

تحديد افضل مقدر خطي بطرق الانحدار الذاتي

الاستاذ المساعد الدكتورة جنان عباس ناصر
الكلية التقنية الادارية - بغداد

المستخلص

في هذا البحث نستعمل طريقة Levinson – Durbin التكرارية التي استعملت من قبل Levinson عام 1947، وأعاد صياغتها فيما بعد Durbin عام 1960، ومقارنتها مع طرق الانحدار الذاتي التي تتضمن طريقة اقل المربعات ومعادلات Yule–Walker وطريقة Burg. لإيجاد أفضل مقدر خطي من البيانات التي تمثل الإنتاج للشركة العامة للصناعات القطنية. واستنتجنا بان طريقة Levinson – Durbin التكرارية تكون الأفضل بين الطرق الأخرى طبقاً لأقل معدل القيم المطلقة لنسب الأخطاء.

مفاتيح الكلمات : عملية الانحدار الذاتي , تقدير اقل المربعات , تقدير Yule–Walker , تقدير Burg , تقدير Levinson – Durbin , معدل القيم المطلقة لنسب الأخطاء.

Abstract

In this study, we use Levinson – Durbin Recurrence which it used by Levinson in 1947, then its reformulation it later by Durbin in 1960, and compare it with Autoregressive Methods which include Least Squares, Yule-Walker equations and Burg methods. To find best linear predictor from the data which is represent the production of State Company for Cotton Industries. We concluded that Levinson – Durbin Recurrence is the best among to the other methods, according to minimum Mean Absolute Percentage Error (MAPE).

Key words: Autoregressive process, Least Squares Estimation, Yule-Walker Estimation, Burg Estimation, Levinson – Durbin Estimation, MAPE.

1. المقدمة

تعد مسألة تحديد أفضل مقدر خطي للسلسلة الاقتصادية من إحدى المشاكل التي تواجه الباحث عند نمذجة السلسلة الاقتصادية. حيث إن دقة التنبؤات المستقبلية بقيم السلسلة الاقتصادية قيد البحث تعتمد حتماً على الأنموذج المقترح تقديره لتلك السلسلة. ومن الشائع عادة استعمال نماذج الانحدار الذاتي من الرتبة p ($AR(p)$) لنمذجة السلاسل الزمنية الاقتصادية والتي تكون على الأغلب سلاسل زمنية بحجوم صغيرة ومتوسطة. وفي نماذج $AR(p)$ يتم تقدير قيمة السلسلة الاقتصادية بالوقت t (X_t) بالاعتماد على مجموعة من المتغيرات المتباطئة زمنياً لنفس السلسلة قيد البحث (X_{t-p}, \dots, X_{t-1}). ولغرض التنبؤ بهذا الأنموذج علينا أولاً ان نضمن جودة تقديره وملائمته للسلسلة الاقتصادية المدروسة. إذ يتم تحديد افضل مقدر خطي لانموذج $AR(p)$ من خلال استعمال عدة طرق لتقدير معاملات الأنموذج ابرزها

- طريقة المربعات الصغرى (OLS) وتسمى ايضا بطريقة التغايريات.
- معادلات Yule–Walker (YW) وتسمى ايضا بطريقة الارتباطات الذاتية.

فضلا عن بعض الخوارزميات التكرارية الشائعة الاستعمال لتقدير نماذج AR(p) المتمثلة

- بطريقة Burg وتسمى أيضا بطريقة (Harmonic-mean)
- وطريقة Levinson-Durbin التكرارية (LDR). المقترح استعمالها لتقدير نماذج الانحدار الذاتي للسلاسل الزمنية ضعيفة الاستقرار. التي سميت بهذا الاسم نسبة للباحث Levinson الذي استعملها لأول مرة عام 1947 , ومن ثم اعاد صياغتها فيما بعد Durbin عام 1960.

أذ تعتمد طريقة Burg و LDR على حساب معاملات الارتباط الذاتي للعينة, ومن ثم تقدير معاملات النموذج AR(p) بشكل تكراري. وهنا لا يتطلب حساب معكوس مصفوفة التغيرات او مصفوفة الارتباطات الذاتية كما هو الحال عند استعمال طريقة تقدير OLS, واستعمال طريقة تقدير YW وعلى التوالي. والتي سيرد شرح تلك الطرائق المتقدم ذكرها لاحقا, لأنها استخدمت في عملية تحليل بيانات الشركة العامة للصناعات الصوفية, لغرض تحديد افضل مقدر خطي للتنبؤ بكمية الانتاجها.

وبناء على ماتقدم فان هدف البحث يتمثل في تحديد افضل مقدر خطي بطرق الانحدار الذاتي المتمثلة بطريقة اقل المربعات ومعادلات Yule-Walker و طريقة Burg ومقارنتها مع طريقة Levinson - Durbin التكرارية (LDR) المقترح استعمالها لتقدير نماذج الانحدار الذاتي للسلاسل الزمنية ضعيفة الاستقرار. وقد كانت عملية البحث عن افضل مقدر خطي للتنبؤ بكمية الانتاج على مرحلتين وكما يلي:

المرحلة الاولى: استعملت طريقة OLS و YW و Burg لتقدير معاملات المقدر الخطي للسلسلة الزمنية قيد البحث ولكل التحويلات المقترح استعمالها للسلسلة الاقتصادية (كمية الانتاج) للحصول على سلسلة زمنية مستقرة بالمتوسط والتباين. وقد استعمل معيار AIC(p) لتحديد الرتبة المثلى (p) للمقدر الخطي المناظرة لاقل قيمة من قيم المعيار ضمن مجموعة قيم ل p, وصيغة حسابه تكون على وفق الاتية [1]:

$$AIC(p) = \ln(\hat{\sigma}^2) + 2p/n \quad \dots (1)$$

حيث ان p تمثل عدد المعلمات المقدرة لأنموذج AR(p) و n تمثل حجم العينة. إما $\hat{\sigma}^2$ فيمثل تباين الضوضاء المقدرة لأنموذج, ويتم حسابه بالاعتماد على الفرق بين القيمة المشاهدة (x_t) والقيمة التقديرية (\hat{x}_t) للسلسلة الزمنية عند الوقت t, أي إن

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{t=1}^n (x_t - \hat{x}_t)^2 / n \quad \dots (2)$$

ومن ثم حساب قيمة المعيار الاحصائي المتمثل بمعدل القيم المطلقة لنسب الاخطاء (Mean Absolute Percentage Error (MAPE(P)) لقياس دقة التنبؤ والذي يحتسب على وفق الصيغة الاتية [2,3]:

$$MAPE = n^{-1} \sum_{t=1}^n |x_t - \hat{x}_t| / x_t \quad \dots (3)$$

ويمكن ان تضرب قيمة MAPE في 100, فاذا كانت القيمة المئوية لـ MAPE اقل من 10% فان دقة نموذج التنبؤ تكون عالية جدا, واذا كانت القيمة المئوية لـ MAPE تتراوح 10%-20% فان دقة نموذج التنبؤ تكون جيدة, اما اذا القيمة المئوية لـ MAPE تتراوح 20%-50% فان دقة نموذج التنبؤ تكون معقولة او مقبولة, وتعد دقة نموذج التنبؤ الاسوء عندما تكون القيمة المئوية لـ MAPE اكثر من 50% .

اما المرحلة الثانية: فقد استعملت طريقة Levinson-Durbin التكرارية (LDR) مع طرائق التقدير المتقدم ذكرها في المرحلة الاولى (طريقة OLS و YW و Burg) لتقدير معاملات المقدرالخطي للسلسلة الزمنية. والمقارنة بين قيم مقدرات معاملات المقدرالخطي للسلسلة الزمنية الاصلية (بدون اجراء اية تحويلات للاستقرارية). اذ تم تحديد الرتبة المثلى (p) للمقدرالخطي المناظرة لاقل قيمة من قيم المعيار الاحصائي المتمثل بمعدل القيم المطلقة لنسب الاخطاء ((MAPE(P)) ضمن مجموعة قيم لـ p.

