{b}\, t\, \frac{q}{b\left[1 + \frac{t}{b}\right]^{1+q}}$$

$$f_2(t) = \frac{q(q-1)t}{b^2\left[1 + \frac{t}{b}\right]^{1+q}} \quad , \mathrm{t} > 0, \mathrm{q} > 0, \mathrm{b} > 0 \quad \dots \dots (7)$$

وان دالة الكثافة التجميعية(C.D.F) لتوزيع (L.B.W.L.D) تكون بالصيغة الاتية[5]:

$$F_2(t) = \frac{q(q-1)}{b^2}\int_0^t \frac{u}{\left[1 + \frac{u}{b}\right]^{1+q}}\, du$$

$$F_2(t) = 1 - \left[1 + \frac{q\,t}{b}\right]\left[1 + \frac{t}{b}\right]^{-q} \quad \dots \dots (8)$$

وبالرجوع للمعادلة(2) فان دالة البقاء لتوزيع (L.B.W.L.D) تكون وفق الصيغة الاتية:

$$S_2(t) = \left[1+\frac{q\,t}{b}\right]\left[1+\frac{t}{b}\right]^{-q} \quad \ldots\ldots(9)$$

وان الوسط الحسابي لتوزيع (L.B.W.L.D) يكون بالصيغة الاتية[5]:

$$Mean = \frac{2b}{q-2} \quad , \quad q>2$$

اما التباين لتوزيع (L.B.W.L.D) فيكون بالصيغة الاتية:

$$Varianse = \frac{2\,q\,b^2}{(q-2)^2(q-3)} \quad , \quad q>3$$

5- توزيع لوماكس المختلط (Mixture Lomax Distribution)

هوَ توزيع احتمالي اقترحه الباحثان(Chookait P., Kemmawadee P.)[7] في عام (2018) وهوَ توزيع مستمر ذو معلمتين ناتج من خلط توزيع Lomax ذو المعلمتين مع توزيع (L.B.W.L.D) ، فأذا كان المتغير العشوائي t يتبع توزيع Lomax المختلط فان دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع تكون وفق الصيغة الاتية:

$$f(t) = pf_1(t) + (1-p)f_2(t) \quad ,1>p>0 \quad \ldots\ldots(10)$$

اذ ان:

p : نسبة الخلط، وهيَ نسبة كل المجتمع الجزئي من المجمع الكلي، وفي هذا التوزيع ستكون:

$$p = \frac{b}{b+1} \quad \ldots\ldots(11)$$

$f_1(t)$: دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع Lomax

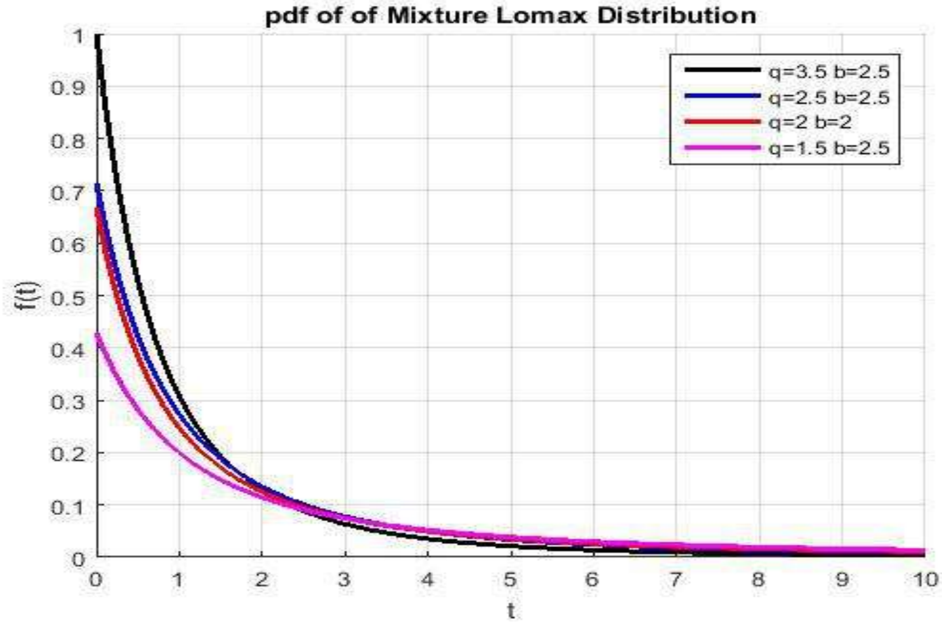
$f_2(t)$: دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (L.B.W.L.D)

