Warith Scientific Journal

بناء أنموذج انحدار شبه معلمي باستخدام بيانات دائرية
Building a semiparametric regression model using circular data

م .م صبيحه نعمه ضهد [1]
Sabiha N. Dhahad
جامعة كربلاء كلية الأدارة والأقتصاد قسم الأحصاء
sabihand@stu.edu.iq

أ.م .د.أيناس عبد الحافظ محمد [2]
Enas Abdul Hafedh Mohammed
جامعة كربلاء كلية الأدارة والأقتصاد قسم الأحصاء
enas.albasri@uokerbala.edu.iq

المستخلص :
يتطلب الحفاظ على الوظيفة البصرية تحسينها بفهم الخطأ الأنكساري (**Refractive Errer**) والتغيرات المرتبطة بالعمر ، تعمل العين البشرية كنظام بصري يركز الصور المرئية على الشبكية ، أذ ان الخطأ الأنكساري هو أحد الأسباب الرئيسية لتدهور صورة الشبكية في العيون غير المصححة ، نتيجة لوجود العديد من الظواهر في الواقع التي لها خاصية دورية وتكون بياناتها ضمن المدى $(0, 2\pi)$ وهي من البيانات التي لها أهمية في مجالات عديدة ويواجه تحليل هذه البيانات العديد من التحديات المرتبطة بتحليل البيانات الدائرية ، لذا هدف البحث الى بناء أنموذج أنحدار شبه معلمي يتناسب مع طبيعة البيانات الدائرية ، تم أختيار الأنموذج شبه المعلمي الدائري-الخطي-الدائري المدمج لهذا الغرض من خلال دمج الجزء المعلمي المقدر بطريقة الأمكان الأعظم وبفرض الخطأ العشوائي بتوزيع مشترك (خطي-دائري) والجزء اللامعلمي المقدربأستخدام دوال نواة دائرية (Circular Kernel) مختلفة بواسطة معلمة الدمج (α) . تم استعمال بيانات خاصة بالبصر وتم الحصول عليها من (مركز النور التخصصي لطب وجراحة العيون في محافظة ذي قار وبأستعمال جهاز (Auto Kerato – Refracto Tonometer TOPCON TRK. 2P) .تضمنت عينة الدراسة (400 حالة) تمثل لبيانات قياس العين اليمنى (OD cyl axis) والعين اليسرى (OD cyl axis) وعمر الحالة (Patient Age) لأشخاص يعانون من الخطأ الأنكساري (Refractive Error) . تم التوصل من نتائج البحث الى ان أستخدام دالة النواة كوشي المغلف (Wrapped Cauchy) في تقدير الجزء اللامعلمي لأنموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري -الخطي-الدائري المدمج أفضل من استخدام فون ميزس (Von Mesis) . أوصى الباحث بتعميم الأنموذج على بيانات لظواهر أخرى .
الكلمات المفتاحية : انموذج الأنحدار شبه المعلمي ، دالة النواة

Abstract:
Requires the use of optics that allow understanding refractive error (refractive error) and other changes with age, the human eye as an optical system for supervising visual acuity, after the refractive error is one of the main contributors to the image aid in uncorrected eyes, as a result of the presence of many phenomena in reality that provide a periodic feature only data within (0, 2π) and it is from the data that later and the analysis of these data faces. The research to build a semi-parametric regression model to enter with the nature of the circular data, the semi-parametric model-linear-cyclic was chosen for this harvest by integrating the parametric part estimated by the maximum likelihood method and assuming the random error with a joint distribution (linear-cyclic) and the estimated part using a binary circular kernel (circular kernel) different by the integrated parameter (α). Eye data were obtained from Al-Noor Specialized Eye Center in Dhi Qar Governorate using an Auto Kerato-Refractometer TOPCON TRK. 2P. The color study included 400 cases representing the right eye (OD cyl axis), the dependent eye (OD cyl axis), and the patient's age for individuals with refractive error. The results indicated that the use of the wrapped Cauchy function in the estimated part of the integrated semiparametric circular-linear-circular regression model was better than the use of the von Mises function. The researcher recommended generalizing the model to data on other phenomena.
Keywords: Semi-parametric regression model, kernel function

1- المقدمة : The Introduction

يتطلب الحفاظ على الوظيفة البصرية تحسينها بفهم الخطأ الأنكساري (**Refractive Error**) والتغيرات المرتبطة بالعمر ، تعمل العين البشرية كنظام بصري يركز الصور المرئية على الشبكية ، أذ ان الخطأ الأنكساري هو أحد الأسباب الرئيسية لتدهور صورة الشبكية في العيون غير المصححة (Namba, H., Sugano & others , 2020) .
من هنا جاء البحث لبناء انموذج احصائي نستخدم تحليل الأنحدار كأداة أحصائية لهذا الغرض من خلال تقدير العلاقة بين متغيرات الأنموذج . تضمن البحث أربع مباحث ، المبحث الأول يحوي المقدمة ومنهجية البحث . ركز المبحث الثاني على الدراسة النظرية لأنموذج الأنحدار شبه المعلمي بأستخدام بيانات دائرية ، تطرقلبناء أنموذج الأنحدار شبه المعلمي المدمج

وطرق تقدير الجزء المعلمي والجزء اللامعلمي بواسطة معلمة الدمج . المبحث الثالث تناول الجانب التجريبي والتطبيقي من خلال أجراء خطوات المحاكاة (Simulation) بأستعمال برنامج (Matlab) لبناء أنموذج البحث ، في الجانب التطبيقي تم أستعمال بيانات مرضى الخطأ ألأنكساري (Refractive Error) في تطبيق الأنموذج شبه المعلمي الدائري-الخطي-الدائري.

-2 منهجية البحث

1-2 الأهمية : Importance of thesis

تكمن أهمية البحث لبناء أنموذج أنحدار شبه معلمي يجمع بين المرونة والدقة وتحقيق موثوقية عالية في نتائج التقدير والتنبؤ بما يتوافق مع طبيعة البيانات الدائرية ، وتظهر أهمية هذا الأنموذج من خلال التطبيق على بيانات دائرية حول ظاهرة الخطأ الأنكساري للعين .

2-2 مشكلة لبحث : Problem of thesis

تكمن مشكلة البحث بوجود العديد من الظواهر في الواقع التي لها خاصية دورية وتكون بياناتها ضمن المدى $(0, 2\pi)$ وهي من البيانات التي لها أهمية في مجالات عديدة ويواجه تحليل هذه البيانات العديد من التحديات المرتبطة بتحليل البيانات الدائرية كأختلاف التوزيع للبيانات الدائرية والخطية التي أعتمد عليها الأنموذج ايضاً طبيعة البيانات الدائرية التي تتكرر كل 360° مما يجعل صعوبة في التفسير، كما يوجد أختلاف في طرق تقدير المتوسط الدائري والأنحراف المعياري الدائري.

3-2 هدف البحث : Aim of thesis

يهدف البحث الى بناء انموذج انحدارشبه معلمي بأستخدام أنموذج أنحدار شبه معلمي دائري-خطي-دائري الذي يتناسب مع طبيعة البيانات الدائرية .

-3 الجانب النظري

1-3 مفهوم البيانات الدائرية : The concept of circular data

البيانات الدائرية هي نوع من البيانات التي تمثل نقاطًا على محيط دائرة الوحدة المقاسة بالدرجات أو بالراديان. على مدى القرن الماضي ، تم التركيز بشكل كبير على البيانات الدائرية في أنواع مختلفة من المجالات مثل الفيزياء وعلم النفس والأرصاد الجوية والجيولوجيا وعلم الحفريات وعلم الأحياء وعلم الفلك وغيرها الكثير. يمكن تعريف البيانات الدائرية في أنواع مختلفة من التوزيعات مثل التوزيعات النقطية والقلبية والمثلثية وتوزيعات فون ميزس (VM) والملفوفة العادية (WN) وتوزيعات بواسون (WP). توزيع VM هو التوزيع الأكثر شيوعًا للبيانات الدائرية لأنه يأخذ الدور الذي يؤديه التوزيع الطبيعي في الإحصائيات الخطية القياسية. في الواقع ، يتشكل مثل التوزيع الطبيعي ، فيما عدا أن ذيوله مقطوعة. على عكس البيانات الخطية ، أصل البيانات الدائرية غير محدد لأنها موجودة على الأسطح المحيطية والكروية. يمكن أن يؤثر الاختلاف في خصائص البيانات على الوصف والاستدلال في التحليل الإحصائي. لذلك ، لم تعد طريقة الإحصاء الخطي الكلاسيكية مناسبة عند معالجة البيانات الدائرية. (Mohammad, 2021) ، يتم جمع البيانات الدائرية عندما يكون موضوع الاهتمام هو اتجاه أو وقت من اليوم. تظهر هذه البيانات الخاصة في العديد من التطبيقات: علوم الأرض (مثل اتجاهات الرياح) ، والطب (مثل إيقاع الساعة البيولوجية) ، والبيئة (مثل حركات الحيوانات) ، والطب الشرعي (وقوع الجريمة) (Claire and Thanh ,2022)

2-3 الأنحدار شبه المعلمي the semiparametric regression:

أقترح الباحث (Robinson,1988) والباحث (Speckman Paul, 1988)دالة الأنحدار الخطي الجزئي وهي أحد دوال الأنحدار شبه المعلمي ، وعرف (Issa, Aseel Muslim. 2011) الأنحدار شبه المعلمي (semiparametric) بانه اسلوب احصائي يحقق خصائص عامة للأنحدار المعلمي (Parametric) واللامعلمي (Nonparametric) ويحقق نفس الهدف وهو الحصول على منحنى للبيانات يطابق او يقترب من التطابق لمنحنى المتغير المعتمد وذلك بدمج اساليب التقدير المعلمية واللامعلمية . (Tarrad, Alaa Jaber & Hassan, Raad Fadel. 2013)

ويعبر عن النموذج شبه المعلمي بالآتي :

$$y_i = f(x_i, B) + g(\theta_i) + \varepsilon_i \quad \dots \quad (1)$$

أذ :

y_i المتغير التابع ، $f(x_i, B)$ الجزء المعلمي ، $g(\theta_i)$ الجزء اللامعلمي ، ε_i الخطأ العشوائي