2. تقديرانموذج الانحدارالذاتي

اذ يمكن تقديرانموذج الانحدارالذاتي من الرتبة p لـ n من المشاهدات سحبت من عملية عشوائية X_t عندما تكون $t=1,2,\dots,n$ باستعمال الصيغة الاتية [1]:

$$x_t = -\sum_{i=1}^p a_i x_{t-i} + e_t \dots (4)$$

ويمكن كتابة الصيغة (4) على وفق الصيغة $e_t = A(B)x_t$, حيث ان

$A(B) = 1 + a_1 B + a_2 B^2 + \dots + a_p B^p$ وتمثل حد الخطاء الذي يكون سلسلة من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتطابقة التوزيع بمتوسط صفرو تباين مقداره σ^2 وتقديره يمثل قوة خطأ التقريب للمقدرالخطي في الصيغة (1) من الرتبة p. وان B^i تمثل معامل الارتداد الخلفي, اي ان $B^i x_t = x_{t-i}$. ويعد انموذج AR(p) مستقر, اذا كانت القيمة المطلقة لمجموع قيم معاملات الانموذج اقل من الواحد اي ان $|\sum_{i=1}^p a_i| < 1$. فأذا تم معاملة الصيغة (4) كنظام خطي عندما تكون e_t الـ input وان الـ x_t تمثل الـ output, لذا فان دالة الانتقال الملائمة لهذا النظام تكون على وفق الصيغة الاتية [1]:

$$H(B) = 1/A(B) \dots (5)$$

وتسمى الصيغة (5) بانموذج الانحدارالذاتي او all-pole. وفيما يلي شرح طرق تقديرانماذج AR(p).

2.1 طريقة أقل المربعات (Least Squares)

تعد طريقة أقل المربعات من ابرز الاساليب الشائعة الاستعمال لتقديرالصيغة (4), اذ يتم تصغير مجموع مربعات

الخطاء $(\sum_{t=1}^n e_t^2)$ عندما تكون $e_t = (x_t - \hat{x}_t)$, وتمثل (\hat{x}_t) المقدرالخطي للتنبؤ من الرتبة p وهي

مساوية لـ $\hat{x}_t = -\sum_{i=1}^p \hat{a}_i x_{t-i}$ ، أذ يتم تصغير خطأ التنبؤ الامامي بمعنى أقل المربعات. وهذا مطابق لحل المعادلات الطبيعية وفق الاتي [5,3]:

$$\Gamma_p \underline{a}_p = -\underline{\gamma}_p \quad \dots(6)$$

وتعرف Γ_p بالصيغة :

$$\Gamma_p = \sum_{t=p+1}^n \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{t-p} \end{pmatrix} (x_{t-1}, \dots, x_{t-p})$$

وان $\underline{a}_p^T = (a_1, \dots, a_p)$ يمثل متجه المعلمات انموذج $AR(p)$ من الرتبة $p \times 1$. وتعرف $\underline{\gamma}_p$ على وفق الصيغة الاتية:

$$\underline{\gamma}_p = \sum_{t=p+1}^n x_t \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{t-p} \end{pmatrix}$$

اما تقديرتباين الضوضاء (σ_p^2) او متوسط مربعات الخطاء (MSE) فيكون على وفق الصيغة الاتية:

$$\sigma_p^2 = n^{-1} \sum_{t=p+1}^n (x_t - \hat{x}_t)^2 \quad \dots(7)$$

2.2 معادلات Yule-Walker

عند تقدير معلمات أنموذج AR من الرتبة p التي تعطي اصغر متوسط لمربع خطأ التنبؤ اعتمادا على قيم x_{t-1}, \dots, x_{t-p} ، يكون من الملائم عادة ربط معلمات الانموذج بدالة الارتباط الذاتي $(R(k))$ المستحصلة من متابعة البيانات x_t . وفقا لحل معادلات Yule-Walker اي [1,6,5]، يتم الحصول على معادلات YW بضرب طرفي الصيغة (4) بـ x_{t-k} وادخال التوقع (E) على طرفيها والقسمة على γ_0 نحصل على مايلي :

$$\left. \begin{aligned} R(k) &= -\sum_{i=1}^p a_i R(k-i) , \quad \forall k=1,2,\dots,p \\ R(0) &= -\sum_{i=1}^p a_i R(-i) + \sigma^2 , \quad k=0 \end{aligned} \right\} \dots(8)$$

ويمكن اعادة كتابة معادلات Yule-Walker المدونة في الصيغة (8) بصيغة مصفوفة ومتمجه كالآتي:

$$R_p \underline{a}_p = -\underline{r}_p \quad \dots(9)$$

وتكون المصفوفة R_p من الرتبة $(p+1) \times (p+1)$ وتعرف كل من \underline{a}_p و \underline{r}_p وفق الصيغة الآتية :

$$R_p = \begin{pmatrix} R(0) & R(-1) & R(-2) & \dots & R(-p+1) \\ R(1) & R(0) & R(-1) & \dots & R(-p+2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R(p-1) & R(p-2) & R(p-3) & \dots & R(0) \end{pmatrix}, \underline{a}_p = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_p \end{pmatrix}, \underline{r}_p = \begin{pmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ R(p) \end{pmatrix}$$

اي تكون كتابة معادلات Yule-Walker المدونة في الصيغة (9) على وفق الصيغة الآتية :

$$\begin{pmatrix} R(0) & R(-1) & R(-2) & \dots & R(-p+1) \\ R(1) & R(0) & R(-1) & \dots & R(-p+2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R(p-1) & R(p-2) & R(p-3) & \dots & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ R(p) \end{pmatrix} \quad \dots(10)$$

حيث ان مصفوفة الارتباطات الذاتية (R_p) تكون مصفوفة Hermitian اي ان $R_p^H = R_p$ من الرتبة $(p+1) \times (p+1)$, وتكون مصفوفة Toeplitz (اي ان قيم العناصر على طول قطر المصفوفة تكون متساوية) وان عناصرها تمثل قيم معاملات الارتباط الذاتية (ACF) المتحيزة للعينة عند الازاحة k ($Lag(k)$), وتحتسب على وفق الصيغة الآتية :

$$\hat{R}(k) = \hat{\gamma}(k) / \hat{\gamma}(0), \quad k = 0, 1, \dots$$

حيث ان $R(k) = R(-k)$. اما صيغة حساب دالة التغاير الذاتية للعينة عند $Lag(k)$ تكون على وفق الآتي:

$$\hat{\gamma}(k) = (1/n) \sum_{t=k+1}^n (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x}), \quad k = 0, 1, \dots$$

ويتعويض قيم دالة الارتباط الذاتي للعينة بالصيغة (10) ثم حلها بالنسبة لمقدر المعلمة a_p اي (\hat{a}_p) على وفق الصيغة :

$$\hat{\mathbf{a}}_p = -\mathbf{R}^{-1}_p \mathbf{r}_p \quad \dots(11)$$

بعد استحصال المعلمات انموذج AR(p), يمكن

$$\hat{\sigma}_p^2 = \gamma(0) + \sum_{i=1}^p \hat{a}_i \hat{\gamma}(i) \quad \dots(12)$$

تقدير تباين الضوضاء على وفق الصيغة :