ومن المعادلة رقم(3) والمعادلة رقم(7) سيكون:

$$f(t) = \left(\frac{b}{b+1}\right).\frac{q}{b\left[1+\frac{t}{b}\right]^{1+q}} + \left(\frac{1}{b+1}\right).\frac{q(q-1)t}{b^2\left[1+\frac{t}{b}\right]^{1+q}} \quad \ldots\ldots(12)$$

وبعد توحيد المقام ستكون دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع Lomax المختلط ذو المعلمتين بالصيغة الاتية:

$$f(t) = \frac{q(b^2+qt-t)}{(b^3+b^2)(1+\frac{t}{b})^{1+q}} \quad ,t>0, \quad q>0, \quad b>0 \quad \ldots(13)$$

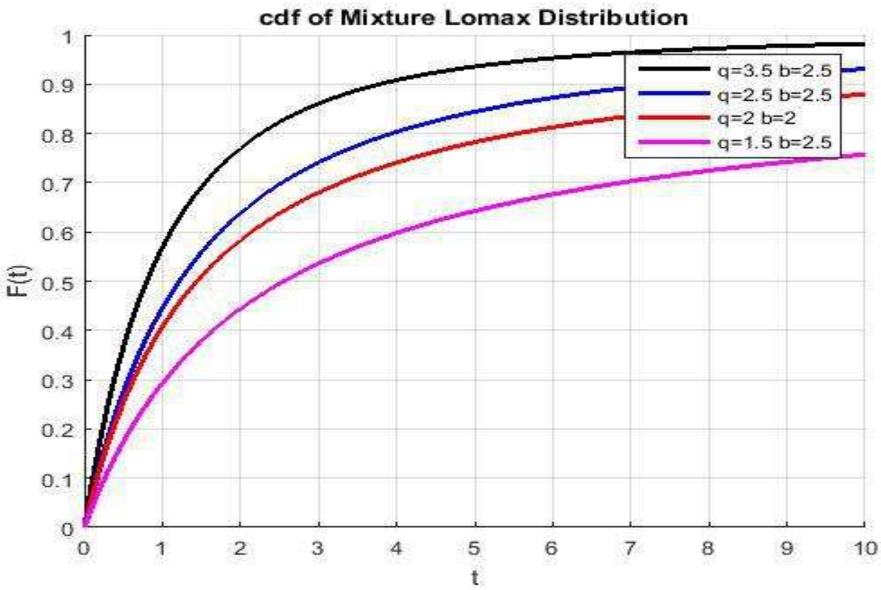


الشكل (1) دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع Lomax المختلط

وان دالة الكثافة التجميعية(C.D.F) لتوزيع Lomax المختلط ستكون بالصيغة الاتية:

$$F(t) = \int_0^t f(u, q, b) du$$

$$F(t) = \frac{1}{b+1}\left[1 + b - \left(1 + b + \frac{q\, t}{b}\right)\left(1 + \frac{t}{b}\right)^{-q}\right] \quad \dots\dots (14)$$

