توظيف أسلوب التوزيعات الملتفة في بناء توزيع احتمالي (wrapped-zeghdou)

Using the wrapped method to construct a probability distribution (wrapped-zeghdoul)

هدى عبد الحسن عوده الخفاجي ا.د عواد كاظم شعلان الخالدي

Huda Abdul Hassan Awda Al-Khafaj Prof. Awad Kadim Shaalan AL-Khalidi

كلية الادارة والاقتصاد جامعة كربلاء كلية الادارة والاقتصاد جامعة وارث الانبياء

HudaKhafaj@gmail.com Awad.K@uokerbala.edu.iq

المستخلص:

يُعد التوزيع الملتف (Wrapped Distribution) أحد أهم أنواع التوزيعات الاحتمالية في مجال نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها، أذ يستعمل في العديد من المجالات العلمية والهندسية، مثل الإحصاء، والتحليل الرقمي، والمعالجة الرقمية للصور، ومعالجة الإشارات، والذكاء الاصطناعي.

.في هذا البحث تم ايجاد التوزيع الملتف (**distribution wrapped-zeghdoul**) بالاعتماد على التوزيع الاساس الخطي (**distribution -zeghdoul**) ,اذ ان التوزيع المقترح يختص بتحويل البيانات الاعتيادية الى بيانات قطبية (مقاسة بالزوايا) ومن ثم ايجاد اغلب خصائص المقترح (**wrapped-zeghdoui**) الاحصائية والهيكلية للتوزيع المقترح ومن ثم تقدير معلمات التوزيع الجديد بالاعتماد على ثلاثة طرائق في التقدير وهي طريقة الامكان الاعظم (Maximum Likelihood) ،وطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (LS)(Least Squares method) وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ،ولغرض المقارنة بين طرائق تقدير المعلمات ودالة البقاء فقد تم توظيف اسلوب محاكاة مونت كارلو (Monte carlo) باستعمال برنامج بلغة(الماثمتكا) لإجراء عدة تجارب بأحجام عينات مختلفة (صغيرة(30-20)، ومتوسطة(70-50) وكبيرة(100)) بالاعتماد على المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) اظهرت النتائج افضلية طريقة الامكان الاعظم عند حجوم العينات الكبيرة والمتوسطة وكذلك افضلية طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية والمربعات الصغرى الموزونةعند حجو الصغيرة والمتوسطة.

الكلمات المفتاحية : طريقة الامكان الاعظم, وطريقة المربعات الصغرى الموزونة, طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية ,توزيع (**distribution wrapped-zeghdoul**).

Abstract:

The Wrapped Distribution is one of the most important types of probability distributions in the field of theory and its results, as it is used in many specialized scientific fields, such as statistics, digital analysis, digital processing of photographers, witnesses, and artificial intelligence. In this research, the diverse distribution (Wrapped -Zeghdoul distribution) was distributed based on the linear basis distribution (distribution-Zeghdoul), if the data that the proposed distribution is only concerned with the normal to polar (measured by angles) and then the proposed multiple-display Wrapped -Zeghdoul statistical and structural for the proposed distribution and then the parameters of the new distribution based on three methods in estimation, which are the maximum likelihood method (maximum likelihood), the normal large areas method (LS) (least squares method) and the weighted large areas method, and to quickly distinguish between the methods of estimating the parameters and the survival condition, the Monte Carlo simulation method (Monte Carlo) was employed using the canceled program (mathematical) to learn more about different experiments (small) 30-20), medium (70-50) and large (100)) based on the rubber Mean Square Error (MSE). The results showed the superiority of the maximum likelihood method when Large sizes as well as the largest method for the largest normal and large squares small companies when Hajji small large.

Keywords: Maximum likelihood method, weighted large distributions method, ordinary large distributions method, distribution (envelope-Zeghdoul distribution.(

1-المقدمة:

في العديد من المجالات العلمية يتم قياس الظواهر بقياسات معينة منها على شكل كمي ومنها على شكل وصفي ومنها على شكل اتجاه .... الخ . فعندما يتم قياس الظاهر بشكل متجه فتسمى البيانات عند إذ بالبيانات الاتجاهية أو الدائرية . و يمكن وصفها على أنها البيانات التي يتم تمثيلها كنقاط على محيط دائرة الوحدة المتمركزة في الأصل أو كمتجهات وحدة تربط الأصل بهذه النقاط ومن الأمثلة عليها اتجاه الطائر أو اتجاه حيوان أو اتجاه الرياح وغيرها من الظواهر. هذه الأمثلة ذات بعدين يمكن أن تمثل بشكل زاوية يمكن قياسها ، و قد تكون الاتجاهات في ثلاثة أبعاد ممثلة بزاويتين (على غرار تمثيل النقاط على الأرض حسب خطوط الطول والعرض الخاصة بهم) ، كمتجهات وحدة في ثلاثة أبعاد وهذا يسمى بالبيانات الكروية . فالبيانات الدائرية يشترط أن تملك اتجاه مع بعدين فقط . أن مدى البيانات الدائرية يختلف عن نظيرتها في البيانات الاعتيادية إذ إن مدى البيانات