2.3 طريقة Burg

وتسمى هذه بالطريقة بطريقة الوسط التوافقي , وهي عبارة عن طريقة تكرارية تهدف لأيجاد سلسلة من القيم التي تمثل دالة الارتباط الذاتي الجزئية (PACF) التجريبية التي تسمى بمعلمة الانعكاس. في كل مرحلة من المراحل التكرارية تستحصل معلمات AR من المعلمات الانعكاسية المستحصلة ومن معلمات AR المولدة بالمرحلة السابقة. وتشارك هذه الطريقة في ادائها مع طريقة Durbin-Levinson بتوليد تقديرات Yule-walker بصورة تكرارية. إذ ان طريقة Yule-walker تحدد قيم معلمات AR التي تصغر مجموع مربعات أخطاء التنبؤ بخطوة واحدة للامام. وتعتمد هذه الطريقة على سلسلة دوال المعيار التي تحدد لتقدير معلمات الانعكاس المتعاقب. وتحدد الطريقة في المرحلة m (mth) معلمة الانعكاس التي تصغر مجموع مربعات اخطاء التنبؤ الامامية والخلفية وفق الصيغة الاتية [1,6,7] :

$$S(m) = \sum_{t=1}^{n-1} \{e_t^2(m) + b_t^2(m)\} \quad \forall \quad m = 1, 2, \dots, p \quad \dots(13)$$

وتعرف تلك الاخطاء كالاتي

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_t(p) &= \mathbf{x}_t + \sum_{i=1}^p \mathbf{a}_i \mathbf{x}_{t-i} \\ \mathbf{b}_t(p) &= \mathbf{x}_t + \sum_{i=1}^p \mathbf{a}_i \mathbf{x}_{t+i} \end{aligned} \right\} \dots \quad (14)$$

$$\dots \quad (15)$$

وبالاعتماد على تصغير معدل الاخطاء الامامية والخلفية، وباستعمال مجموعة معادلات Lattice filter التكرارية

لقيم $m=1, 2, \dots, p$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_t(m) &= \mathbf{e}_t(m-1) + k_m \mathbf{b}_{t-1}(m-1) \\ \mathbf{b}_t(m) &= k_m \mathbf{e}_t(m-1) + \mathbf{b}_{t-1}(m-1) \end{aligned} \right\} \dots(16)$$

وبتعويض قيمة كل من $\mathbf{e}_t(p)$ و $\mathbf{b}_t(p)$ (الصيغة (16)) في الصيغة (13) واشتقاقها بالنسبة لمعاملة الانعكاس (k_m) ومساواتها بالصفر اي ان $(\partial S(m)/\partial k_m) = 0$ نحصل على تقدير معلمات الانعكاس (k_m) , وعلى وفق الصيغة الاتية :

$$k_m = -([\sum_{t=1}^{n-1} \{e_t(m-1) \mathbf{b}_{t-1}(m-1)\}] / [\sum_{t=1}^{n-1} \{e_t^2(m-1) + \mathbf{b}_{t-1}^2(m-1)\}]) \quad \dots(17)$$

حيث ان عملية التقدير تعتمد بالاساس على تقدير معلمات الانعكاس (k_m) والتي تحقق خاصية الثبات اي ان $|k_m| \leq 1$. وتستحصل معلمات AR من المعلمات الانعكاسية المستحصلة ومن معلمات AR المولدة بالمرحلة السابقة. إذ تشارك هذه الطريقة في ادائها مع طريقة Durbin-Levinson التكرارية , وتبدأ كالاتي :

$$\left. \begin{aligned} a_0(0) &= 1 \\ a_m(m) &= k_m, \quad m=1,2,\dots,p \\ a_m(k) &= a_{m-1}(k) + k_m a_{m-1}(m-k), \quad k=1,2,\dots,m-1 \end{aligned} \right\} \dots(18)$$

2.4 طريقة Levinson-Durbin التكرارية

تعتمد هذه الطريقة على حساب قيم دوال الارتباط الذاتي (no normalization) غيرالمتحيزة المقدره من

العينة $(\hat{R}(k), k=1,2,\dots,p)$ للسلسلة الزمنية $\{x_t\}$ عندما تكون $t=1,2,\dots,n$. وتكون صيغة حسابها على وفق الاتي :

$$\hat{R}(k) = (1/(n-k)) \sum_{t=k+1}^n x_t x_{t-k}, \quad k=0,1,\dots,p, \dots(19)$$

اذ يتم تقدير معلمات انموذج الانحدار الذاتي (المقدر الخطي) من الرتبة p بطريقة تكرارية, وتمتاز هذه الطريقة بكونها تقدر كل قيم المعلمات الأنموذج $AR(p)$ الدنيا (اي يتم تقدير قيم معلمات انموذج $AR(1)$ و $AR(2)$ ولغاية $AR(p)$ مرة واحدة, مع حساب قيمة متوسط مربعات الخطاء (MSE) ويرمز له بـ ρ_k وتبدأ هذه الطريقة على وفق الخطوات الاتية [6,8]:

$$1. \text{ بجعل قيمة } a_0 = 1, \text{ وكذلك قيمة } \hat{R}(0)$$

$$2. \text{ وبذلك فان قيمة معلمة الانعكاس } a_{11} = -\hat{R}(1)/\hat{R}(0), \text{ وكذلك قيمة } \rho_1 = (1 - |a_{11}|^2) \hat{R}(0)$$

3. ثم حساب معاملات الانعكاس لـ k عندما تكون $k=0,1,\dots,p$ على وفق الصيغة الاتية :

$$a_{kk} = -[\hat{R}(k) + \sum_{i=1}^{k-1} a_{k-1,i} \hat{R}(k-i)] / \rho_{k-1}, \dots(20)$$

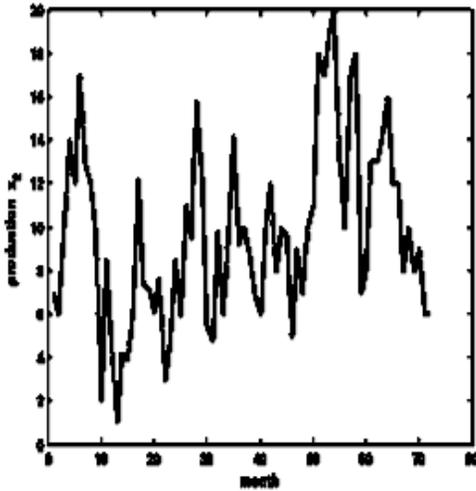
وحساب قيم معلمات انموذج $AR(p)$ على وفق الصيغة الاتية:

$$a_{p,k} = a_{p-1,k} + a_{k,k} a_{p-1,p-k}^*, \quad \forall k=0,1,\dots,p \quad \dots(21)$$

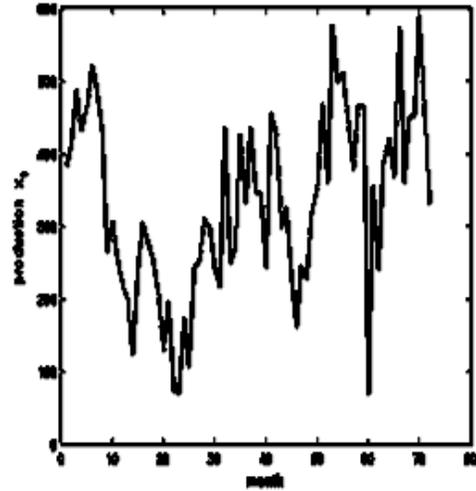
ان الاشارة (*) تعني complex conjugate , أي قيمة المعلمة في المرحلة التكرارية السابقة وان

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_{p,k} &= 1, \quad k=0 \\ \hat{a}_{p,k} &= -a_{p,k}, \quad k=1,2,\dots,p. \end{aligned} \right\} \dots(22)$$

بالوسط الحسابي والوسيط واكبر/ اقل قيمة والانحراف المعياري والالتواء والتقلطح والمجموع وكذلك مجموع المربعات وعدد المشاهدات لكل سلسلة زمنية ($n=72$)، وقد لخصت النتائج مما تقدم ذكره في جدول (1).