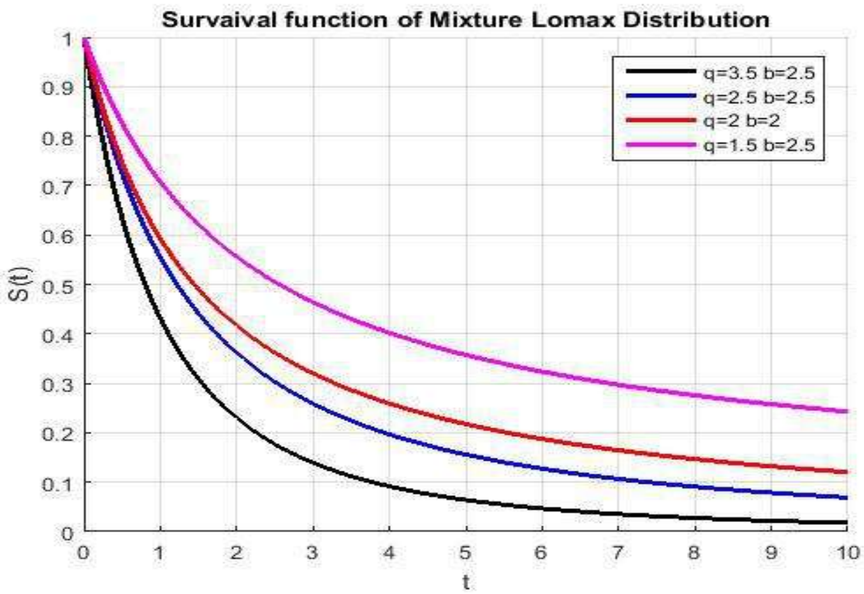


الشكل(2) دالة الكثافة التجميعية(C.D.F) لتوزيع Lomax المختلط

اما دالة البقاء لتوزيع (Lomax) المختلط ستكون بالصيغة الاتية:

$$S(t) = 1 - F(t)$$

$$S(t) = 1 - \left[\frac{1}{b+1}\left[1 + b - \left(1 + b + \frac{q\,t}{b}\right)\left(1 + \frac{t}{b}\right)^{-q}\right]\right] \dots (15)$$



الشكل (3) دالة البقاء لتوزيع (Lomax) المختلط

-6 العزوم حول نقطة الاصل[7] (Moment About Origin)

$$E(t^k) = \int_0^\infty t^k\, f(t,b,q)\, dt$$

$$E(t^k) = \int_0^\infty t^k\, \frac{q(b^2 + q\,t - t)}{(b^3 + b^2)(1 + \frac{t}{b})^{q+1}}\, dt$$

$$= \frac{q}{(b+1)}\int_0^\infty \frac{t^k}{\left(1 + \frac{t}{b}\right)^{q+1}}\, dt + \frac{q(q\ -1)}{(b+1)b^2}\int_0^\infty \frac{t^{k+1}}{\left(1 + \frac{t}{b}\right)^{q+1}}\, dt$$

وباجراء التحويل الاتي :

Let $\left(1 + \frac{t}{b}\right) = x\ \rightarrow\ t = b(x-1)\ ,\ dt = b\ \ dx$

$$E(t^k) = \frac{q}{(b+1)}\int_1^\infty \frac{b^k(x-1)^k}{x^{q+1}}\, b\, dx + \frac{q(q\ -1)}{(b+1)b^2}\int_1^\infty \frac{b^{k+1}(x-1)^{k+1}}{x^{q+1}}\, b\, dx$$

$$E(t^k) = \frac{q\, b^{k+1}}{(b+1)}\int_1^\infty (x-1)^k\, x^{-(q+1)}\, dx + \frac{q(q\ -1)b^k}{(b+1)}\int_1^\infty (x-1)^{k+1}\, x^{-(q+1)}\ \ dx$$

$$E(t^k) = \frac{q\, b^{k+1}}{(b+1)}\int_1^\infty \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k-r}(-1)^r\, x^{-(q+1)}\, dx$$

$$+\frac{q(q\ -1)b^k}{(b+1)}\ \int_1^{\infty}\sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}x^{k+1-r}(-1)^r\ x^{-(q+1)}\ dx$$

$$E(t^k)=\frac{q\ b^{k+1}}{(b+1)}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}(-1)^r\int_1^{\infty}x^{k-r-q-1}\ dx$$

$$+\frac{q(q\ -1)b^k}{(b+1)}\sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}(-1)^r\ \int_1^{\infty}x^{k-r-q}\ dx$$

$$E(t^k)=\frac{q\ b^{k+1}}{(b+1)}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}(-1)^r\left[\frac{x^{k-r-q}}{k-r-q}\right]_1^{\infty}$$

$$+\frac{q(q\ -1)b^k}{(b+1)}\sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}(-1)^r\left[\frac{x^{k-r-q+1}}{k-r-q+1}\right]_1^{\infty}$$

$$E(t^k)=\frac{q\ b^{k+1}}{(b+1)}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}(-1)^{r+1}\ \frac{1}{k-r-q}$$

$$+\frac{q(q\ -1)b^k}{(b+1)}\sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}(-1)^{r+1}\ \frac{1}{k-r-q+1}\ \ldots\ldots(16)$$