الاعتيادية ممكن أن يكون بين السـالب ما لانهاية إلى ما لانهاية (∞ , -∞) بينما البيانات الدائرية يكون مداها محصـور بين الصفر و 360 درجة (360° , 0°) . كما هناك فرق أخر وهو أن مقدار الزاوية ليس فريدة وإنما تتغير من قيمة إلى قيمة أخرى لأن قيمة الزاوية تعتمد على اختيار ما يسمى بالاتجاه الصفري واتجاه بالدوران فما يعتبر 30 درجة عندما يأخذ الشرق الحقيقي باعتباره الاتجاه الصفري والدوران عكس اتجاه عقارب الساعة.

يعـد علم الإحصـــاء من الفروع الحيويـة في البحـث العلمي، أذ يؤدي دورًا رئيسـا في تحليـل وفهم الظواهر الطبيعيـة والبشـرية,ويندرج في إطار هذا العلم مفهوم البيانات الدورية، وهي البيانات التي تتكرر بشـكل منتظم في فترات زمنية, وتكمن اهمية التوزيع الاحتمـالي في قابليـة التطبيق على بيانـات العـالم الحقيقي وكذلك قدرته على ملائمة البيانات بدقة وفائدته في عمل التنبوءت ورسم روى ذات مغزى عند استعمال اي توزيع في مجال بحث معين فيتم تحديده من خلال مدى استيفائه لهذه المعايير للبيانات والتطبيقات المحددة من خلال نمذجة البيانات الزاوية (الدائرية) التي تعد من التقنيات التطبيقية الوثيقة الصـلة والمهمة للغاية في العديد من المجالات مثل العلوم الفيزيائية والعلوم الطبية وعلم الارصاد الجوي وعلم النفس وغيرها من العلوم.

2-هدف البحث

يهدف البحث الى:

1- بنـاء توزيع احتمـالي جـديـد بـاسـتعمـال نظريـة التوزيعـات الـدائريـة بـالاعتمـاد على اسـلوب (**wrapped distribution**)والذي يختص بتحويل التوزيعات الخطيه الى توزيعات دائرية .

2- اشتقاق خصائص التوزيع الجديد وتقدير معلماته التوزيع المقترح بطرائق مختلفة (طريقة الامكان الاعظم (MLE) وطريقة المربعات الصغرى (LS) وطريقة وطريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS)).

3- اختيار افضـل طريقة لمقدرات دالة البقاء وذلك بالاعتماد على المقياس الاحصـائي متوسـط مربعات الخطاء (MSE) وباستعمال اسلوب المحاكاة واحجام عينات مختلفة.

-4

3-البيانات الدائرية Circular Data

تواجهنا في العالم الحقيقي , أن بعض البيانـات تقع ضـمن الفترة ($0, 2\pi$) تعريف تلك البيـانـات الدائريـة على انها البيانات المقاسة على مقياس دائري، أي أن القيم تمثل كميات دائرية بدلاً من الكميات الخطية. تتضمن أمثلة البيانات الدائرية المحامل أو الزوايا أو الخطوط، وغالبًا ما تكون البوصـلة أو اتجاه الرياح أو الوقت من اليوم أو البيانات البيولوجية أو غيرها. الظواهر السلوكية. دورية، ولكن في الواقع، وفي مجالات مختلفة جدًا، يمكن تمثيل حجم كل ملاحظة على أنها اتجاه. يمكن تمثيل الاتجاه كنقاط على محيط دائرة الوحدة أو كمتجهات وحدة تربط نقطة الأصل بهذه النقاط. ولذلك، تسمى البيانات ثنائية الأبعاد بالبيانات الدائرية. تسمى الصور ثلاثية الأبعاد بالبيانات الكروية. يمكن تمثيل البيانات الدائرية بزاوية θ التي يكون مداها (0، 2π) أو ($-\pi$، π)، وتكون الزاويـة θ دوريـة ,وعـادة مـايتم نمـذجـة هـذه الظواهر عن طريق التوزيعـات الـدائريـة (Circular distributions) , ولكن قد تواجهنا مشكلة ان بعضاً من تلك الظواهر قد تحتاج أن تقع ضمن منتصف المدى الدائري اي ضمن الفترة ($0, \pi$) حيث أن الخاصية الدورية للبيانات الدائرية ليست مفيدة للبيانات نصف الدائرية لأن 0˚ ليست هي نفسها 180˚.