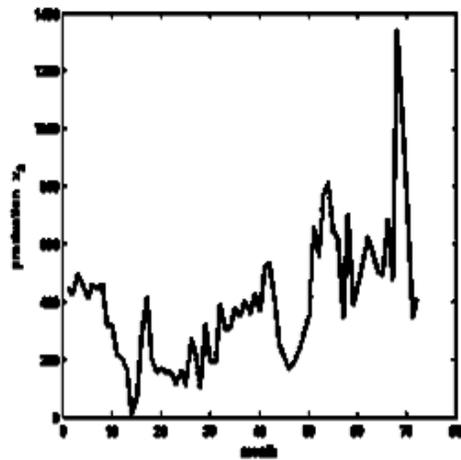
شكل (2 - 1) يوضح كمية الإنتاج الشهري من القطن الطيب (طن) (X_2).



شكل (1-1) يوضح كمية الإنتاج الشهري من الأقمشة القطنية (إلف م²) (X_1).

جدول (1) يبين الإحصاءات الأساسية لكل سلسلة من السلاسل الثلاث (X_1, X_2, X_3) قيد البحث.

Series	X_1	X_2	X_3
Basic Statistics			
Mean	332.4	9.705	393.861
Median	330.5	9.553	375
Maximum	588	20	1339
Minimum	69	1	11
Std Dev	126.7	4.189	225.722
Skewness	-0.1085	0.44005	1.37415
Kurtosis	-0.61799	-0.165121	3.6183
Sum	23936	698.755	28358
Sum of Squares	9097800	8027.54	14786600
No. of Observations	72	72	72



شكل (1-3) يوضح كمية الإنتاج الشهري من لغافات شاش (إلف م²) (X_3).

وقد قيمة معامل الالتواء تعطي فكرة عن شكل وهيئة التوزيع التكراري واتجاه التكرارات لقيم سلسلة البيانات، حيث إن القيمة المطلقة لمعامل الالتواء تعني درجة الالتواء، وكلما ابتعدت تلك القيمة عن الصفر دل على حدة التواء التوزيع، فقد كانت حدة التواء السلسلة X_3 أكبر مقارنة بحدّة التواء السلسلتين X_1 و X_2 . أما الإشارة المرافقة لمعامل

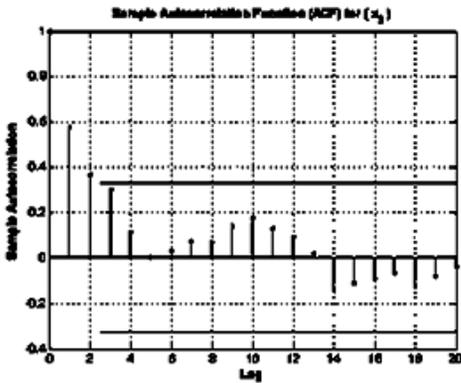
الالتواء فتعني جهة التواء التوزيع التكراري , فإذا كانت موجبة فيعني ذلك التواء التوزيع نحو جهة اليمين وكما هو الحال للسلسلتين X_2 و X_3 , في حين يكون التواء التوزيع التكراري للسلسلة X_1 نحو جهة اليسار .

ومقياس معامل التقاطح يبين مقدار تسطح أو تدبب المنحني التكراري لقيم لسلسلة البيانات, وباعتماد على وفق مقياس معامل التقاطح اقل من (3) , فيقال بان المنحني التكراري يكون مسطح , إي إن قيم سلسلة البيانات تكون ذات تشتت عالي كما هو الحال لقيم السلسلتين X_1 و X_2 . في حين يكون المنحني التكراري مدبب على وفق مقياس اكبر قيمة من (3) , وقيم سلسلة البيانات تكون ذات تشتت واطئ كما هو الحال لقيم السلسلة X_3 .

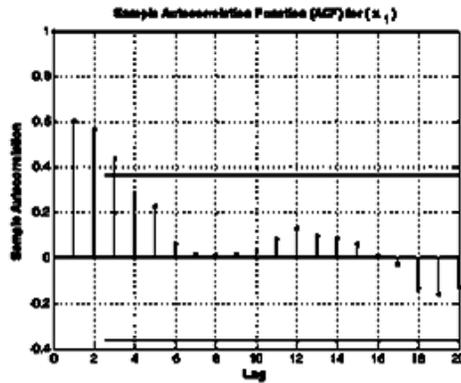
ثانياً : لمعرفة فيما إذا كانت كل سلسلة من السلاسل الزمنية الثلاثة (X_1, X_2, X_3) مستقرة ام لا. فقد استعمل Matlab لرسم قيم دالة الارتباط الذاتي (ACF) لكل سلسلة انظر الإشكال (2-1,2,3) المبينة أدناه. والتي يتبين منها بان السلاسل الزمنية قيد البحث غير مستقرة, حيث إن قيم معاملات الارتباط الذاتي لا تقترب من إلى الصفر بسرعة بعد الإزاحة الأولى والثانية. لذا سيتم استعمال سلسلة الفروق لإزالة الاتجاه العام عندما تكون السلسلة غير مستقرة بالمتوسط [3], إي تكون على وفق الصيغة $\nabla^d x_t = (1-B)^d x_t, d = 1, 2$, حيث إن B يمثل معامل الارتداد الخلفي. ولذا فان سلسلة الفرق $d=1$ تكون على وفق الآتي $\nabla^1 x_t = (1-B)^1 x_t = x_t - x_{t-1}$ وان سلسلة الفرق $d=2$ تكون على وفق الآتي

$$\nabla^2 x_t = (1-B)^2 x_t = (1-2B+B^2) x_t = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}$$

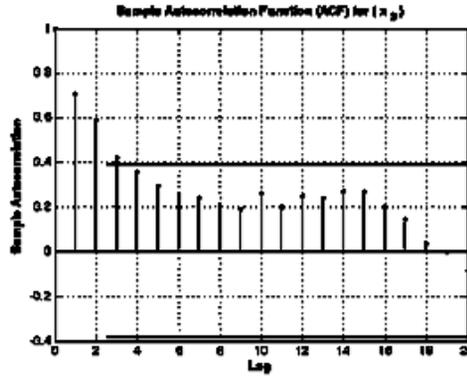
فضلا عن إجراء تحويلات الاستقرارية المقترحة من قبل Box & Cox عام 1964 [3]. وقد تم إجراء التحويلات للسلسلة الاصلية عندما تكون معلمة التحويل مساوية لـ $-1, -0.5, 0, 0.5$, وعلى وفق الصيغة الآتية:



شكل (2-2) يوضح دالة الارتباط الذاتي للسلسلة (X_2) .



شكل (2-1) يوضح دالة الارتباط الذاتي للسلسلة (X_1) .

شكل (2-3) يوضح دالة الارتباط الذاتي للسلسلة (X_3) .