يجمع الأنحدار شبه المعلمي بين مكونات الأنحدار المعلمي واللامعلمي . بذلك يضمن سهولة التفسير من الجزء المعلمي و يحتفظ بالمرونة من الجزء اللامعلمي . (DERICK L. RIVERS, 2009)

3-3 الأنحدار الدائري (Circular regression)

عند أستخدام البيانات الدائرية لأعداد الأنحدار الخطي البسيط او المتعدد يجب التمييز بين الدور الذي يلعبه المتغير الدائري وبين وقت استخدام تقنيات الأنحدار الخطي وغير الخطي ، توجد ثلاث أنواع لنماذج الأنحدار الدائري موضحة في الجدول ادناه ، في كل نوع ، يمكن استخدام كل من أشكال الأنحدار الخطي وغير الخطي .(Scott, 2002)

جدول (1) يبين أنموذجات الأنحدارالدائري

Regression category	Response Variable	Explanatory Variable
linear –circular	Linear	Circular
circular –linear	Circular	Linear
circular –circular	Circular	Circular

لبناء أنموذج الأنحدار شبه المعلمي المدمج بأستخدام بيانات دائرية تم توظيف نوعين من الأنحدار الدائري في الجدول السابق في صياغة انموذج الدراسة الحالية ، أذ تضمن الجزء المعلمي انموذج أنحدارمن النوع (Circular - Linear Regression) اما الجزء اللامعلمي تضمن أنموذج أنحدارمن النوع (Circular- Circular Regression) ، تم جمع الأنموذجين المعلمي واللامعلمي للحصول على الأنموذج شبه المعلمي الدائري-الخطي- الدائري بالجدول ادناه:

جدول رقم (2) يبين أنموذج الأنحدارشبه المعلمي الدائري – الخطي- الدائري

Regression category	Dependent Variable	Explanatory Variable	
Circular = Linear + Circular	Circular	Linear	Circular

الأنحدارشبه المعلمي الدائري -الخطي- الدائري(**Semiparametric Circular -Linear- circulear Regression**) ، الأنحدار شبه المعلمي أحد اشكال ألأنحدار التي من الممكن توظيف البيانات الدائرية لهذا النوع من النماذج ، يتكون من دالتين احدهما دالة (Circular - Linear Regression) هي ($\boldsymbol{y_i} = \beta_0 + \beta_1 x_i$) بمتغير معتمد دائري ($\boldsymbol{y_i}$) ومتغيرتوضيحي خطي (x_i) اما الدالة الثانية (Circular- Circular Regression) هي ($\boldsymbol{y_i} = g(\theta)$) بمتغير معتمد دائري ومتغير توضيحي دائري . أنموذج الأنحدار شبه المعلمي من النوع (Circular= Linear + Circular) وهو من اللاأنموذجات التجميعية .

3-4 تقديرأنموذج الأنحدارشبه المعلمي الدائري -الخطي-الدائري المدمج

Estimating the parameters of the Combined semiparametric Circular -Linear-circulear regression model

استخدمت هذه الطريقة بالتقدير من قبل الباحثان (Olkin&Spieglman,1987) حيث تم دمج الصيغة المعلمية واللامعلمية لدالة الكثافة الاحتمالية.

قدم الباحثان (Burman&Chaudhuri,1992) تقدير لدالة الأنحدار بأستخدام خليط من مقدرات معلمية ولامعلمية . ثم قدم الباحث (Wooldridge , 1992) أقتراح خاص بهذا النوع من المقدرات ، ايضاً قدم الباحثون (Rahman,Gokhale&Ullah, 1993) مقترح للتقدير المدمج ، قدمت الباحثة اسيل عام 2011 والباحث مناف يوسف عام 2012 مقترح للتقدير شبه المعلمي المدمج . تمثل هذه الطريقة الأنحدار الهجين بين الأنموذج ذو الصيغة المعلومة والمعلمات المجهولة ، والأنموذج ذو دالة الأنحدار غير معلومة الصيغة ، تم في هذه الدراسة تقدير دالة الأنحدار المدمج وفق طريقة (Burman&Chaudhuri,1992) وحسب الصيغة :

$$y_i = (1-\alpha)f(x_i.\beta) + \alpha\, g(\theta_i) + \varepsilon_i \qquad .... \ (2)$$

حيث $0 < \alpha < 1$ تمثل معلمة الدمج (Combin Parameter)

تم التقدير وفقاً للخطوات التالية :

1- تقدير الجزء المعلمي بطريقة الأمكان الأعظم (Maximum Likelihood Estimator)
2- تقدير الجزء اللامعلمي بواسطة المقدر اللبي (Kernel Estimator)
3- تقدير معلمة الدمج (Combin Parameter) بطريقة المربعات الصغرى من خلال تعويض كل من المقدرين المعلمي واللامعلمي بالشكل التالي :

$$y_i = (1-\alpha)f(x_i.\hat{B}) + \alpha\, \hat{g}(\theta_i) + \varepsilon_i \qquad .... \ (3)$$

تعد معلمة الدمج (Combin Parameter) من المعلمات المهمة في تكوين الأنحدار شبه المعلمي أذ انها تعطي وزناً لكل من الجزء المعلمي والجزء اللامعلمي في الأنموذج شبه المعلمي ، وتم استخدامها في الدراسة الحالية لتكوين انموذج انحدار شبه معلمي لبيانات دائرية ويستوجب تقديرها ومن المتعارف عليه يمكن تقدير معلمة الدمج بطريقة المربعات الصغرى:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(f(x_i.\hat{B}) + \alpha f(x_i.\hat{B}) - \alpha\, \hat{g}(\theta_i)\right)\right]^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(f(x_i.\hat{B}) + \alpha f(x_i.\hat{B}) - \alpha\, \hat{g}(\theta_i)\right)\right]^2$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - f(x_i.\hat{B}) + \alpha\left(\hat{g}(\theta_i) - f(x_i.\hat{B})\right)\right]^2$$

$$\left(y_i - f(x_i.\hat{B})\right) = \alpha\left(\hat{g}(\theta_i) - f(x_i.\hat{B})\right) + \varepsilon_i$$

نضرب الطرفين بالمقدار $\left(\hat{g}(\theta_i) - f(x_i.\hat{B})\right)$ ونحصل على الصيغة الآتية لمعلمة الدمج المقدرة :

$$\hat{\alpha}_{BC} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(\hat{B}.x_i)\right)\left(\hat{g}(\theta_i) - f(\hat{B}.x_i)\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{g}(\theta_i) - f(\hat{B}.x_i)\right)^2} \quad \dots \quad (4)$$

حيث $\hat{g}(\theta_i) \neq f(\hat{B}.x_i)$

(Rahman, M., Gokhale, D. V., & Ullah, A. (1997))

$\hat{\alpha}$ تمثل مقدر المربعات الصغرى للمعلمة α ، في حالة $\hat{\alpha} = 0$ فأن الصيغة (3) تمثل مقدر دالة انحدار معلمي ، اما اذا كانت $\hat{\alpha} = 1$ فأن الصيغة (3) تمثل مقدردالة أنحدار لامعلمي . ((Ullah, A., & Vinod, H. D. ,1993)) Fan, (Y., & Ullah, A. 1999)

3-4-1 تقدير الجزء المعلمي بطريقة الأمكان الأعظم (Maximum Likelihood) :

تتميز طريقة الأمكان الأعظم بانها اكثر الطرق شيوعاً وتتميز بالكفاءة ، الكفاية ، الأتساق وتتميز بخاصية الثبات . Allahham, N. (2015)

انموذج الجزء المعلمي مشابه لأنموذج الأنحدار البسيط حيث يشترط في الأنموذج الخطي البسيط ان يتوزع الخطأ توزيع طبيعي ، وبما ان توزيع فون ميزس (VM) للبيانات الدائرية مشابه للتوزيع الطبيعي للبيانات الكمية ويمكن صياغة الأنموذج بالصيغة التالية (Jawad, Ali Muhammad. 2023)

$$y_i = \beta_0 + \beta x_i + \varepsilon_i \ (mod\ 2\pi) \quad \dots (5)$$

y_i : المتغير التابع الدائري Dependent Veriable

x_i : المتغير التوضيحي المستقل inDependent Veriable

β_0 : الحد الثابت للأنموذج

β : الميل الحدي للأنموذج

ε_i : الخطأ العشوائي الذي يتبع توزيع فون ميزس الشرطي (VM) بمتوسط أتجاه صفر ومعدل التركيز $(\frac{vx}{\sigma^2})$

بما ان المتغير $(y_1 . y_2 . \dots . y_n)$ يتوزع توزيع فون ميزس الدائري له دالة كثافة أحتمالية (pdf) لكل مشاهدة في العينة n ، يمكن تعريف دالة الكثافة الأحتمالية لتوزيع فون ميزس للخطأ العشوائي الدائري لأنموذج الأنحدار كالآتي : Abuzaid, A. H. (2010)

$$f(y\ /\ x; \beta_0 . \beta_1 . \sigma^2 . k.) = \frac{1}{2\pi\ I_0\ (\frac{vx}{\sigma^2})} \exp\left\{\frac{vx}{\sigma^2}\ \cos(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)\right\}$$

$$L(y_i, x_i; \beta_0 . \beta_1 . \sigma^2 . v) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi\ I_0\ (\frac{vx}{\sigma^2})} \exp\left\{\frac{vx}{\sigma^2}\ \cos(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)\right\}$$

نأخذ اللوغاريتم لدالة الأمكان الأعظم :

$$\ln L\ (y_i, x_i; \beta_0 . \beta_1 . \sigma^2 . v) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(y/x\ ; \beta_0 . \beta_1 . \sigma^2 . v\ )$$

$$= = \sum_{i=1}^{n} \ln\left\{\frac{1}{2\pi\ I_0\ (\frac{vx}{\sigma^2})}\ \exp\ \left(\frac{vx}{\sigma^2}\ \cos(y_i - \beta_0 -\ \beta x_i\right)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\ln \frac{1}{2\pi\ I_0\ (\frac{vx}{\sigma^2})}\ \exp\ \left(\frac{vx}{\sigma^2}\ \cos(y_i - \beta_0 -\ \beta x_i\right)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{-\ln(2\pi) - \ln\left(I_0\left(\frac{vx}{\sigma^2}\right)\right) + \frac{vx}{\sigma^2}\ \cos(y_i - \beta_0 -\ \beta x_i)\right\}$$