ويمكن الحصول على الوسط الحسابي لتوزيع (Lomax) المختلط من العزم الاول بالتعويض في المعادلة رقم (16) عن $k=1$

$$mean=E(t)=\frac{b^2}{(1+b)(q-1)}+\frac{2b}{(1+b)(q-2)}\quad ,\qquad q>2$$

اما التباين لتوزيع Lomax المختلط فيكون بالصيغة الاتية[7]:

$$Var(t)=E(t^2)-[E(t)]^2$$

بالتعويض في المعادلة رقم (16) عن $k=2$ نحصل على:

$$E(t^2)=\frac{2b^3}{(1+b)(q-1)(q-2)}+\frac{6b^2}{(1+b)(q-2)(q-3)}$$

$$Var(t)=\frac{2b^3}{(1+b)(q-1)(q-2)}+\frac{6b^2}{(1+b)(q-2)(q-3)}-\left[\frac{b^2}{(1+b)(q-1)}+\frac{2b}{(1+b)(q-2)}\right]^2\quad ,\qquad q>3$$

7- تقدير المعلمات (Parameters Estimation)

سنستعمل طريقة الامكان الاعظم كونها من اهم الطرائق في عملية التقدير والاكثر استعمالاً بما تتميز بخصائص جيدة كخاصية الاتساق والكفاية وامتلاكها اقل تباين، وتكون اكثر دقة عندما يكون حجم العينة كبير اذ تكون غير متحيزة[2]، وان اسلوب هذه الطريقة هوَ جعل لوغاريتم دالة الامكان الاعظم (Likelihood

(Function التـي يرمـز لهـا بـالرمز (L) عنـد نهايتهـا العظمـى ولغـرض الحصـول علـى مقـدرات الامكـان الاعظـم يـتم اخـذ اللوغـاريتم لدالـة الامكـان الاعظـم ومـن ثـم اجـراء التفاضـل الجزئـي لكـل معلمـة يـراد تقـديرها ومسـاواة الناتج في كل حالة بالصفر[1].

فاذا كانت $t_1, t_2, \dots, t_n$ هيَ مفردات عينـة عشـوائية بحجم n مسـحوبة مـن مجتمـع لـه دالـة كثافـة احتماليـة لتوزيـع (Lomax) المختلط ذو المعلمتين (q , b) فأن دالة الامكان الاعظم (L) تكون بالصيغة الاتية:

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(t_i, q, b) \quad = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{q(b^2 + q\, t_i - t_i)}{(b^3 + b^2)(1 + \frac{t_i}{b})^{1+q}} \right]$$

$$L \ = \frac{q^n \sum_{i=1}^{n}(b^2 + q\, t_i - t_i)}{(b^3 + b^2)^n \sum_{i=1}^{n}(1 + \frac{t_i}{b})^{1+q}} \qquad \dots \dots (17)$$

وبأخذ الـ(ln) للطرفين سنحصل على :

$$\ln \mathrm{L} = n \ln(q) + \sum_{i=1}^{n} \ln\,(b^2 + q\, t_i - t_i) - n \ln\,(b^3 + b^2) - (1+q) \sum_{i=1}^{n} \ln\,(1 + \frac{t_i}{b})$$

وبأجراء التفاضل الجزئي بالنسبة للمعلمات (q,b) نحصل على :

$$\frac{\partial \ln \mathrm{L}}{\partial q} = \frac{n}{q} + \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{(b^2 + q\, t_i - t_i)} - \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \frac{t_i}{b})$$

$$\frac{\partial \ln \mathrm{L}}{\partial \mathrm{b}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2b}{(b^2 + q\, t_i - t_i)} - \frac{n(3b^2 + 2b)}{(b^3 + b^2)} + (1+q) \sum_{i=1}^{n} \frac{b^{-2}}{(1 + \frac{t_i}{b})}$$

وبجعل المشتقات الجزئة مساوية للصفر نحصل على :

$$\hat{q} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{t_i}{\hat{b}}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{(\hat{b}^2 + \hat{q}\, t_i - t_i)}} \qquad \dots \dots (18)$$

$$\frac{n(3\hat{b} + 2)}{(\hat{b} + 1)\hat{b}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2\hat{b}}{(\hat{b}^2 + \hat{q}\, t_i - t_i)} + (1 + \hat{q}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{b}^{-2}}{\left(1 + \frac{t_i}{\hat{b}}\right)} \qquad \dots \dots (19)$$

نلاحظ ان المعادلات (18) و (19) غير خطية وليس لها صـيغة مغلقـة للحـل بسـبب وجـود تـرابط لا خطـي ولا يمكـن الحل بالطرق الاعتيادية وانما تُحل باستعمال احدى الطرق العددية.