إجراء تحويل لكل سلسلة $(x_i, i=1,2,3)$ عندما تكون معلمة التحويل λ مساوية لـ $\lambda = -1, -0.5, 0, 0.5$ وبذلك تكون قيم السلسلة الجديدة وحسب قيمة λ كالآتي :

1. عندما تكون $\lambda = -1$ تصبح السلسلة $(1/x_i, i=1,2,3)$

2. عندما تكون $\lambda = -0.5$ تصبح السلسلة $(1/\sqrt{x_i}, i=1,2,3)$

3. عندما تكون $\lambda = 0$ تصبح السلسلة $(\ln(x_i), i=1,2,3)$

4. عندما تكون $\lambda = 0.5$ تصبح السلسلة $(\sqrt{x_i}, i=1,2,3)$

ثالثا : وقد تم استعمال طرائق تقدير نماذج الانحدار الذاتي $(AR(P))$ وتحديد أفضل نموذج (على وفق

مقياس الرتبة الأمثل المثلى (p) ومن ثم تحديد أفضل طريقة تقدير من بين طرق التقدير وهي طريقة OLS و Burg و YW. بالاعتماد على مقياس اقل قيمة لمعيار $AIC(p)$ لتحديد الرتبة المثلى p والذي يحسب على وفق الصيغة (1). وقد تم تقدير نماذج $AR(p)$ للرتب p ضمن المدى $p = [1 - \max p]$, حيث إن $\max p = [2\sqrt{n}]$ وان $n=72$, إي إن اكبر رتبة يتم تقديرها مساوية لـ $\max p = [2\sqrt{n}] = 17$ للقيم الأصلية لكل سلسلة زمنية قيد البحث.

إي تقدير أنموذج $AR(1)$ و $AR(2)$, ..., $AR(17)$. ووفقا لطرق التقدير المتقدم ذكرها ولكل السلاسل الزمنية

قيد البحث مع التحويلات المقترحة استعمالها للحصول على سلسلة زمنية مستقرة. وقد لخصت النتائج مما تقدم ذكره في جدول (2).

جدول (2) يبين الرتبة المثلى (p) المناظرة لأقل قيمة من قيم معيار AIC عند الرتبة p ضمن المدى [1-17]، ووفقا لكل طريقة من طرائق تقدير نماذج الانحدار الذاتي، و لكل سلسلة من السلاسل الزمنية (x₁, x₂, x₃) (الأصلية مع التحويلات المقترحة لاستقرارية السلسلة)، أي لسلسلة الفروق d = 1, 2 وتحويلات Box & Cox عندما تكون قيمة λ مساوية لـ λ = -1, -0.5, 0, 0.5.

Method	OLS		YW		Burg	
	p	AIC	p	AIC	p	AIC
x ₁	2	9.2656	2	9.2937	2	9.2657
∇x ₁	1	9.2494	1	9.2487	1	9.2494
∇ ² x ₁	4	9.556	4	9.5533	4	9.5572
1/x ₁	2	-11.953	2	-11.956	2	-11.953
1/√x ₁	2	-8.334	2	-8.3262	2	-8.3337
ln(x ₁)	2	-1.763	2	-1.5283	2	-1.7628
√x ₁	2	2.2595	2	2.3510	2	2.2595
x ₂	3	2.6281	3	2.6267	3	2.6282
∇x ₂	2	2.6159	9	2.595	2	2.6160
∇ ² x ₂	16	2.7196	16	2.6618	12	2.7974
1/x ₂	17	-6.3604	17	-5.9184	16	-5.7826
1/√x ₂	13	-5.5547	17	-5.2384	16	-5.2068
ln(x ₂)	13	-1.9155	14	-1.6496	13	-1.7914
√x ₂	13	-1.0157	4	-0.8935	13	-0.9652
x ₃	2	10.253	2	10.2519	2	10.253
∇x ₃	1	10.248	1	10.2468	1	10.248
∇ ² x ₃	16	10.457	16	10.4451	16	10.532
1/x ₃	16	-13.964	17	-13.192	17	-12.510
1/√x ₃	16	-9.2423	17	-8.7195	17	-8.717
ln(x ₃)	16	-1.7035	17	-1.4237	16	-1.6016
√x ₃	2	2.7724	2	2.7819	2	2.7725

Note: العمليا الملاحظة تعني أقل قيمة لمعيار AIC مع الرتبة المناظرة لها (p).

واعتمادا على معيار أقل قيمة من قيم معيار AIC عند الرتبة p ضمن المدى p=[1-17] للمفاضلة بين التحويلات المقترحة لكل سلسلة زمنية، فضلا عن تحديد أفضل طريقة تقدير (Burg, YW, OLS)، نلاحظ من الجدول (2) بان

1. تحويل Box & Cox يكون التحويل الأمثل عندما تكون $\lambda = -1$ ، أي $1/x_i$ ولكل قيم $i=1,2,3$.
2. طريقة YW تعد أفضل طريقة تقدير للسلسلة الزمنية $1/x_1$ ، وان الرتبة المثلى للأنموذج AR المقترح تكون مساوية لـ $p=2$.
3. طريقة OLS تعد أفضل طريقة تقدير للسلسلة الزمنية $(1/x_2)$ و $(1/x_3)$ ، وان الرتبة المثلى للأنموذج AR المقترح للسلسلة الزمنية $(1/x_2)$ تكون مساوية لـ $p=17$ ، إما الرتبة المثلى للسلسلة الزمنية $(1/x_3)$ فتكون مساوية لـ $p=16$.

وبناء على ما تقدم فقد تم تقدير قيم المعلمات المقدرة $(\hat{a}_i, i=1,2,\dots,p)$ التي تحقق شرط الاستقرارية للأنموذج أي ان $|\sum_{i=1}^p a_i| < 1$ [4] ولكل سلسلة زمنية $(1/x_i, i=1,2,3)$ عند الرتبة المثلى (p)

لأنموذج AR(p) مع قيمة تباين الضوضاء المقدرة ($\hat{\sigma}^2$) فضلا عن حساب قيمة المعيار الاحصائي MAPE(p) على وفق الصيغة (3) بطريقة التقدير الأمثل. وقد لخصت النتائج مما تقدم ذكره في جدول (3).

جدول (3) يبين قيم المعلمات المقدرة ($\hat{a}_i, i = 1, 2, \dots, p$) لأنموذج AR(p) وقيمة تباين الضوضاء المقدرة ($\hat{\sigma}^2$) مع قيمة MAPE(p) عند الرتبة الأمثل (p)، ووفقا لأفضل طريقة تقدير لكل سلسلة من السلاسل الزمنية الثلاثة ($1/x_1, 1/x_2, 1/x_3$) قيد البحث.

Series	Method	p	$(\hat{a}_i, i = 1, 2, \dots, p)$				$\hat{\sigma}^2$	MAPE
$1/x_1$	YW	2	\hat{a}_1	\hat{a}_2			$6.09824e^{-6}$	1.963
			0.491	0.3949				
$1/x_2$	OLS	17	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{a}_4	0.001078	2.0362
			0.4011	0.1878	0.2868	-0.08976		
			\hat{a}_5	\hat{a}_6	\hat{a}_7	\hat{a}_8		
			-0.00524	-0.7146	0.09027	0.0166		
			\hat{a}_9	\hat{a}_{10}	\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}		
			0.2223	-0.0362	-0.0917	-0.01335		
			\hat{a}_{13}	\hat{a}_{14}	\hat{a}_{15}	\hat{a}_{16}		
			0.01742	-0.03065	-0.01034	-0.02122		
			\hat{a}_{17}					
0.09205								
$1/x_3$	OLS	16	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{a}_4	$5.5279e^{-7}$	2.0443
			0.7661	0.00951	-0.00917	0.02665		
			\hat{a}_5	\hat{a}_6	\hat{a}_7	\hat{a}_8		
			0.0213	0.00267	0.01331	0.01088		
			\hat{a}_9	\hat{a}_{10}	\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}		
			0.03242	-0.01403	0.04211	-0.04743		
			\hat{a}_{13}	\hat{a}_{14}	\hat{a}_{15}	\hat{a}_{16}		
0.016	0.05934	-0.06211	0.0320					