نقوم بأجراء الأشتقاق الجزئي لكل من المعلمات $(\beta_0, \beta_1, \sigma^2, v)$ المطلوب تقديرها :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{v x_i}{\sigma^2} \sin(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) \quad \dots \ (6)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{v x_i}{\sigma^2} \sin(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)\ x_i\right] \quad \dots \ (7)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial v}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{-x_iI_1(\frac{vx_i}{\sigma^2})}{\sigma^2 I_0(\frac{vx_i}{\sigma^2})}+\frac{x_i}{\sigma^2}\cos(y_i-\beta_0-\beta_1x_i)\right] \quad \dots \ (8)$$

$I_0(\frac{vx_i}{\sigma^2})$ هي المشتقة الأولى ل $I_1\left(\frac{vx_i}{\sigma^2}\right)$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{vx_i^2I_1(\frac{vx_i}{\sigma^2})}{(\sigma^2)^2 I_0(\frac{vx_i}{\sigma^2})}-\frac{vx_i^2}{2(\sigma^2)^2}\cos(y_i-\beta_0-\beta_1x_i)\right] \dots \ (9)$$

نجعل المعادلات (6) و(7) و(8) و (9) مساوية للصفرنحصل :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{vx_i}{\sigma^2}\sin(y_i-\beta_0-\beta_1x_i)=0 \quad \dots \ (10)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{vx_i}{\sigma^2}\sin(y_1-\beta_0-\beta_1x_i)\,x_i\right]=0 \quad \dots \ (11)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{-x_iI_1(\frac{vx_i}{\sigma^2})}{\sigma^2 I_0(\frac{vx_i}{\sigma^2})}+\frac{x_i}{\sigma^2}\cos(y_i-\beta_0-\beta_1x_i)\right]=0 \quad \dots \ (12)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{vx_i^2I_1(\frac{vx_i}{\sigma^2})}{(\sigma^2)^2 I_0(\frac{vx_i}{\sigma^2})}-\frac{vx_i^2}{2(\sigma^2)^2}\cos(y_i-\beta_0-\beta_1x_i)\right]=0 \quad \dots \ (13)$$

وبتطبيق خاصية الوسط الحسابي المذكورة في المعادلة رقم () على المعادلة رقم (2-14) نحصل على :

$$\sum_{i=1}^{n}[\sin(y_i-\beta_1x_i)\cos\beta_0-\cos(y_i-\beta_1x_i)\sin\beta_0]=0$$

$$\cos\beta_0\sum_{i=1}^{n}\sin(y_i-\beta_1x_i)\ -\ \sin\beta_0\sum_{i=1}^{n}\cos(y_i-\beta_1x_i)=0$$

بالقسمة على $\cos\beta_0$

$$\sum_{i=1}^{n}\sin(y_i-\beta_1x_i)\ -\frac{\sin\beta_0}{\cos\beta_0}\sum_{i=1}^{n}\cos(y_i-\beta_1x_i)=0$$

$$\tan\beta_0=\frac{\sin\beta_0}{\cos\beta_0}$$

اذن

$$\sum_{i=1}^{n}\sin(y_i-\beta_1x_i)\ -\tan\beta_0\ \sum_{i=1}^{n}\cos(y_i-\beta_1x_i)=0$$

$$\tan\beta_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sin(y_i-\beta_1x_i)}{\sum_{i=1}^{n}\cos(y_i-\beta_1x_i)}$$

$$\beta_0=\tan^{-1}\frac{\sum_{i=1}^{n}\sin(y_i-\beta_1x_i)}{\sum_{i=1}^{n}\cos(y_i-\beta_1x_i)}$$

$$\hat{\beta}_0=\begin{cases}\tan^{-1}\left(\frac{S}{C}\right) & if\ S\geq 0\ ،\ C>0\\ \frac{\pi}{2} & if\ S\geq 0\ ،\ C=0\\ \tan^{-1}\left(\frac{S}{C}\right)+\pi & if\ \ ،\ C<0\\ \tan^{-1}\left(\frac{S}{C}\right)+2\pi & if\ S<0\ ،\ C\geq 0\\ undefined & if\ S=0\ ،\ C=0\end{cases} \quad \dots . \ (14)$$

حيث :

S= $\sum_{i=1}^{n}\sin(y_i - \beta^0 x_i)$
C=$\sum_{i=1}^{n}\cos(y_i - \beta^0 x_i)$

حيث: β^0 تمثل القيم الأولية للمعلمات المقدرة
اما $\hat{\beta}$ يمكن الحصول عليها من الصيغة التالية :

$$\hat{\beta} \approx \beta^0 + \frac{\sum_{i=1}^{n}\sin\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \beta^0 x_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}\cos\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \beta^0 x_i\right)} \quad \ldots \; (15)$$

اما $\hat{v}$ يمكن الحصول عليها حسب القانون التالي :

$$\hat{v} = A^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}\cos\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta} x_i\right)\right) \quad \ldots \; (16)$$

حيث : A^{-1} هي نسبة دالة بيسل (modified Bessel) من النوع الأول من الترتيب الأول ومن الترتيب الصفري لمعلمة التركيز v في توزيع فون ميزس وقد اعطى (Dodson 1978) تقديرات تقريبية بسيطة للحصول على A^{-1} وهي Hassan, S. F. (2015).

$$A^{-1}(R) = \begin{cases} 2R + R^2 + 0.833R^5 & R > 0.053 \\ -0.4 + 1.39R + 0.43(1-R)^{-1} & 0.53 \le R < 0.85 \\ (R^3 - 4R^2 + 3R)^{-1} & R \ge 0.85 \end{cases} \quad \ldots \; (17)$$

2-4-3 تقدير الجزء اللامعلمي بطريقة المقدر اللبي (Kernel Estimator)

يعد المقدر اللبي (Kernel Estimator) أسلوب لامعلمي يستخدم لتقدير الدوال الأحصائية بالأعتماد على البيانات ، يتميز بالبساطة وسهولة البرمجة ورسم القيم المقدرة بيانيا وتقدير دالة الأنحدار اللامعلمية ، تم اقتراح هذا المقدر من قبل الباحثين (Rosenblat,1956) و (Parzen,1962)

بفرض (y_i, θ_i) حيث $i = 1, 2, \ldots, n$ تمثل عينة عشوائية لمتغيرين دائريين (y, θ) يمكن تمثيل العلاقة بين المتغيريين من خلال أنموذج الأنحدار التالي :

$$y_i = [g(\theta_i) + \varepsilon_i](mod\ 2\pi) \qquad i = 1.2.\ldots.n \qquad \ldots \; (18)$$

حيث ε_i تتوزع بشكل زوايا عشوائية بمتوسط اتجاهي صفر وتركيز محدود ومستقل عن θ_i .

تم تقدير الجزء اللامعلمي بواسطة النواة (Kernel) .

. بفرض ان المتغير العشوائي (X=$x_1.x_2.\ldots.x_n$) له دالة كثافة احتمالية غير معلومة $f_x(x)$ فأن المقدر اللبي لهذه الدالة يوضح بالشكل التالي :

$$\hat{f}_x(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \qquad \ldots \qquad (19)$$

حيث h>0

اما K(.) هي دالة لبية تسمى دالة النافذة .

وهي دالة رياضية حقيقية محددة تعمل على تنقية المقدر من التعرجات ويجب ان تحقق الشرطين : Ban Ahmed Matras, & Alaa Mahmoud Mohamed. (2013).

1) $K(x) \ge 0$
2) $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx = 1$

اما **Circular Kernel** (النواة الدائرية) يرمز لها (K_v) مع معلمة التركيز $v > 0$ هي دالة حقيقية ، عرف (Marzio et,al.2009) النواة الدائرية هي نواة الجيب (sin) ذات الرتبة r ومعلمة تركيز (تمهيد) $v > 0$ بأنها دالة حقيقية أي $K_v \in (0.2\pi) \rightarrow R$

لبيانات المتغير التوضيحي الدائري والمتغير التابع الدائري ممكن تقدير دالة الأنحدار اللامعلمية من خلال تقدير دالة كثافة النواة الدائرية (Kernel circular density estimator) ، يمكن التعبير عن مقدر دالة النواة الدائرية بالشكل التالي : (Marzio, 2013)

$$\hat{f}(\theta; v) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_v\ (\theta - \theta_i)، \quad 0 \le \theta \le 2\pi \qquad \ldots \; (20)$$

حيث $K_v\ (\theta - \theta_i)$ تمثل دالة النواة الدائرية (Kernel circuler)
$v > 0$ تمثل معلمة التركيز (معامل التجانس)

اما بالنسبة لأنواع النواة الدائرية من الممكن توظيف دوال الكثافة الدائرية ، وفي هذه الأطروحة تم استخدام دالتين :

1- **فون ميزس (Von Mesis) :** فهويستخدم على نطاق واسع بسبب احاديته وشكله المتماثل ومعادلته التالية المذكورة سابقا .(Alonso-Pena, M., Ameijeiras-Alonso, J., & Crujeiras, R. M. (2021).)

$$K_v = f(\theta\,;\mu.v) = \frac{1}{2\pi\, I_0\,(v)} \exp\{v \cos(\theta - \mu)\} \qquad \ldots(21)$$

حيث $0 \le \theta \le 2\pi$

مع هذه النواة المحددة يتم أعطاء مقدر دالة الكثافة في المعادلة (22) ، وهي عبارة عن مجموعة من توزيعات فون ميزس (Von Mesis) المتمركزة في θ_i ومع معلمة التركيز v . لمعلمة التركيز تأثير في تقليل بعض معايير الخطأ بين الدالة الحقيقية اللامعلمية والدالة التقديرية. (Oliveira&Rodriguez , 201) ، (Sikaroudi, A. E. (2017))

$$\hat{f}(\,\theta\,;\,v) = \frac{1}{n2\pi\, I_0\,(v)} \sum_{i=1}^{n} \exp\{v\, cos(\theta - \theta_i)\}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad \ldots(22)$$