وبعد الحصول على تقدير المعلمات بطريقة الامكان الاعظم فأن تقدير دالة البقاء ستكون:

$$\hat{S}_{M.L.E}(t) = 1 - \left[\frac{1}{1 + \hat{b}} \left(1 + \hat{b} - \left(1 + \hat{b} + \frac{\hat{q}t}{\hat{b}}\right) \left(1 + \frac{t}{\hat{b}}\right)^{-\hat{q}} \right) \right] \quad \dots \dots (20)$$

8- البيانات التطبيقية (Numerical Result)

يتم الحصول على البيانات التطبيقية من سجلات المرضى الراقدين في ردهات مركز العزل او من طبلات المرضى الراقدين في شعبة الاحصاء الخاصة بالمستشفى، وتم جمع بيانات لعينة من المرضى المصابين بفيروس(Covid 19) بحجم (98) مشاهدة وللمدة من 2021/1/1 ولغاية 2021/3/28 اذ تم تبويب هذه البيانات وتم الحصول على مدة بقاء المرضى المصابين مقاسة بالاسابيع (t_i) وذلك بطرح تاريخ الدخول من تاريخ الخروج من المستشفى. وكما موضح في الجدول (1).

جدول (1) مدة البقاء مقاسة بالأسابيع للمرضى المصابين بفيروس (Covid 19)

i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i
1	0.143	21	0.571	41	1.000	61	2.000	81	3.571
2	0.143	22	0.571	42	1.000	62	2.143	82	3.571
3	0.143	23	0.571	43	1.000	63	2.143	83	3.714
4	0.143	24	0.571	44	1.143	64	2.286	84	3.714
5	0.286	25	0.571	45	1.143	65	2.286	85	3.714
6	0.286	26	0.571	46	1.143	66	2.429	86	3.714
7	0.286	27	0.571	47	1.286	67	2.429	87	3.714
8	0.286	28	0.714	48	1.286	68	2.571	88	4.000
9	0.286	29	0.714	49	1.286	69	2.714	89	4.143
10	0.286	30	0.714	50	1.429	70	2.714	90	4.143
11	0.286	31	0.714	51	1.571	71	2.714	91	5.143
12	0.286	32	0.857	52	1.571	72	3.143	92	5.429
13	0.429	33	0.857	53	1.571	73	3.429	93	5.714
14	0.429	34	0.857	54	1.571	74	3.429	94	5.714
15	0.429	35	0.857	55	1.571	75	3.429	95	6.143
16	0.429	36	0.857	56	1.571	76	3.429	96	7.143
17	0.429	37	0.857	57	1.714	77	3.429	97	7.429
18	0.571	38	0.857	58	1.857	78	3.429	98	8.000
19	0.571	39	1.000	59	2.000	79	3.571		
20	0.571	40	1.000	60	2.000	80	3.571		

1-8 اختبار ملائمة البيانات (Data Fitting) :

للتأكد من ان البيانات في جدول (1) تتبع توزيع (Lomax) المختلط ذو المعلمتين (TwoParameters Mixture Lomax Distribution) ام لا يتم استعمال اختبار (Chi-square) لحسن المطابقة وبموجب الفرضية الآتية:

H_0: *The data have Two Parameters Mixture Lomax Distribution*

H_1: *The data dont have Two Parameters Mixture Lomax Distribution*

ولاختبار هذه الفرضية الاحصائية سوف يتم احتساب قيمة احصاءة χ^2 وحسب الصيغة الآتية:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad ......(21)$$

وكانت نتائج الاختبار كما في جدول (2) :

جدول (2) نتائج اختبار ملائمة البيانات

Distribution	χ_c^2	χ_t^2	Sig.	Decision
Mixture Lomax	3.9152	5.99	0.1412	Accept H_0

نلاحظ من الجدول (2) ان قيمة χ_c^2 المحسوبة والبالغة (3.9152) اقل من قيمة χ_t^2 الجدولية والبالغة (5.99) عند درجة حرية(df=2) اذ ان عدد الفئات k=5 وان قيمة (Sig=0.1412) وهيَ اكبر من مستوى المعنوية (0.05) وهذا يعني عدم رفض فرضية العدم اي ان البيانات الحقيقية تتوزع وفقاً لتوزيع (Lomax) المختلط .