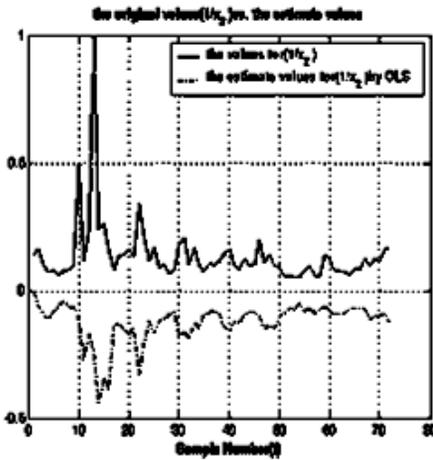
وبالاعتماد قيمة على قيمة MAPE المئوية (اي قيمة MAPE مضروبة في 100) نلاحظ وبشكل عام عدم ملائمة الطراق التقدير مع التحويلات المقترحة لها وكما يلي :

1. عند تقدير أنموذج AR(2) بطريقة تقدير YW للسلسلة $1/x_1$, بقيمة $\hat{\sigma}^2 = 6.09824e^{-6}$ مع قيم المعلمتين المقدرة ($\hat{a}_i, i = 1, 2$) المبينة في جدول (3). وان قيمة MAPE=1.963 أي ان القيمة المئوية تكون مساوية لـ MAPE=%196.3 , وهي اكثر من 50% لذا تعد دقة التنبؤ غير دقيقة .

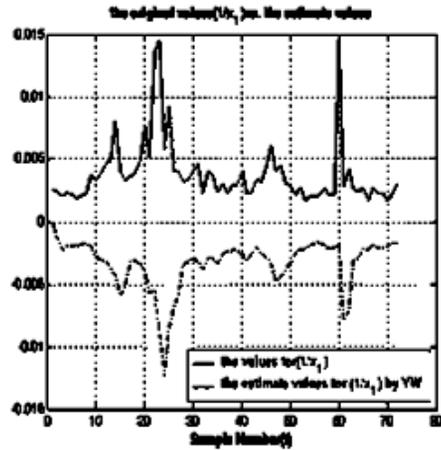
2. عند تقدير أنموذج AR(17) بطريقة تقدير OLS للسلسلة $1/x_2$, بقيمة $\sigma^2 = 0.001078$, مع قيم المعلمات المقدرة $(\hat{a}_i, i=1,2,..,17)$ المبينة في جدول (3). وان قيمة $MAPE = 2.0362$, أي ان القيمة المئوية تكون مساوية لـ $MAPE=203.6\%$, وهي اكثر من 50% لذا تعد دقة التنبؤ غير دقيقة .

3. عند تقدير أنموذج AR(16) بطريقة تقدير OLS للسلسلة $1/x_3$, بقيمة لـ $\sigma^2 = 5.5279e^{-7}$, مع قيم المعلمات المقدرة $(\hat{a}_i, i=1,2,..,16)$ المبينة في جدول (3). وان قيمة $MAPE = 2.0443$, أي ان القيمة المئوية تكون مساوية لـ $MAPE=204.4\%$, وهي اكثر من 50% لذا تعد دقة التنبؤ غير دقيقة .

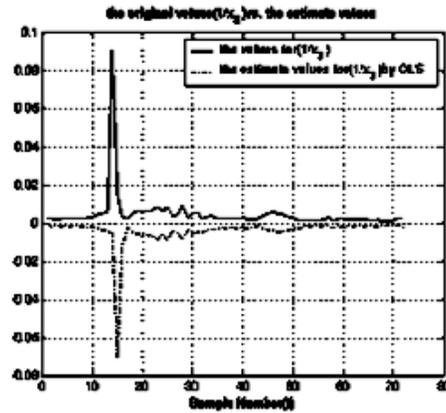
فضلا عن رسم قيم السلاسل الزمنية الثلاثة $(1/x_1, i=1,2,3)$ مع القيم المقدرة المستحصلة بتقدير أنموذج AR عند الرتبة المثلى (p) , ووفقا لطريقة التقدير الأمثل ولكل سلسلة من السلاسل $(1/x_1, 1/x_2, 1/x_3)$ وكما مبين في الجدول (3). انظر الأشكال (3-1,2,3). وعموما نلاحظ عدم ملائمة تلك النماذج للتنبؤ وذلك من خلال الفرق الواضح بين القيم للسلسلة $(1/x_i, i=1,2,3)$ والقيم المقدرة لها على الرغم من انه كان التحويل المناسب لها من بين عدة التحويلات المقترحة.



الشكل (3-2) يبين رسم قيم السلسلة المحولة للاستقرارية $1/x_2$ مع القيم المقدرة لها باستعمال طريقة OLS عند الرتبة $p=17$.



الشكل (3-1) يبين رسم قيم السلسلة المحولة للاستقرارية $1/x_1$ مع القيم المقدرة لها باستعمال طريقة YW عند الرتبة $p=2$.



الشكل (3-3) يبين رسم قيم السلسلة المحولة للاستقرارية $1/x_3$ مع القيم المقدرة لها باستعمال طريقة OLS عند الرتبة $p=16$

رابعا : نستعمل طريقة Levinson – Durbin التكرارية، والتي يرمز لها بـ (LDR)، المقترح استعمالها للسلاسل الزمنية ضعيفة الاستقرارية. ومقارنتها مع طرائق التقدير OLS و YW و Burg، و باستعمال القيم السلسلة الأصلية $(X_i, i = 1, 2, 3)$. بهدف توسيع نطاق البحث عن أفضل مقدر خطي للتنبؤ لكل سلسلة زمنية من السلاسل الثلاث (X_1, X_2, X_3) إذ يتم تقدير نماذج $AR(p)$ بكل الطرق المتقدم ذكرها وتحديد رتبة أفضل مقدر خطي للتنبؤ (p) بالاعتماد لأقل قيمة من قيم MAPE ضمن المدى $p = [1-17]$ ، إي تقديرانموذج $AR(1)$ و $AR(2)$... ولغاية $AR(17)$ ، لكل سلسلة من السلاسل الزمنية الثلاثة (X_1, X_2, X_3) . ومن ثم تحديد الرتبة المثلى p المناظرة لأقل قيمة من قيم المعيار الاحصائي MAPE ضمن المدى $p = [1-17]$ مع ايجاد قيمة جذرتباين الضوضاء المقدرة (σ^2) المرافقة لها ويرمز لها بـ RMSE. وقد لخصت النتائج مما تقدم ذكره في الجدول (4).

جدول (4) يبين الرتبة المثلى (p) المناظرة لأقل قيمة من قيم MAPE مع قيمة RMSE عند الرتبة p ضمن المدى $p = [1-17]$ ، وفقاً لكل طريقة من طرائق تقدير نماذج الانحدار الذاتي، ولكل سلسلة من السلاسل الزمنية الثلاثة (X_1, X_2, X_3) قيد البحث.

Series Method	X_1			X_2			X_3		
	P	RMSE	MAPE	p	RMSE	MAPE	P	RMSE	MAPE
OLS	1	111.061	2.0527	1	3.7446	2.0685	1	168.772	2.1437
YW	1	111.133	2.0402	1	3.7448	2.0637	1	168.842	2.1305
Burg	1	111.063	2.0549	1	3.7446	2.0694	1	168.772	2.1448
LDR	9	94.9167	0.3160	17	3.033	0.3737	16	138.434	0.4319

Note: الخلايا المظلمة تعني اقل قيمة لـ MAPE مع الرتبة المناظرة لها (p) .