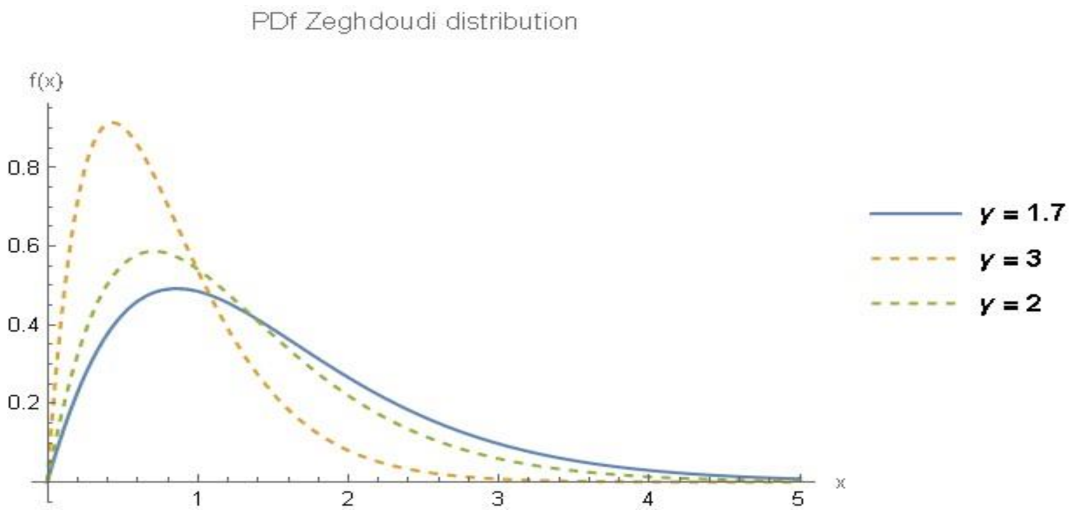
4- توزيع (Zeghdoudi distribution)

تم اقتراح هذا التوزيع من قبل الباحث (Halim Zeghdoudi) عام (2018)يعد توزيع (Zeghdoudi distribution) من التوزيعات الإحصائية المستمرة المختلطة المستعملة بشكل واسع في نمذجة بيانات اوقات الحياة ودالة البقاء وان اكتشاف هذا التوزيع ساهم في تطور الإحصاء بشكل واسع لأهميته في العلوم الطبية ، ونمذجة بيانات الوقت، ويعد أحد نماذج و له العديد من الاسـتعمالات في مختلف المجالات منها في دراسـات البقاء، وكذلك في الدراسـات السـكانية المتمثلة بتوقعات الحياة في جداول الحياة ،وكذلك في موضـوع الرقابة على الجودة وأن هذا التوزيع قابل للتطبيق في العديد من الظواهر الطبيعية كما ويمكن استعماله لنمذجة العديد من العمليات العشوائية.

فان المتغير العشوائي (x) الذي يتبع توزيع (Zeghdoudi distribution) تكون له دالة كثافة احتمالية وفق الصيغة الاتية:

$$f_{ZD}(x;\gamma)=\begin{cases}\dfrac{\gamma^3 x(1+x)e^{-\gamma x}}{2+\gamma} & x,\gamma>0 \\ 0 & ,\text{otherwise}\end{cases} \qquad (1)$$

والمخطط التوضيحي في الشكل (1) يبين بالرسم سلوك دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع Zeghdoudi distribution:-



الشكل (1)سلوك دالة الكثافة الاحتمالية(p.d.f) لتوزيع Zeghdoudi distribution **(من اعداد الباحثة)**

اما دالة الكثافة التجميعية لتوزيع Zeghdoudi distribution يمكن صياغتها بالشكل الاتي:

$$F_{ZD}(x) = 1 - \left(\frac{x^2\gamma^2 + \gamma(\gamma+2)x + \gamma + 2}{\gamma+2}\right)e^{-x\gamma}, x > 0, \gamma > 0 \qquad (2)$$