2-8 المفاضلة بين توزيع Lomax المختلط والتوزيعين Lomax ، (L.B.W.L.D):

يبين جدول (3) نتائج اختبارات حسن المطابقة الأربعة والتي طبقت على البيانات الحقيقية

جدول (3) اختبارات حسن المطابقة

Distribution	AIC	AICc	BIC	HQIC
Mixture Lomax	**54.2412**	**54.3675**	**59.4111**	**10.9573**
L.B.W.L.D	**529.2739**	**529.4002**	**534.4439**	**15.5810**
Lomax	**473.2088**	**473.3351**	**478.3787**	**15.3562**

نلحظ من جدول(3) بان معايير الاختبارات الخاصة بتوزيع (Lomax) المختلط كانت اقل من توزيع (L.B.W.L.D) وتوزيع (Lomax) الاعتيادي, وهذا يدل عن ملائمة بيانات المرضى المصابين بفيروس(Covid_19) لتوزيع (Lomax) المختلط.

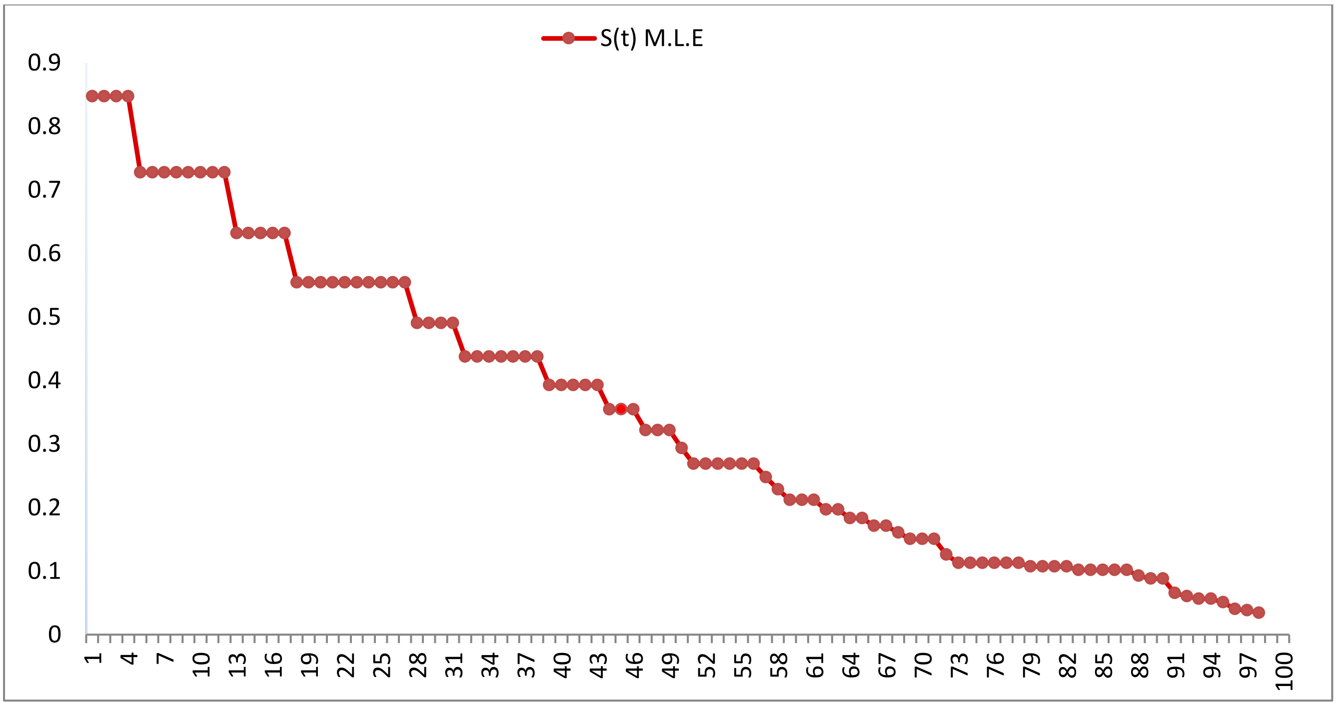
3-8 تحليل البيانات الحقيقية (Real data analysis):