2- **كوشي المغلف (Wrapped Cauchy) :**

$$K_{wc} = f(\theta\,;\mu.p)\frac{1}{2\pi}\,\frac{1-p^2}{1+p^2-2pcos(\theta)} \qquad 0 < p < 1 \qquad \ldots(23)$$

حيث p هي معلمة التركيز

يمكن كتابة المقدر اللامعلمي لدالة الأنحدار $f(\theta_i)$ عند النقطة الدائرية (δ) بالشكل التالي : المصدر : Di Marzio, M., Fensore, S., & Taylor, C. C. (2023)

$$\hat{f}(\delta) = atan^2[\hat{g}_1(\delta)\,.\,\hat{g}_2(\delta)\,] \qquad \ldots\ (24)$$

حيث تمثل الدالة $atan^2[\hat{g}_1(\delta)\,.\,\hat{g}_2(\delta)\,]$ بأنحدار الزاوية بين المحور والمتجه من الأصل يمكن حسابها بالشكل التالي :

$$atan^2[\hat{g}_1(\delta)\,.\,\hat{g}_2(\delta)\,] = \begin{cases} atan\left(\frac{\hat{g}_2(\delta)}{\hat{g}_1(\delta)}\right) & if\quad \theta > 0 \\ \pi + \ atan\left(\frac{\hat{g}_2(\delta)}{\hat{g}_1(\delta)}\right) & if\ \hat{g}_2(\delta)\ \ge 0\ \ \hat{g}_1(\delta).< 0 \\ -\pi + atan\left(\frac{\hat{g}_2(\delta)}{\hat{g}_1(\delta)}\right) & if\ \hat{g}_2(\delta)\ \ < 0\ \ .\hat{g}_1(\delta)\ < 0 \\ \frac{\pi}{2} & if\ \hat{g}_2(\delta) > 0\ \ .\hat{g}_1(\delta)\ \ = 0 \\ \frac{-\pi}{2} & if\ \ \hat{g}_2(\delta)\ < 0\,.\ \ \hat{g}_1(\delta)\ = 0 \\ undefined & if\,\hat{g}_2(\delta)\ = 0\ \ \hat{g}_1(\delta).= 0 \end{cases}$$

$$\hat{g}_1(\delta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin(y_i)\ W(\theta_i\ -\delta) \qquad \ldots \qquad (25)$$

$$\hat{g}_2(\delta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} cos(y_i)\ W(\theta_i\ -\delta) \qquad \ldots \qquad (26)$$

W تمثل الوزن .

يمكن أعطاء أوزان النواة عن طريق أخذ نواة دائرية كدالة للوزن :

$$W(\theta_i - \delta) = n^{-1}K_v(\theta_i - \delta)\left\{\sum_{i=1}^{n} K_v\,(\theta_i - \delta)\ sin^2\,(\theta_i - \delta) - \sin(\theta_i - \delta)\sum_{i=1}^{n} K_v\,(\theta_i - \delta)\ \sin(\theta_i - \delta)\right\} \qquad \ldots(27)$$

تشير : K_v الى النواة الدائرية و v معلمة التمهيد

Meilán-Vila, A. (2020) . (Oliveira, M., Crujeiras, 2014)

3- الجانب التجريبي و التطبيقي

3-1 الجانب التجريبي

تم تقديم انموذجين للأنحدار شبه المعلمي الدائري -الخطي الدائري، يختلف كل أنموذج عن الآخر بأختلاف **Circular Kernel**(النواة الدائرية) وأختلاف معلمة الدمج .

3-1-1 المحاكاة Simulation

وهي عملية تصميم أنموذج مشابه للنظام الحقيقي في المعطيات والفرضيات لغرض معرفة سلوك النظام الحقيقي والحصول على نتائج تساعد في أتخاذ القرار . يعرف ايضاً بأنها أحد الأساليب التي تستعمل لتوليد بيانات لغرض تحليلها دون الحاجة الى أجراء تجربة حقيقية ومراقبتها وتسجيل البيانات .وهي ايضاً أسلوب يستعمل أنموذج رياضي نظري شبيه او أنموذج بديل للأنموذج الحقيقي دون المحاولة للحصول على الأنموذج الحقيقي. Jawad, Ali Muhammad.(2023).

3-1-3 توليد البيانات :

1- تم استعمال اربعة أحجام للعينة (n= 50 , 150 , 300 , 400) ولكل تجربة محاكاة تكرارات (1500) .

الجانب التجريبي للجزء المعلمي :

1- اختيار أنموذج الأنحدار البسيط :

$$y_i = \beta_0 + \beta x_i + \varepsilon_i \ (mod\ 2\pi) \qquad \dots (28)$$

وأختيار قيم افتراضية للمعلمات كما في الجدول ادناه :

رقم التجربة	B_0	B_1
1	1.5	1
2	0.9	1.9
3	0.05	2.5

ويكون التقدير بطريقة الأمكان الأعظم (MLE)

تم توليد البيانات للمتغير الدائري والمتغير الخطي في الأنموذج المعلمي بأستخدام الدوال الشرطية ويفضل ذلك عند الأهتمام بدراسة المتغير الدائري بناءاً على قيم المتغير الخطي .

المصدر(Imoto, T., Shimizu, K., & Abe, T. (2019). A cylindrical distribution with heavy-tailed (linear part. *Japanese Journal of Statistics and Data Science*, *2*, 129-154.

1- توليد بيانات المتغير التابع (y_i) حسب التوزيع الخطي – الدائري وتم أستعمال التوزيع الشرطي وهو توزيع فون ميزس $(\varepsilon_i \sim VN\ (\mu\ , \frac{vx}{\sigma^2}))$ حسب الدالة :

$$f(y/x) = \frac{1}{2\pi I_0\left(\frac{vx}{\sigma^2}\right)} \ .\ exp\left\{\frac{vx}{\sigma^2}\ \cos(y-\mu)\right\}$$

بفرض : μ=0 و $v\ , \sigma^2 = 1$

2- المتغير المستقل (x_i) يتوزع التوزيع الشرطي الطبيعي حسب الدالة :

$$f(x/y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ .\ exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \lambda + \mathrm{v}\cos(\mathrm{y}-\mu))^2\right\}$$

بفرض : $\sigma^2 = 1$ و $\lambda\ , v = 0$

3- توليد الأخطاء العشوائية بفرض انها تتوزع توزيع دائري وتم افتراض توزيع فون ميزس(VM) .

$\varepsilon_i \sim VN\ (\mu\ , v)$ ، بفرض : μ=0 و $v = 1$

الجانب التجريبي للجزء اللامعلمي :

1- اختيار أنموذج الأنحداراللامعلمي :

$$y_i = g(\theta_i) + \varepsilon_i \ (mod\ 2\pi)$$

يكون تقدير الأنحدار اللامعلمي من خلال تقدير دالة كثافة النواة الدائرية (Kernel Density Estimation) وتم استعمال نوعين من دوال النواة الدائرية :

1- فون ميزس (Von Mesis) :

بفرض معلمة تركيز تأخذ ثلاث قيم (v = 0.25 , 0.50 , 0.75)

توليد بيانات المتغيرالدائري (θ_i) يتوزع توزيع فون ميزس (VM) حسب الدالة :

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi\ I_0\ (k)} \exp\{v \cos(\theta - \mu)\}$$

2- كوشي المغلف (Wrapped Cauchy) :

بفرض معلمة تركيز تأخذ ثلاث قيم (p =0.25 , 0.50 , 0.75)

توليد بيانات المتغيرالدائري (θ_i) يتوزع توزيع كوشي الملفوف (WC) حسب الدالة :

$$f(\theta) \quad = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1-p^2}{1+p^2-2pcos(\theta-\mu)}$$

الجانب التجريبي لأنموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري -الخطي-الدائري المدمج :

$$y_i = (1-\alpha)f(x_i.\beta)+\alpha\, g(\theta_i)+\ \varepsilon_i$$

وتم أختيار معلمة دمج بثلاث قيم لكل تجربة :

رقم التجربة	*قيم معلمة الدمج* α		
1	0.05	0.01	0.1
2	0.2	0.5	0.7
3	0.3	0.6	0.9

3-1-2 الجانب التجريبي لبناء انموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري - الخطي - الدائري المدمج بأستعمال دوال نواة مختلفة

تم أختيار الأنموذج شبه المعلمي الدائري-الخطي-الدائري المدمج الأفضل وحسب الصيغة :

$$y_i = (1-\alpha)f(x_i.\beta)+\alpha\, g(\theta_i)+\ \varepsilon_i$$

من خلال بناء العديد من الأنموذجات شبه المعلمي الدائري -الخطي الدائري المدمج بأجراء العديد من تجارب المحاكاة يتضمن كل جدول (case 27) أي (27 أنموذج) وبأستعمال طريقة الأمكان الأعظم في تقدير الجزء المعلمي واستخدام طريقة تقدير دالة النواة الدائرية(Kernel Density Estimation) في تقدير الجزء اللامعلمي وبواسطة دالة فون ميزس (Von Mesis) ودالة نواة كوشي المغلف (Wrapped Cauchy) . أذ تم تغيير القيم الأفتراضية لمعلمات كل أنموذج واختيار الأنموذج الأفضل على أساس متوسط مربع الخطأ (MSE) ومعامل التحديد (R^2) . وتم إعادة بناء كل انموذج بأستعمال حجوم عينات مختلفة (50,200.300.400) . للحصول على افضل انموذج ، تمت المقارنة بين الأنموذجات الأفضل التي تم بناءها من كل تجربة وحسب نوع دالة النواة المختارة كما يأتي :

1- بأستعمال دالة نواة فون ميزس (Von Mesis)

الجدول (3) مقارنة أنموذجات الأنحدار شبه المعلمي الدائري-الخطي-الدائري المدمج المقدرة بأستعمال دالة النواة فون ميزس (VM) لتقدير الجزء اللامعلمي لحجوم عينات (50,200,300,400)