ونلاحظ منه بان القيم المئوية لـ MAPE المستحصلة بطريقة LDR تكون اقل من 50% لذا تعد دقة التنبؤ معقولة مقارنة بالقيم المئوية لـ MAPE المستحصلة بطريقة OLS و YW و Burg. وكذلك قيم RMSE المستحصلة بطريقة LDR تكون اقل مقارنة بنفس القيم المستحصلة بطريقة OLS و YW و Burg، وبذلك تتفوق طريقة LDR

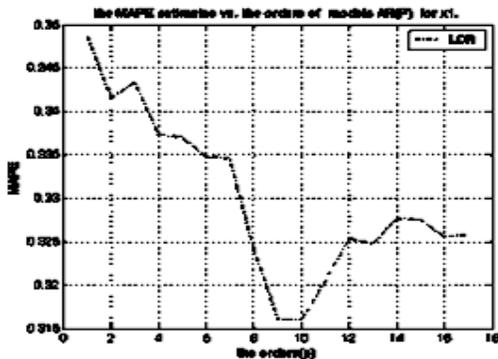
على بقية الطرق المستعملة في البحث، ونلاحظ من الجدول المتقدم ذكره بان طريقة LDR تحدد الرتبة الامثل (p) لأنموذج AR ولكل سلسلة زمنية وكما يلي :

1. للسلسلة X_1 تكون الرتبة الامثل $p=9$ المناظرة لأقل قيمة لـ $MAPE=0.316$ ، اي ان القيمة المئوية تكون مساوية لـ $MAPE=31.6\%$ ، وهي اقل من 50% لذا تعد دقة التنبوء معقولة او مقبولة. وان قيمة $RMSE=94.916$.

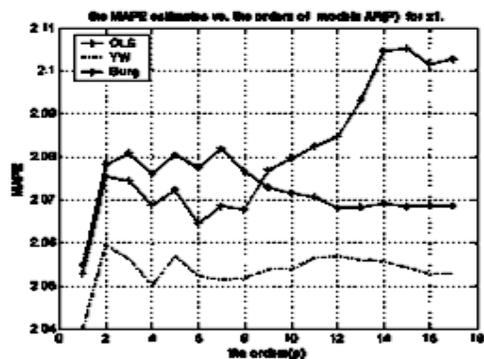
2. للسلسلة X_2 تكون الرتبة الامثل $p=17$ المناظرة لأقل قيمة لـ $MAPE=0.3737$ ، اي ان القيمة المئوية تكون مساوية لـ $MAPE=37.3\%$ ، وهي اقل من 50% لذا تعد دقة التنبوء معقولة او مقبولة. وان قيمة $RMSE=3.033$.

3. للسلسلة X_3 تكون الرتبة الامثل $p=16$ المناظرة لأقل قيمة لـ $MAPE=0.4319$ ، اي ان القيمة المئوية تكون مساوية لـ $MAPE=43.19\%$ ، وهي اقل من 50% لذا تعد دقة التنبوء معقولة او مقبولة. وان قيمة $RMSE=138.434$.

فضلا عن الإشكال المبينة أدناه (4-1,2,3,4,5,6) التي تمثل رسم قيم MAPE ولكل الرتب $p = [1-17]$ المستحصلة بطريقة OLS و YW و Burg وبشكل منفصل عن رسم قيم MAPE بطريقة

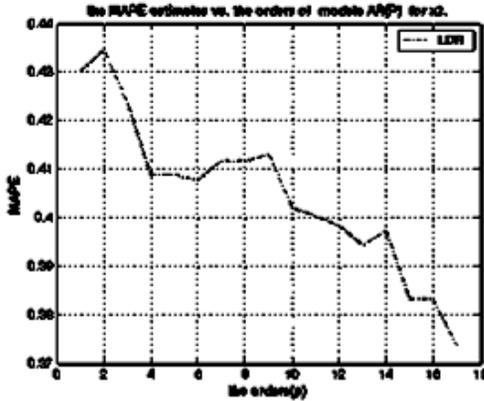


الشكل (4-2) يبين رسم قيم MAPE للسلسلة X_1 بطريقة تقدير LDR.

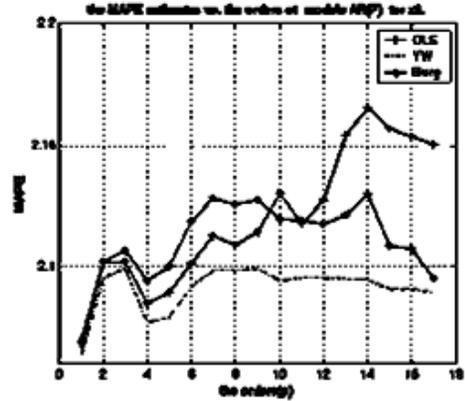


الشكل (4-1) يبين رسم قيم MAPE للسلسلة X_1 بطرائق التقدير (OLS, YW, Burg).

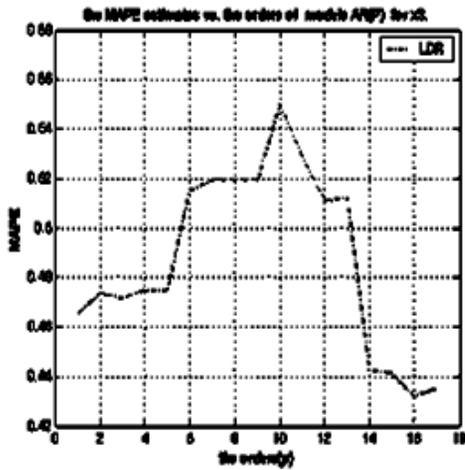
LDR عند نفس الرتب, وذلك لصغر تلك القيم وتوضيح المقارنة بين الطرق الأربعة.



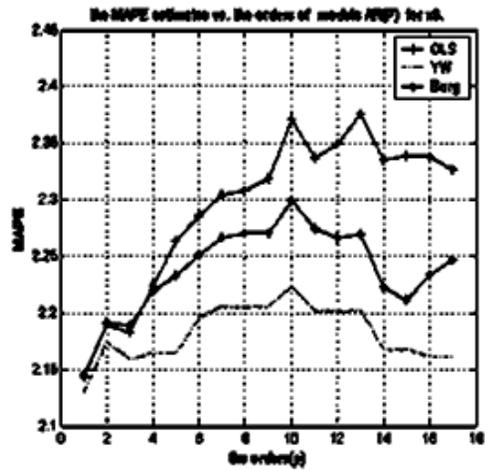
الشكل (4-4) يبين رسم قيم MAPE للسلسلة X_2 بطريقة تقدير LDR



الشكل (4-3) يبين رسم قيم MAPE للسلسلة X_2 بطرائق التقدير (OLS, YW, Burg).



الشكل (4-6) يبين رسم قيم MAPE للسلسلة X_3 تقدير LDR



الشكل (4-5) يبين رسم قيم MAPE للسلسلة X_3 بطرائق التقدير (OLS, YW, Burg).

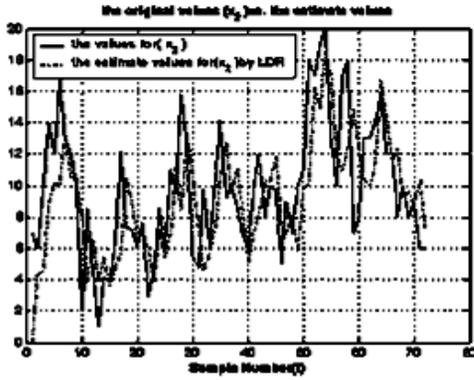
وبناء على ما تقدم ذكره يتم اعتماد طريقة LDR المقترح استعمالها لتقدير معاملات نموذج $AR(p)$ التي تحقق شرط الاستقرارية للنموذج اي ان $|\sum_{i=1}^p a_i| < 1$ [4], والممكن استعمالها لأغراض التنبؤ بكمية الإنتاج ولكل سلسلة من السلاسل الزمنية الثلاث. فضلا عن رسم قيم السلاسل الزمنية الثلاثة ($x_i, i=1,2,3$) مع القيم المقدرة المستحصلة بتقدير نموذج AR عند الرتبة المثلثي (p), ووفقا لطريقة طريقة LDR انظر الإشكال (5-1,2,3).