لغرض الحصول على القيم التقديرية للمعلمات ولدالة البقاء كُتب برنامج بلغة(MATLAB)، وتم الحصـول علـى قيم دالة البقاء مقدرة بطريقة(M.L.E) وكذلك تقدير معلمتي التوزيع فكانت قيمة معلمة الشكل (q=2.8191) ومعلمـة القيـاس (b=1.3263) وفقاً لطريقة الامكان الاعظم، وكانت نتائج التقدير كما مبين في الجدول (4):

جدول (4) مدة البقاء بالاسابيع وقيم دالة البقاء المقابلة لها بطريقة الامكان الأعظم (M.L.E) للمرضى المصابين بفيروس (Covid 19)

i	t_i	$S_{(t)}$	i	t_i	$S_{(t)}$	i	t_i	$S_{(t)}$	i	t_i	$S_{(t)}$
1	0.14	0.8473	26	0.57	0.55439	51	1.57	0.26902	76	3.43	0.11299
2	0.14	0.8473	27	0.57	0.55439	52	1.57	0.26902	77	3.43	0.11299
3	0.14	0.8473	28	0.71	0.49055	53	1.57	0.26902	78	3.43	0.11299
4	0.14	0.8473	29	0.71	0.49055	54	1.57	0.26902	79	3.57	0.10723
5	0.29	0.72758	30	0.71	0.49055	55	1.57	0.26902	80	3.57	0.10723
6	0.29	0.72758	31	0.71	0.49055	56	1.57	0.26902	81	3.57	0.10723
7	0.29	0.72758	32	0.86	0.43738	57	1.71	0.24748	82	3.57	0.10723
8	0.29	0.72758	33	0.86	0.43738	58	1.86	0.22849	83	3.71	0.10191
9	0.29	0.72758	34	0.86	0.43738	59	2	0.21167	84	3.71	0.10191
10	0.29	0.72758	35	0.86	0.43738	60	2	0.21167	85	3.71	0.10191
11	0.29	0.72758	36	0.86	0.43738	61	2	0.21167	86	3.71	0.10191
12	0.29	0.72758	37	0.86	0.43738	62	2.14	0.19669	87	3.71	0.10191
13	0.43	0.63197	38	0.86	0.43738	63	2.14	0.19669	88	4	0.09242
14	0.43	0.63197	39	1	0.39259	64	2.29	0.18328	89	4.14	0.08818
15	0.43	0.63197	40	1	0.39259	65	2.29	0.18328	90	4.14	0.08818
16	0.43	0.63197	41	1	0.39259	66	2.43	0.17124	91	5.14	0.06541
17	0.43	0.63197	42	1	0.39259	67	2.43	0.17124	92	5.43	0.06056
18	0.57	0.55439	43	1	0.39259	68	2.57	0.16038	93	5.71	0.05625
19	0.57	0.55439	44	1.14	0.35451	69	2.71	0.15055	94	5.71	0.05625
20	0.57	0.55439	45	1.14	0.35451	70	2.71	0.15055	95	6.14	0.05061
21	0.57	0.55439	46	1.14	0.35451	71	2.71	0.15055	96	7.14	0.04042

22	0.57	0.55439	47	1.29	0.32185	72	3.14	0.12606	97	7.43	0.03809
23	0.57	0.55439	48	1.29	0.32185	73	3.43	0.11299	98	8	0.03401
24	0.57	0.55439	49	1.29	0.32185	74	3.43	0.11299			
25	0.57	0.55439	50	1.43	0.29361	75	3.43	0.11299			



شكل (4) منحنى دالة البقاء المقدرة بطريقة الامكان الأعظم (M.L.E) للمرضى المصابين بفيروس (Covid 19)

من الجدول (4) والشكل (4) يتضح الآتي:

1) ان قيمة دالة البقاء تتناسب عكسياً مع مدة الاصابة فكلما زادت مدة الاصابة انخفضت القيمة الاحمالية لدالة البقاء وهذا يتطابق مع خصائص هذه الدالة، فان المرضى المصابين لمدة يوم واحد يكون احتمال بقائهم (0.8473) والمرضى المصابين لمدة 7 ايام يكون احتمال بقائهم (0.39259) والمرضى المصابين لمدة 28 يوم يكون احتمال بقائهم (0.09242) وهكذا.