حجم العينة	الأنموذج شبه المعلمي الدائري-الخطي-الدائري المدمج	معلمة التركيز	MSE	R^2
50	$\widehat{y_1} = 0.98\,(6.34 + 1.28x_i) + 0.02\hat{g}(\theta_i)$	0.25	0.8208	0.7514
	$\widehat{y_2} = 0.77\,(1.32 + 1.86x_i) + 0.23\hat{g}(\theta_i)$	0.50	0.7640	0.8528
	$\widehat{y_3} = 0.84\,(0.72 + 2.69x_i) + 0.16\hat{g}(\theta_i)$	0.25	0.8817	0.8966
200	$\widehat{y_1} = 0.98\,(2.38 + 1.03x_i) + 0.02\hat{g}(\theta_i)$	0.50	0.8188	0.7568
	$\widehat{y_2} = 0.90\,(1.21 + 1.95x_i) + 0.10\hat{g}(\theta_i)$	0.50	0.7653	0.8574
	$\widehat{y_3} = 0.92\,(0.89 + 2.49x_i) + 0.08\hat{g}(\theta_i)$	0.25	0.8543	0.8978
300	$\widehat{y_1} = 0.99\,(1.18 + 1.45x_i) + 0.01\hat{g}(\theta_i)$	0.25	0.7121	0.7651
	$\widehat{y_2} = 0.65\,(1.71 + 1.88x_i) + 0.35\hat{g}(\theta_i)$	0.50	0.7422	0.8581
	$\widehat{y_3} = 0.82\,(0.85 + 2.57x_i) + 0.18\hat{g}(\theta_i)$	0.25	0.8337	0.8991
400	$\widehat{y_1} = 0.98\,(2.24 + 1.07x_i) + 0.02\hat{g}(\theta_i)$	0.75	0.7381	0.7971
	$\widehat{y_2} = 0.84\,(1.72 + 1.90x_i) + 0.16\hat{g}(\theta_i)$	0.75	0.7063	0.8964
	$\widehat{y_3} = 0.66\,(0.85 + 2.48x_i) + 0.44\hat{g}(\theta_i)$	0.75	0.7047	0.8997

يتبين من الجدول (3) العديد من أنموذجات الأنحدار شبه المعلمي الدائري – الخطي – الدائري المدمج المقدرة وفقاً لحجوم عينات مختلفة (50,200,300,400) تم الحصول على ثلاث أنموذجات من كل حجم وتحديد الأنموذج الأفضل من كل تجربة وبأستعمال دالة نواة فون ميزس (VM) . تم الحصول على كل انموذج في الجدول أعلاه من خلال اختيار انموذج واحد من كل تجربة تتضمن (case 27) . حققت الأنموذج عند الحالة (case 6) وحجم 400 أفضل أنموذج كما في الجدول (4) الآتي :

جدول (4) أنموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري–الخطي–الدائري المدمج بأستعمال دالة النواة (VM) للجزء اللامعلمي ولحجم (400) يبين (MSE , R^2) للمقدرات بتباين مفروض (0.25, 0.5 , 1) وقيم معلمة الدمج (0.3 , 0.6 , 0.9)

$$y_i = (1-\alpha) f(x_i.\beta) + \alpha\, g(\theta_i) + \varepsilon_i$$

σ^2	parameter	معلمة الدمج α		معلمة التمهيد v	MSE	R^2	AIC	BIC
1	$B_0 = 0.05$ $B_1 = 2.5$	0.3	Case1	0.25	0.7513	0.8869	211.1671	216.9032
			Case2	0.50	0.7465	0.8749	243.1603	248.8964
			Case3	0.75	0.7463	0.8896	279.5580	285.2941
		0.6	Case4	0.25	0.7134	0.8837	256.9184	262.6544
			Case5	0.50	0.7639	0.8846	254.2894	260.0254
			Case6	0.75	0.7047	0.8997	260.6818	266.4178
		.9	Case7	0.25	0.7347	0.8782	246.6177	252.3537
			Case8	0.50	0.7431	0.8893	248.8353	254.5713
			Case9	0.75	0.7641	0.8907	245.6719	251.4080
0.8	$B_0 = 0.05$ $B_1 = 2.5$	0.3	Case10	0.25	0.7663	0.8674	259.9763	265.7124
			Case11	0.50	0.7966	0.8683	246.9906	252.7266
			Case12	0.75	0.7419	0.8597	284.7892	290.5253
		0.6	Case13	0.25	0.7349	0.8871	236.0632	241.7993
			Case14	0.50	0.7431	0.8897	233.0760	238.8120
			Case15	0.75	0.7984	0.8649	230.2907	236.0268
		.9	Case16	0.25	0.7410	0.8607	220.6163	226.3524
			Case17	0.50	0.7361	0.8649	236.6690	242.4051
			Case18	0.75	0.7448	0.8673	254.4712	260.2073
0.6	$B_0 = 0.05$ $B_1 = 2.5$	0.3	Case19	0.25	0.7407	0.8671	232.8040	238.5400
			Case20	0.50	0.7009	0.8698	218.6306	224.3666
			Case21	0.75	0.60647	0.8807	254.2429	259.9790
		0.6	Case22	0.25	0.7128	0.8764	240.1654	245.9014
			Case23	0.50	0.7079	0.8708	219.6933	225.4294
			Case24	0.75	0.6647	0.8797	197.6301	203.3662
		.9	Case25	0.25	0.7962	0.8782	231.8463	237.5824
			Case26	0.50	0.7461	0.8074	222.0312	227.7672
			Case27	0.75	0.7076	0.8797	175.0593	180.7954

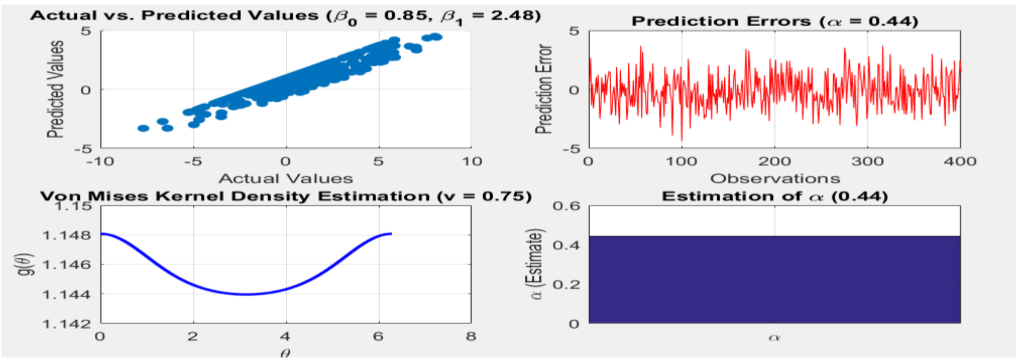
يتضح من الجدول رقم (3) الآتي :

- تأثير الجزء المعلمي (المتغير الخطي) قوي جداً وضعف تأثير الجزء اللامعلمي (المتغير الدائري) لجميع الأنموذجات المختارة من الجداول الممثلة لكل تجربة .
- الأنموذج الأفضل ألذي حقق اقل قيمة لمتوسط مربع الخطأ البالغة (MSE =7047) ، حقق أعلى قوة تفسيرية من خلال قيمة معامل التحديد البالغة ($R^2 = 8997$) التي تفسر حجم تأثير المتغيرات المستقلة على المتغير التابع يعني ذلك ان أداء انموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري الخطي – الدائري المدمج جيد جداً وبمعلمة دمج ($\alpha = 0.44$) وبقيمة تباين ($\sigma^2 = 1$)
- أنخفاض متوسط مربع الخطأ (MSE) عند الحجم 400 مما يدل على انخفاضه مع حجوم العينات الكبيرة .
- معلمة التمهيد المقدرة ($\hat{v}$) اخذت اعلى القيم عند الحجم 400 مما ساهم في زيادة مرونة الجزء اللامعلمي في الأنموذج .كما يتضح من الشكل (1) :
- المخطط في الجهة العليا الأيسر(Actual vs. Predicted Values) المحور الأفقي يمثل القيم الفعلية (Actual Values) للبيانات المستهدفة ، والمحور الرأسي يمثل المتنبأ بها (Predicted Values) يتضح أن هناك علاقة خطية بين القيم الفعلية والقيم المتنبأ بها حيث كانت النقاط تتبع خطاً قطرياً من اليسار الى اليمين (زاوية 45 درجة تقريباً) هذا يعني ان الأنموذج يحقق تنبؤاً جيد مع وجود بعض الأنحرافات الصغيرة في التنبؤات عند المقدرات ($b_0 =$ 0.85 , $b_1 = 2.48$) .

- المخطط العلوي في الجهة اليمنى يشير الى أخطاء التنبؤ (Prediction Error) عند قيمة ($\hat{\alpha} = 0.44$). مثل المحور الأفقي المشاهدات (Observations) والمحور الرأسي يمثل أخطاء التنبؤ لكل ملاحظة تتراوح بين قيم سالبة وقيم موجبة فهي موزعة بشكل عشوائي حول الصفر مما يعني وجود بعض الأنحرافات عن القيم الفعلية.
- المخطط السفلي الأيسر يعرض تقدير كثافة النواة (Kernel Density Estimation) بأستخدام دالة نواة Von Misis (VM) للجزء اللامعلمي في الأنموذج حيث مثل المحور الأفقي قيم المتغير الدائري (θ) والمحور الرأسي مثل قيمة دالة الكثافة $g(\theta)$ و هي تأخذ شكل منحنى وبأستعمال معلمة التركيزالمقدرة ($\hat{v} = 0.75$) تشير الى التشتت في تقدير الكثافة و هي تتحكم بشكل المنحنى حيث تمثل مدى دقة النواة في تقدير القيم حول θ .
- المخطط السفلي الأيمن (Estimation of α) يعرض قيمة ($\hat{\alpha} = 0.44$) المقدرة و هي تمثل معلمة الدمج الجزء المعلمي واللامعلمي في النموذج ، المحور الرأسي يعرض قيمة (α) المقدرة مما يشير الى مقدار مساهمة الجزء اللامعلمي في اللأنموذج التنبؤي .