وبذلك فان **النموذج الأمثل** للسلسلة الزمنية التي تمثل كمية الإنتاج الشهري من الأقمشة القطنية (X_1) يكون

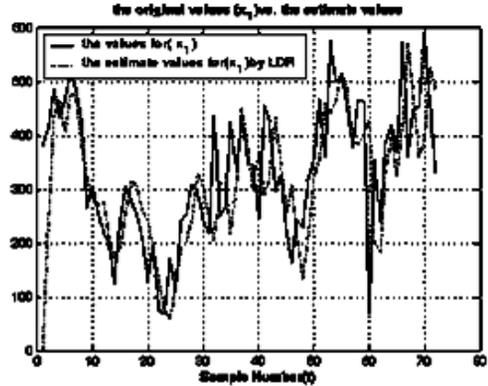
على وفق الصيغة الآتية

$$x_t = \hat{a}_1 x_{t-1} + \hat{a}_2 x_{t-2} + \hat{a}_3 x_{t-3} + \hat{a}_4 x_{t-4} + \hat{a}_5 x_{t-5} + \hat{a}_6 x_{t-6} + \hat{a}_7 x_{t-7} + \hat{a}_8 x_{t-8} + \hat{a}_9 x_{t-9}$$

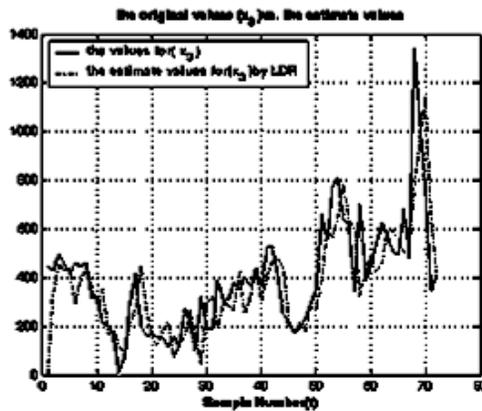
أي إن $x_t = \sum_{i=1}^9 \hat{a}_i x_{t-i}$, ووفقا لقيم ($\hat{a}_i, i=1,2,\dots,9$) المبينة في جدول (5).



الشكل (5-2) يبين رسم قيم السلسلة x_2 مع القيم المقدرة لها باستعمال طريقة LDR عند الرتبة $p=17$.



الشكل (5-1) يبين رسم قيم السلسلة x_1 مع القيم المقدرة لها باستعمال طريقة LDR عند الرتبة $p=9$.



الشكل (5-6) يبين رسم قيم السلسلة x_3 مع القيم المقدرة لها باستعمال طريقة LDR عند الرتبة $p=16$.

جدول (5) يبين قيم المعلمات المقدرة $(\hat{a}_i, i = 1, 2, \dots, p)$ لنموذج $AR(p)$ عند الرتبة الأمثل (p) ، لكل سلسلة من السلاسل الزمنية الثلاثة (X_1, X_2, X_3) قيد البحث بطريقة LDR.

Series	P	$(\hat{a}_i, i = 1, 2, \dots, p)$							
		\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{a}_4	\hat{a}_5	\hat{a}_6	\hat{a}_7	\hat{a}_8
X_1	9	0.5798	0.5188	-0.0836	-0.1625	0.2317	-0.1263	-0.3135	0.0853
		\hat{a}_9							
		0.2498							
X_2	17	0.6131	0.13	0.2673	-0.1807	-0.123	0.0264	0.1053	-0.0103
		\hat{a}_9	\hat{a}_{10}	\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{a}_{13}	\hat{a}_{14}	\hat{a}_{15}	\hat{a}_{16}
		-0.0149	0.1452	-0.0235	-0.0211	-0.0767	-0.17	0.1262	-0.0552
		\hat{a}_{17}							
		0.0944							
X_3	16	0.7185	0.3335	-0.1519	0.0153	-0.2058	0.1453	0.1332	-0.1834
		\hat{a}_9	\hat{a}_{10}	\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{a}_{13}	\hat{a}_{14}	\hat{a}_{15}	\hat{a}_{16}
		-0.0107	0.3385	-0.31	0.0407	-0.0422	0.1948	0.2396	-0.2824

إما النموذج الأمثل للسلسلة الزمنية التي تمثل كمية الإنتاج الشهري من القطن الطبي (X_2) ، يكون

$$x_t = \sum_{i=1}^{17} \hat{a}_i x_{t-i} \text{ ، ووفقا لقيم } (\hat{a}_i, i = 1, 2, \dots, 17) \text{ المبينة في جدول (5).}$$

وأخيرا النموذج الأمثل للسلسلة الزمنية التي تمثل كمية الإنتاج الشهري من لفافات شاش (X_3) ، يكون

$$x_t = \sum_{i=1}^{16} \hat{a}_i x_{t-i} \text{ ، ووفقا لقيم } (\hat{a}_i, i = 1, 2, \dots, 16) \text{ المبينة في جدول (5).}$$

4. الاستنتاجات

تناولنا في هذا البحث مسألة تحديد افضل مقدر خطي للتنبؤ للبيانات المستحصلة من الشركة العامة للصناعات القطنية، التي تمثل كمية الانتاج الشهري للاقمشة القطنية والقطن الطبي ولفافات شاش. وذلك باستعمال طرق تقدير الانحدار الذاتي المتضمنه طريقة اقل المربعات و Yule-Walker و Burg التوافقية ، ومقارنة تلك الطرق مع طريقة Levinson-Durbin التكرارية المستعملة لتقدير معلمات انموذج الانحدار الذاتي من الرتبة p ، عندما تكون السلسلة الزمنية قيد البحث ضعيفة الاستقرار. واستنتجنا بان طريقة Levinson-Durbin التكرارية تعد الافضل مقارنة ببقية طرق التقدير المعتمدة في البحث ولكل السلاسل الزمنية قيد البحث، على وفق معيار اقل من 50% للقيمة المئوية للمعيار الاحصائي معدل القيم المطلقة لنسب الاخطاء (MAPE).

References

1. Roth, K., & Kauppinen, I., (2003), "Frequency warped Burg's Methods for AR-Modeling ", IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics , October 19-22.
2. Lewis, C. D. ,(1982),"Industrial and Business Forecasting Methods, London, Butterworths.
3. Wei, w. w. s. (1990), Time series Analysis: Univariate and Multivariate methods, Addison- wesly publishing –Inc., U.S.A..
4. Liew ,Venus Khim-Sen (2004) , " Which Lag Length Selection Criteria Should We Employ ?" Economics Bulletin,3(33), 1-9.
5. Nassar, S., (2003), Improving the Inertial Navigation System (INS) Error Model for INS and INS/DGPS Applications. A dissertation submitted To the Faculty of Graduate studies In Partial Fulfillment of The Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy, Department of Geomatics Engineering, The University of Calgary.
6. Wang, W., & Wong, A.K., (2000), " A Model-Based Gear Diagnostic Technique " , DSTO Technical Report, DSTO Aeronautical and Maritime Research Laboratory, Australia .
7. Kazlauskas, K., (2011)," The Burg Algorithm with Extrapolation for Improving the Frequency Estimation", INFORMATICA, Vol. 22, No. 2, 177–188.
8. P. M.T. Broersen,(2006)," Automatic Autocorrelation and Spectral Analysis" . Springer-Verlag London Limited.