2) قيم دالة البقاء تقع ضمن الفترة(0,1) وهيَ قيم متناقصة مع الزمن وبشكل واضح وهذا مايطابق سلوك هذه الدالة كونها متناقصة مع الزمن.

9- الاستنتاجات والتوصيات (Conclusion and Suggestion)

1) ان توزيع (Lomax) المختلط اكثر مرونة وملائمة لبيانات المرضى المصابين بفيروس(Covid_19) مقارنةً بـالتوزيعين الاخرين.
2) ان قيمة دالة البقاء تتناسب عكسياً مع مدة الاصابة فكلما زادت مـدة الاصـابة انخفضـت القيمـة الاحماليـة لدالـة البقـاء وهـذا يتطابق مع خصائص هذه الدالـة، فـان المرضــى المصـابين لمـدة يـوم واحـد يكـون احتمـال بقـائهم (0.8473) والمرضــى المصابين لمدة 7 ايام يكون احتمال بقائهم (0.39259) والمرضى المصابين لمدة 28 يوم يكون احتمال بقائهم (0.09242) وهكذا.
3) قيم دالة البقاء تقع ضمن الفترة(0,1) وهيَ قيم متناقصة مع الزمن وبشكل واضح وهذا مايطـابق سـلوك هـذه الدالـة كونهـا متناقصة مع الزمن.
4) يوصى بالتوسع فـي دراسـة طرائـق تقـدير اخـرى كطرائـق بيـز والطرائـق اللامعلميـة والطرائـق الحصـينة وغيرهـا مـن الطرائق في تقدير المعلمات ودالة البقاء لتوزيع (Lomax) المختلط.
5) يوصى بدراسة تقديرات دالة البقاء الضبابية لتوزيع (Lomax) المختلط ففي بعض الحالات تعاني البيانات من مشكلة عـدم الدقة في قياسها لذلك يكون لها صفة الضبابية (Fuzzy).
6) التوسع في دراسة التوزيعات المختلطة خصوصاً في تقدير دالة البقاء والمخاطرة كون هذه التوزيعات اكثر دقة ومرونة في تمثيل البيانات مقارنةً بالتوزيعات الشائعة.

10- المصادر (References)

1) صالح، احمد علوان (2016)، "طرائق تقدير دالة المخاطرة لتوزيع Quasi-Lindely بحـث مقـارن مـع تطبيـق عملـي"، رسالة ماجستير، كلية الادارة والاقتصاد، جامعة بغداد.
2) الصراف، نزار مصطفى واخرون (2016)، "التقدير الاحصائي"، كتاب، بغداد، مكتبة الجزيرة للطباعة والنشر.
3) فرحان، حلا سلمان (2007)، " مقارنة طرائق تقدير دالة البقاء لتوزيع لوماكس باستخدام عينات مراقبة من النوع الثاني"، رسالة ماجستير، كلية الادارة والاقصاد، جامعة بغداد.
4) ناصـر، جنـان عبـاس (2015)، " مقارنـة خصـائص مقـدرات العـزوم الاحتماليـة الموزونـة مـع العـزوم التقليديـة لتوزيـع Lomax ذي المعلمتين"، مجلة كلية بغداد للعلوم الاقتصادية الجامعة، العدد: 46، ص:(153-194).
5) Afaq Ahmad, S. P. Ahmad and A. Ahmed(2016), "Length-Biased Weighted Lomax Distribution: Statistical Properties and Application", Pakistan Journal of Statistics and Operation Research, Vol. 12, No. 2, pp. 245-255.
6) Ashour S.K., Eltehiwy M.A (2013), "Transmuted Lomax Distribution", American Journal of Applied Mathematics and Statistics, Vol. 1, No. 6, pp. 121-127.

7) Chookait Pudprommarat, Kemmawadee Preedalikit (2018), "A New Mixture Lomax Distribution and Its Application", Suan Sunandha Science and Technology Journal, Vol. 05, No. 1, pp. 12–19.
8) Lomax, K.S. (1954), "Business Failures: Another Example of the Analysis of Failure Data", Journal of the American Statistical Association ,Vol. 49, No. 26, pp. 847-852 .
9) S. James Press (1989), "Bayesian Statistics: Principles, Models, and Applications, John Wiley & Sons, 1st Edition.