يمكن صياغة الأنموذج بالمعادلة و الشكل ادناه :

$$\widehat{y_3} = 0.66\ (0.85 + 2.48x_i) + 0.44\hat{g}(\theta_i) \quad \ldots \quad (29)$$



الشكل (1) يشير الى المقدرات المعلمية واللامعلمية للنموذج الثالث بواسطة (VM) ومعلمة الدمج لحجم (400)

2- بأستعمال دالة نواة Wrapped Cauchy (WC)

الجدول (4) مقارنة أنموذجات الأنحدار شبه المعلمي الدائري-الخطي-الدائري المدمج المقدرة بأستعمال دالة النواة كوشي المغلف (WC) لتقدير الجزء اللامعلمي لحجوم عينات (50,200,300,400)

حجم العينة	الأنموذج شبه المعلمي الدائري-الخطي-الدائري المدمج	معلمة التركيز (ρ)	MSE	R^2
50	$\widehat{y_1} = 0.94\ (6.22 + 1.01x_i) + 0.06\hat{g}(\theta_i)$	0.05	0.7204	0.8704
	$\widehat{y_2} = 0.98\ (1.71 + 2.14x_i) + 0.02\hat{g}(\theta_i)$	0.20	0.6995	0.8709
	$\widehat{y_3} = 0.85\ (0.68 + 2.45x_i) + 0.15\hat{g}(\theta_i)$	0.05	0.6525	0.9155
200	$\widehat{y_1} = 0.96\ (1.24 + 0.93x_i) + 0.04\hat{g}(\theta_i)$	0.80	0.9650	0.8584
	$\widehat{y_2} = 0.58\ (1.64 + 1.93x_i) + 0.42\hat{g}(\theta_i)$	0.20	0.5738	0.9621
	$\widehat{y_3} = 0.93\ (0.79 + 2.53x_i) + 0.07\hat{g}(\theta_i)$	0.80	0.7253	0.9729
300	$\widehat{y_1} = 0.99(2.88 + 0.91x_i) + 0.01\hat{g}(\theta_i)$	0.80	0.9139	0.9201
	$\widehat{y_2} = 0.97\ (2.76 + 1.01x_i) + 0.03\hat{g}(\theta_i)$	0.80	0.5752	0.9548
	$\widehat{y_3} = 0.72\ (0.89 + 1.17x_i) + 0.28\hat{g}(\theta_i)$	0.80	0.7243	0.9723
400	$\widehat{y_1} = 0.46\ (2.28 + 1x_i) + 0.54\hat{g}(\theta_i)$	0.80	0.9041	0.9511
	$\widehat{y_2} = 0.98\ (1.66 + 2x_i) + 0.02\hat{g}(\theta_i)$	0.80	0.5647	0.9517
	$\widehat{y_3} = 0.69\ (1.72 + 3.01x_i) + 0.31\hat{g}(\theta_i)$	0.20	0.5379	0.9764

يتبين من الجدول (4) العديد من أنموذجات الأنحدار شبه المعلمي الدائري – الخطي – الدائري المدمج المقدرة وفقاً لحجوم عينات مختلفة وبأستعمال دالة نواة كوشي المغلف (WC) تم الحصول على كل انموذج في الجدول أعلاه من خلال اختيار انموذج واحد من كل تجربة يتضمن كل جدول (case 27) تتفاوت كل حالة عن الأخرى بالقيمة الأفتراضية لكل من (التباين) (σ^2) ، ومعلمة التركيز (ρ) وقيم معلمات الجزء المعلمي الأفتراضية (b_0 و b_1) و معلمة الدمج (α) كما في الجدول (5) أدناه :

جدول (5) أنموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري-الخطي-الدائري المدمج بأستعمال دالة النواة كوشي المغلف (WC) للجزء اللامعلمي ولحجم (400) يبين (MSE , R^2) للمقدرات بتباين مفروض (1 , 0.5 ,0.25) وقيم معلمة الدمج (0.3 , 0.6 , 0.9)

$$y_i = (1-\alpha)f(x_i.\beta) + \alpha\, g(\theta_i) + \varepsilon_i$$

σ^2	parameter	معلمة الدمج α	rho	cases	MSE	R^2	AIC	BIC
1	$0.05B_0 = B_1 = 2.5$	0.3	0.05	Case1	0.6378	0.95381	416.2929	528.2673
			0.2	Case2	0.6524	0.95374	450.1481	562.1224
			0.8	Case3	0.6488	0.95401	443.4394	555.4137
		0.6	0.05	Case4	0.5611	0.97109	216.4026	328.3770
			0.2	Case5	0.5379	0.9764	233.1953	265.1697
			0.8	Case6	0.5374	0.9749	226.0846	338.0590
		0.9	0.05	Case7	0.6531	0.9559	218.8595	330.8339
			0.2	Case8	0.6855	0.9558	226.6311	338.6055
			0.8	Case9	0.6337	0.9563	295.0826	307.0570
0.5	$0.05B_0 = B_1 = 2.5$	0.3	0.05	Case10	0.6176	0.7497	263.8176	375.7920
			0.2	Case11	0.6086	0.7457	317.4650	329.4394
			0.8	Case12	0.6941	0.7593	304.4175	316.3918
		0.6	0.05	Case13	0.5488	0.9077	275.6344	387.6088
			0.2	Case14	0.5434	0.9083	343.1897	355.1640
			0.8	Case15	0.5373	0.9087	375.7797	387.7541
		0.9	0.05	Case16	0.7684	0.8361	342.7767	354.7511
			0.2	Case17	0.7299	0.8393	338.6490	350.6234
			0.8	Case18	0.7107	0.8357	347.1577	359.1321
0.25	$0.05B_0 = B_1 = 2.5$	0.3	0.05	Case19	0.9641	0.69387	349.3817	361.3561
			0.2	Case20	0.9219	0.6693	307.1159	319.0903
			0.8	Case21	0.9277	0.66711	341.0265	353.0009
		0.0.6	0.05	Case22	0.6814	0.7363	325.2208	337.1952
			0.2	Case23	0.6837	0.7384	371.6459	383.6203
			0.8	Case24	0.7222	0.7364	253.9530	365.9274
		0.9	0.05	Case25	0.8930	0.7479	320.0278	332.0022
			0.2	Case26	0.8674	0.7506	315.3714	327.3458
			0.8	Case27	0.8447	0.7511	264.9523	376.9267

وعند مقارنة الأنموذجات في الجدول (4) نلاحظ الآتي :

- يتبين من الجدول ان تأثير الجزء المعلمي (المتغير الخطي) قوي جداً وضعف تأثير الجزء اللامعلمي (المتغير الدائري) لجميع الأنموذجات المختارة من الجداول الممثلة لكل تجربة .
- واضح من النتائج تذبذب في قيم (MSE) ، وقيم معامل التحديد (R^2) ايضاً فيها تذبذب واضح ويعطي قيم جيدة لجميع الأنموذجات مما يدل على قوة تفسير المتغيرات المستقلة للمتغير التابع
- من خلال النتائج في الجدول نلاحظ ان الأنموذج الأفضل ألذي حقق اقل قيمة لمتوسط مربع الخطأ البالغة (MSE =0.5379) ، حقق أعلى قوة تفسيرية من خلال قيمة معامل التحديد البالغة ($R^2 = 0.9764$) التي تفسر حجم تأثير المتغيرات المستقلة على المتغير التابع يعني ذلك ان أداء انموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري الخطي – الدائري المدمج جيد جداً وبمعلمة دمج ($\alpha = 0.31$) وبلغت قيمة معلمة التركيز ($\hat{\rho} = 0.20$) صياغة الأنموذج بالمعادلة والشكل ادناه :

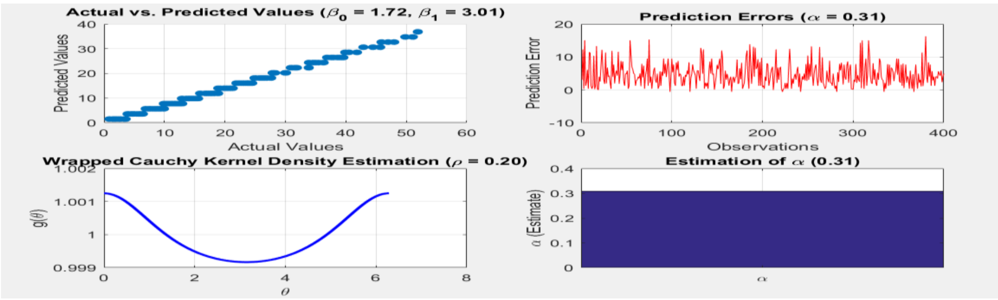
$$\widehat{y_3} = 0.69\,(1.72 + 3.01x_i) + 0.31\hat{g}(\theta_i) \quad \ldots \quad (30)$$

يشمل الشكل (2) :

- المخطط في الجهة العليا الأيسر(Actual vs. Predicted Values) المحور الأفقي يمثل القيم الفعلية (Actual Values) للبيانات المستهدفة ، والمحور الرأسي يمثل المتنبأ بها (Predicted Values) يتضح أن هناك علاقة خطية بين القيم الفعلية والقيم المتنبأ بها حيث كانت النقاط تتبع خطاً قطرياً من اليسار الى اليمين (زاوية 45 درجة

تقريباً) هذا يعني ان الأنموذج يحقق تنبؤاً جيد مع وجود بعض الأنحرافات الصغيرة في التنبؤات عند المقدرات $(b_0 = 1.72 \quad , \; b_1 = 3.01)$.

- المخطط العلوي في الجهة اليمنى يشير الى أخطاء التنبؤ (Prediction Error) عند قيمة $(\hat{\alpha} = 0.31)$. مثل المحور الأفقي المشاهدات (Observations) والمحور الرأسي يمثل أخطاء التنبؤ لكل ملاحظة تتراوح بين قيم سالبة وقيم موجبة فهي موزعة بشكل عشوائي حول الصفر مما يعني وجود بعض الأنحرافات عن القيم الفعلية.
- المخطط السفلي الأيسر يعرض تقدير كثافة النواة (Kernel Density Estimation) بأستخدام دالة نواةً Wrapped Cauchy (WC) للجزء اللامعلمي في الأنموذج حيث مثل المحور الأفقي قيم المتغير الدائري (θ) والمحور الرأسي مثل قيمة دالة الكثافة $g(\theta)$ وهي تأخذ شكل منحنى وبأستعمال معلمة التركيز $(\rho = 0.20)$ تشير الى التشتت في تقدير الكثافة وهي تتحكم بشكل المنحنى حيث تمثل مدى دقة النواة في تقدير القيم حول θ .
- المخطط السفلي الأيمن (Estimation of α) يعرض قيمة $(\alpha = 0.31)$ المقدرة وهي تمثل معلمة دمج الجزء المعلمي واللامعلمي في النموذج ، المحور الرأسي يعرض قيمة (α) المقدرة مما يشير الى مقدار مساهمة الجزء اللامعلمي في اللأنموذج التنبؤي .



الشكل (2) يشير الى المقدرات المعلمية والامعلمية بواسطة دالة النواة كوشي (WC) ومعلمة الدمج لحجم (400)

2-3 الجانب التطبيقي

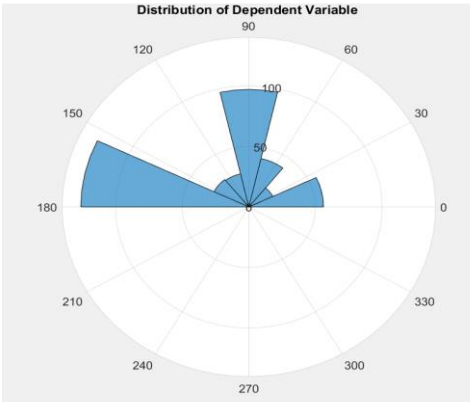
1-2-3 مقدمة Introduction

الهدف من هذا الفصل هو الحصول على أنموذج أن أنموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري -الخطي – الدائري المدمج يعطي صورة واضحة لتأثير الأصابة بمرض الخطأ ألأنكساري(**Refractive Error**) وتأثير كل من العين اليسرى المصابة وعمر المصاب على العين اليمنى . يتطلب الحفاظ على الوظيفة البصرية تحسينها بفهم الخطأ الأنكساري (**Refractive Error**) والتغيرات المرتبطة بالعمر ، تعمل العين البشرية كنظام بصري يركز الصور المرئية على الشبكية ، أذ ان الخطأ الأنكساري هو أحد الأسباب الرئيسية لتدهور صورة الشبكية في العيون غير المصححة (Namba, H., Sugano & others , 2020)

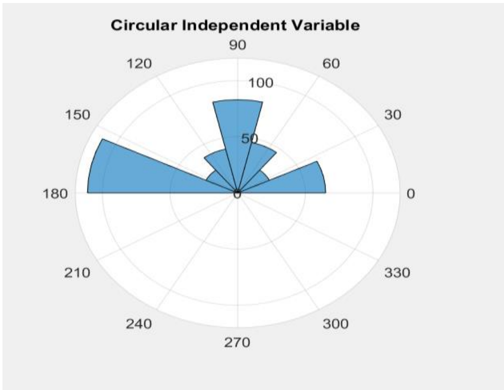
2-2-3 البيانات الحقيقية

تكونت البيانات الحقيقية للخطأ الأنكساري (**Refractive Error**) للعين اليمنى (OD) مثل المتغير المعتمد (y) وبيانات العين اليسرى (OS) مثلت المتغير التوضيحي (θ) والمتغير التوضيحي (X) مثل العمرلمرضى الخطأ الأنكساري لعينة مكونة من (400) حالة +وتم تمثيل البيانات بالأشكال أدناه :

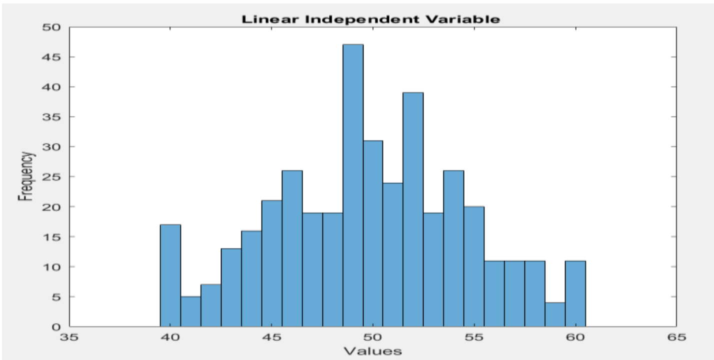
يتضح من الشكل (3) توزيع البيانات الحقيقية ضمن دائرة الوحدة للمتغير لبيانات الخطأ الأنكساري للعين اليمنى والذي يمثل المتغير المعتمد. أيضا نلحظ من الشكل (4) البيانات الحقيقية لمتغير الخطأ الأنكساري للعين اليسرى وهي موزعة ضمن دائرة الوحدة وتمثل المتغير التوضيحي للجزء اللامعلمي للأنموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري – الخطي – الدائري المدمج ويبين الشكل (5) التوزيع الطبيعي لمتغير العمر لحالات الخطأ الأنكساري .



شكل (3) الشكل في الجهة اليمنى البيانات الحقيقية للعين اليمنى لمرضى ألخطأ ألأنكساري



الشكل (4) في الجهة اليسرى البيانات الحقيقية للعين اليسرى لمرضى ألخطأ ألأنكساري



شكل (5) البيانات العمرية الحقيقية لمرضى ألخطأ ألأنكساري

3-2-3 تقدير معلمات ألنموذج : Estimatiom of model Parameters

تم تقدير معلمات الجز المعلمي لأنموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري -الخطي – الدائري المدمج أذ ممثل المتغير المعتمد (y) بيانات مرضى الخطأ ألأنكساري للعين اليمنى ، ومثل المتغير (x) البيانات العمرية لمرضى ألخطأ ألأنكساري النتائج موضحه كما في الجدول أدناه :

جدول (6) تقدير معلمات الجزء المعلمي لأنموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري -الخطي – الدائري المدمج

Parameter / Method	$\hat{B}_0$	$\hat{B}_1$
الأمكان الأعظم MLE	0.9632	2.6412

نلحظ من الجدول (6) قيم المعلمات التي تم تقديرها للجزء المعلمي هي متقاربة مع القيم المقدرة بأستعمال البيانات المولدة في الجانب التجريبي (المحاكاة)

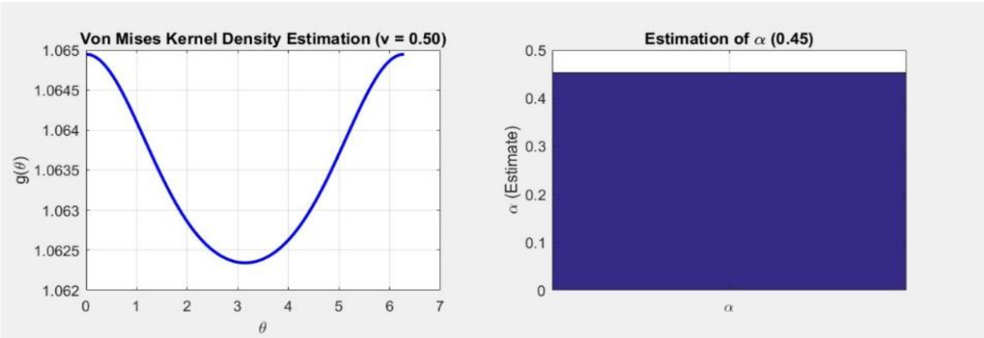
- الشكل (6) المخطط الأيسر يعرض تقدير كثافة النواة (Kernel Density Estimation) بأستخدام دالة نواة Von Mises للجزء اللامعلمي في الأنموذج حيث مثل المحور الأفقي قيم المتغير الدائري (θ)الممثلة لبيانات الخطأ الأنكساري للعين اليسرى والمحور الرأسي مثل قيمة دالة الكثافة المقدرة للبيانات الحقيقية$g(\theta)$ وهي تأخذ

شكل منحنى وبأستعمال معلمة التركيز $(v = 0.50)$ تشير الى التشتت في تقدير الكثافة و هي تتحكم بشكل المنحنى حيث تمثل مدى دقة النواة في تقدير القيم حول θ .

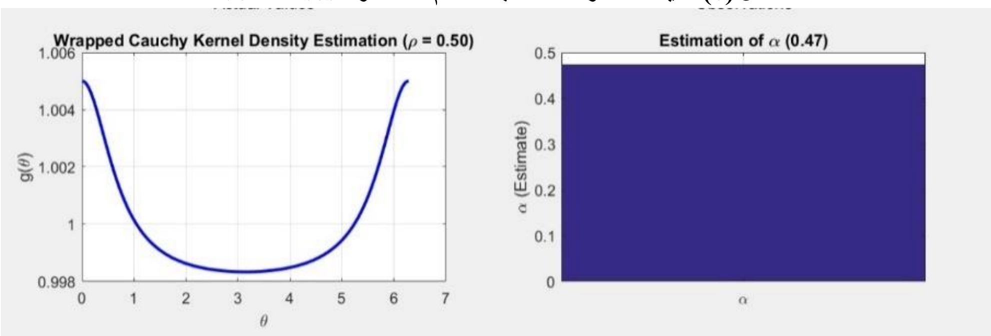
- المخطط الأيمن يمثل قيمة معلمة الدمج المقدرة للبيانات الحقيقية (Estimation of α) ، المحور الرأسي يعرض قيمة (α) المقدرة مما يشير الى مقدار مساهمة الجزء اللامعلمي في اللأنموذج التنبؤي ، أذ بلغت $(\alpha = 0.45)$.

- الشكل ()المخطط الأيسر يعرض تقدير كثافة النواة (Kernel Density Estimation) بأستخدام دالة نواةً(Wrapped Cauchy (WC للجزء اللامعلمي في الأنموذج حيث مثل المحور الأفقي قيم المتغير الدائري (θ) والمحور الرأسي مثل قيمة دالة الكثافة $g(\theta)$ و هي تأخذ شكل منحنى وبأستعمال معلمة التركيزالمقدرة $(\rho = 0.50)$ تشير الى التشتت في تقدير الكثافة و هي تتحكم بشكل المنحنى حيث تمثل مدى دقة النواة في تقدير القيم حول θ .

- االمخطط الأيمن (Estimation of α) يعرض قيمة معلمة الدمج المقدرة و هي تمثل معلمة دمج الجزء المعلمي واللامعلمي في النموذج ، المحور الرأسي يعرض قيمة (α) المقدرة مما يشير الى مقدار مساهمة الجزء اللامعلمي في اللأنموذج التنبؤي بلغت $(\alpha = 0.47)$.



شكل (6) القيمة المقدرة لمعلمة بأستخدام دالة النواة Von Mises



شكل (7) القيمة المقدرة لمعلمة بأستخدام دالة النواة Wrapped Cauchy

4-2-3 المفاضلة بين الأنموذجات المقدرة للبيانات الحقيقية:

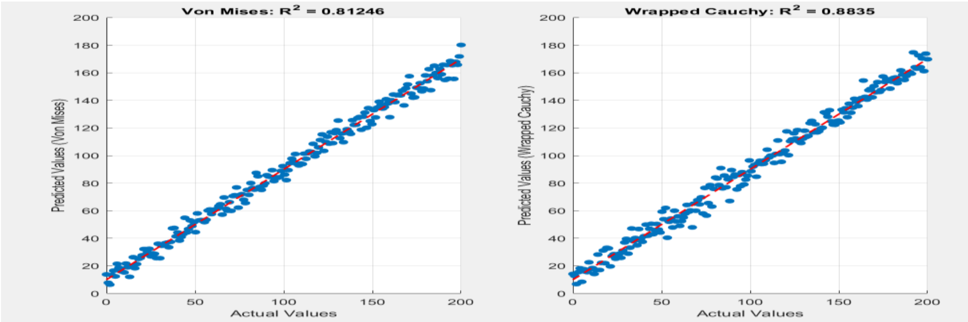
لمعرفة أي الأنموذجين يتفوق في الكفاءة على الأنموذج الآخر سنستعمل معايير المعلومات للمفاضلة بينها وهما معيار المعلومات أكايكي (AIC) ومعيار المعلومات (BIC) أذ تعتمدهذه المعاييرفي حسابها على متوسط مربع الخطأ (MSE) ، يمكن تلخيص نتائج هذه المعايير مع متوسط مربع الخطأ بالجدول أدناه :

جدول (7) يبين معايير المفاضلة لمقدرات أنموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري-الخطي – الدائري المدمج

الأنموذج شبه المعلمي الدائري -خطي – دائري المدمج	MSE	المعايير	
		AIC	BIC
دالة كثافة نواة VM	0.8937	319.0389	324.7749
دالة كثافة نواة WC	0.78322	292.4276	298.1637

نلحظ من الجدول (7) أن أنموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري -الخطي – الدائري المدمج المقدر بأستعمال دالة نواة كوشي المغلف (WC) بمعلمة الدمج المقدرة (0.47) تفوق على أنموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري -الخطي – الدائري المدمج المقدربأستعمال دالة نواة فون ميزس (VM) أذ حقق أقل قيم لكل من متوسط مربع الخطأ (MSE) ومعياري المعلومات (AIC) و(BIC) لذا يعد أنموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري -الخطي – الدائري المدمج . في حين حقق أنموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري -الخطي – الدائري المدمج المقدربأستعمال دالة نواة فون ميزس (VM) أعلى القيم بالنسبة لمتوسط مربع الخطأ (MSE) ومعيار المعلومات (AIC) ومعيار المعلومات (BIC) . جاءت هذه النتائج متفقة مع

نتائج الجانب التجريبي (المحاكاة) في الفصل الثالث عند الحجم (400) حيث كانت الأفضلية أنموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري -الخطي – الدائري بأستعمال دالة نواة كوشي المغلف (WC) . ايضاً حقق الأنموذج شبه المعلمي الدائري -الخطي – الدائري المدمج المقدر بأستعمال دالة نواة كوشي المغلف (WC) أعلى معامل تحديد اذ بلغ (0.8835) يدل ذلك على القوة التفسيرية للمتغيرات التوضيحية بالنسبة للمتغير التابع



شكل (7) يبين (R^2) لأنموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري – الخطي - الدائري

- تُظهر من الشكل (7) العلاقة بين القيم الحقيقية (True Values) والقيم المتوقعة (Fitted Values) من النموذج. الخط الأحمر المنقط يمثل الخط المرجعي(Reference Line) ، حيث تشير النقاط القريبة من هذا الخط إلى أن النموذج يتنبأ بدقة عالية.
- يمكن ملاحظة أن معظم النقاط تقع بالقرب من الخط المرجعي، مما يشير إلى أن النموذج لديه قدرة جيدة على التنبؤ بالقيم الحقيقية. ومع ذلك، هناك بعض النقاط التي تنحرف عن الخط، مما قد يشير إلى وجود قيم شاذة أو مناطق يحتاج النموذج إلى تحسينها.
- الأداء العام للنموذج يبدو جيدًا، حيث أن النقاط تتبع بشكل عام اتجاه الخط المرجعي. هذا يشير إلى أن النموذج قادر على تفسير جزء كبير من التباين في البيانات.
- هناك بعض النقاط التي تبتعد بشكل ملحوظ عن الخط المرجعي، مما قد يشير إلى وجود قيم شاذة في البيانات أو أن النموذج يحتاج إلى تحسين في هذه المناطق".
- دقة النموذج تبدو معقولة، حيث أن معظم النقاط تقع بالقرب من الخط المرجعي. ومع ذلك، يمكن تحسين الدقة من خلال تحسين معلمات النموذج أو إضافة ميزات إضافية

بعد أجراء المقارنة تبين أن أنموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري -الخطي-الدائري المدمج المقدربأستخدام دالة النواة Wrapped Cauchy هو الأنموذج الأفضل وبمعلمة تركيز ذات قيمة معتدلة بلغت ($\rho = 0.50$) ويمكن كتابة معادلة الأنموذج بالصيغة التالية :

$$\hat{y} = 0.63\ (0.9632 + 2.6412x_i) + 0.47\hat{g}(\theta_i) \quad \dots \quad (31)$$

4- الأستنتاجات والتوصيات

1-4 الأستنتاجات

بالنسبة للأنموذج شبه المعلمي الدائري -الخطي-الدائري المدمج :

- يجمع أنموذج ألأنحدار شبه المعلمي الدائري -الخطي-الدائري المدمج يجمع بين المرونة والدقة وتحقيق موثوقيةفي التقدير والتنبؤ بما يتلائم وطبيعة البيانات الدائرية.
- عدم أستقرار نتائج ألأنموذجات في العينات الصغيرة أذ يلاحظ تذبذب قيمة معامل التحديد (R^2) وكذلك متوسط مربع الخطأ (MSE) بين ألأرتفاع والأنخفاض ، قد يكون ذلك بسبب تغيير معلمة التركيز الخاصة بدالة النواة أو بسبب تغيير التباين .
- أستخدام دالة النواة كوشي المغلف (Wrapped Cauchy) في تقدير الجزء اللامعلمي لأنموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري -الخطي-الدائري أفضل من استخدام فون ميزس (Von Mesis)

2-4 التوصيات

- نوصي بتعميم ألأنموذج على بيانات لظواهر أخرى .
- أجراء دراسات حول أنموذج الأنحدار شبه المعلمي الدائري -الخطي-الدائري باعتماد عينات كبيرة لتحسين أستقرار النتائج .
- دراسة أنواع أخرى من أنموذجات ألأنحدار الدائري .

المصادر:

1. Abuzaid, A. H. (2010). *Some problems of outliers in circular data*. University of Malaya (Malaysia).
2. Allahham, N. (2015). *ON THE SIMPLE ANGULAR REGRESSION MODEL WITH WRAPPED CAUCHY ERROR* (Doctoral dissertation, Al Azhar University-Gaza).
3. Alonso-Pena, M., Ameijeiras-Alonso, J., & Crujeiras, R. M. (2021). Nonparametric tests for circular regression. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, *91*(3), 477-500.
4. Ban Ahmed Matras, & Alaa Mahmoud Mohamed. (2013). Using the Albi estimator and k-mean clustering method for hand gesture recognition. AL-Rafidain Journal of Computer Sciences and Mathematics, 10(1).
5. Di Marzio, M., Fensore, S., & Taylor, C. C. (2023). Kernel regression for errors-in-variables problems in the circular domain. *Statistical Methods & Applications*, *32*(4), 1217-1237.
6. Fan, Y., & Ullah, A. (1999). Asymptotic normality of a combined regression estimator. *Journal of* Multivariate *Analysis*, *71*(2), 191-240.
7. Hussen, Namarq Qassem. Mohammed, Laith Ali & Hasan , Rammah Oday . (2022) " Using a semi-parametric regression model to study the most important factors affecting the gross domestic product of oil prices for the period" (1980-2020) . Journal of Algebraic ststistic . Volume 13,No.2 , 2022 , P . 1024-1036 .https:publishoa.com , ISSN:1309-3452
8. Issa, Aseel Muslim. 2011. “Comparison of some semi-parametric estimators for estimating the electrical energy consumption function for the city of Baghdad.” Master’s thesis in statistics. College of Administration and Economics, University of Baghdad.
9. Jawad, Ali Muhammad. 2023 AD “Building and Estimating an Angular Regression Model for Circular Data with a Practical Application” PhD Thesis in Statistics, College of Administration and Economics, University of Karbala.
10. Meilán-Vila, A. (2020). Nonparametric inference for regression models with spatially correlated errors.
11. Namba, H., Sugano, A., Murakami, T., Utsunomiya, H., Nishitsuka, K., Ishizawa, K., ... & Yamashita, H. (2020). Age-related changes in astigmatism and potential causes. *Cornea*, *39*, S34-S38.
12. Oliveira, M., Crujeiras, R. M., & Rodríguez-Casal, A. (2014). CircSiZer: an exploratory tool for circular data. *Environmental and ecological statistics*, *21*, 143-159.
13. Rahman, M., Gokhale, D. V., & Ullah, A. (1997). A note on combining parametric and non-parametric regression. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, *26*(2), 519-529.
14. Rahmani, S., Mohaghegh, S., & Moradnejad, S. (2024). Refractive error and vision related quality of life. *BMC ophthalmology*, *24*(1), 83.
15. Scott, A. (2002). Circular Data: An Overview with Discussion of One-Sample Tests.
16. Tarrad, Alaa Jaber & Hassan, Raad Fadel. 2013 AD “Parametric and semi-parametric regression models (comparative study)”. Master’s thesis in statistics, Al-Mustansiriya University, College of Administration and Economics.
17. Ullah, A., & Vinod, H. D. (1993). 4 General nonparametric regression estimation and testing in econometrics.