ون دالة البقاء لتوزيع Zeghdoudi distribution يمكن صياغتها بالشكل الاتي:

$$s_{ZD}(x, \gamma) = \left(\frac{x^2\gamma^2 + \gamma(\gamma+2)x + \gamma + 2}{\gamma+2}\right)e^{-x\gamma} \quad , x > 0, \gamma > 0 \qquad (3)$$

وأن دالة المخاطرة لتوزيعZeghdoudi distribution يمكن صياغتها كالاتي:

$$h_{ZD}(x, \gamma) = \frac{\frac{\gamma^3 x(1+x)e^{-\gamma x}}{2+\gamma}}{\left(\frac{x^2\gamma^2 + \gamma(\gamma+2)x + \gamma + 2}{\gamma+2}\right)e^{-x\gamma}} \qquad (4)$$

5- قاعدة(wrapped distributions) لتوليد التوزيعات الدائرية الملفوفة

في عام (2004) اقترح الباحثان *(***Jammalamadaka, S. R., & Kozubowski, T. J.***)* **دراسة** تضمنت اقتراح عائلة من التوزيعات الملفوفة (*wrapped distributions*) قيد الدراسة التي اشتقت عن طريق التكييف وإسقاط بعض التوزيعات الأسية الكلاسيكية وتم تطبيق القاعدة على التوزيع الاسي وتوزيع لابلاس *(exponential and Laplace distributions)* إذ ناقش الباحثان بعض الخصائص الهيكلية والاحصائية للتوزيعات الملتفة المقترحة مثل دالة الكثافة الاحتمالية والدالة التراكمية ودالة البقاء والمعولية والعزوم المثلثية الانتروبي .

وغلبا ما تستخدم التوزيعات الدائرية لنموذجة البيانات الاتجاهية في بعدين والتي تنشأ بشكل متكرر في العديد من العلوم الطبيعية والفيزيائية مثل علم الاحياء، والطب، وعلم البيئة، والجيولوجيا، وما إلى ذلك. على سبيل المثال، تسجل دراسة هجرة الطيور اتجاهات طيران الطيور التي تم أطالقها للتو أثناء اختفائها في الافق، ويتم قياس زاوية ثني الركبة لتقييم تعافي مرضى العظام.

وأن دالة الكثافة التراكمية لتوزيع wrapped distributions الذي يرمز له بالرمز (WD) يمكن الحصول عليه باستعمال تقنية التوزيعات الملتفة عن طريق الصيغة الآتية.

$$G(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(\theta + 2\pi m) - F(2\pi m) \qquad (5)$$

اذ ان $\mathbf{G(\theta)}$ هي التجميعية للتوزيع الجديد.

$F(\theta)$: دالة الكثافة التراكمية للتوزيع الاصلي.

يمكن أيجاد الدالة الاحتمالية *(*p.d.f) لتوزيع*wrapped distributions* من الدالة الاحتمالية للتوزيع الأصـــلي الخطي عن طريق القاعدة الأتية:

$$g(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(\theta + 2\pi m) \qquad (6)$$

اذ ان $g(\theta)$:هي دالة الكتلة او الكثافة الاحتمالية للتوزيع الجديد.
$f(\theta)$:دالة الكتلة او الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاساس.

6-توزيع (WZD)Wrapped Zeghdoul Distribution

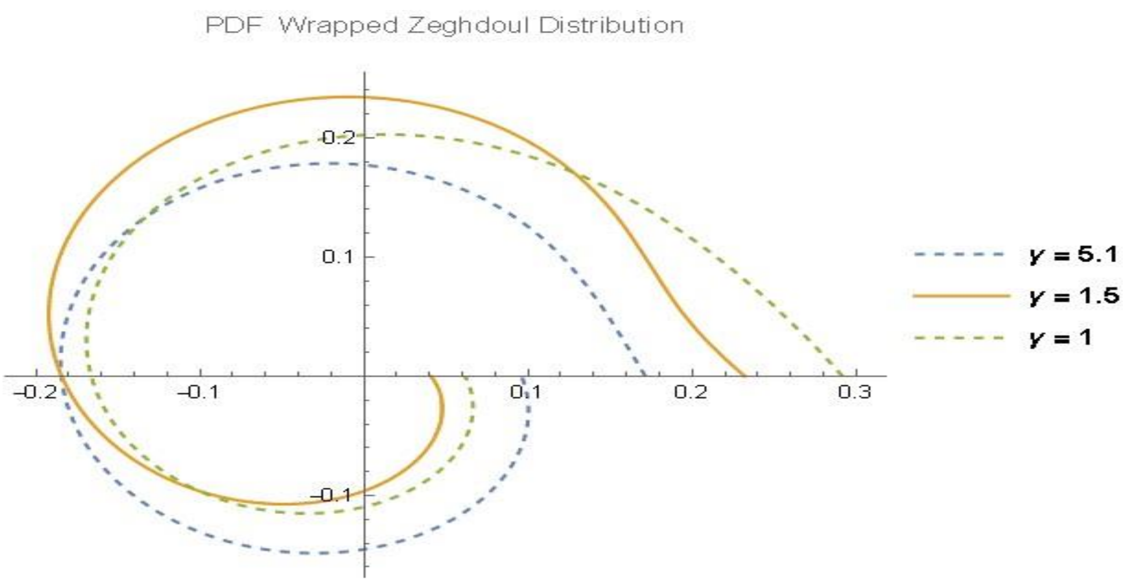
بالاعتماد على معادلة(**1**) ,(**6**) نحصل على الدالة الاحتمالية الجديدة لتوزيع المقترحة لتوزيع (**Wrapped Zeghdoul Distribution**) على النحو الاتي:

$$g(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} f(\theta + 2\pi m)$$

$$g(\theta,\gamma) = \frac{e^{2\pi\gamma-\theta\gamma}\left(4(1+e^{2\pi\gamma})\pi^2 + (-1+e^{2\pi\gamma})^2\theta(1+\theta) + 2(-1+e^{2\pi\gamma})\pi(1+2\theta)\right)\gamma^3}{(-1+e^{2\pi\gamma})^3(2+\gamma)} \quad 0 < \theta < 2\pi;\ \gamma > 0 \qquad (7)$$

شكل (2) ادناه يوضح دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع Wrapped Zeghdoul Distribution باستعمال قيم افتراضية مختلفة للمعلمات:

الشكل (2) يوضح دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع(Wrapped Zeghdoul Distribution)(من اعداد الباحثة)



7 - دالة التوزيع التراكمية لتوزيع (Wrapped Zeghdoul Distribution):

وهي احتمالية فشل الوحدة التجريبية (الماكنة) قبل الوقت **t** ويرمز لها **F(t)** وتسمى ايضا دالة اللامعولية وبالامكان التعبير عنها رياضيا كماياتي :

$$\mathbf{F(x) = pr\ (X \le x), x \ge 0}$$

اذ ان: **t** يمثل الوقت حتى حدوث الفشل

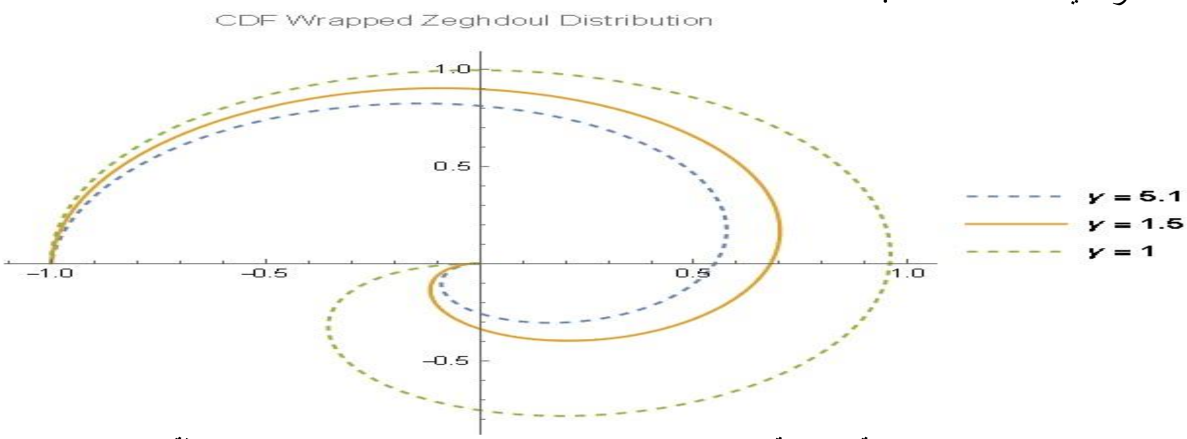
$$\mathbf{F(x) = \int_0^x f(x).dx}$$

اذ تمثل $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية للفشل لزمن **t**

بـا لاعتمـاد على معـادلـة(2 − 10) ,(2 − 17) نحصـــل على الـدالـة الاحتمـاليـة الجـديـدة لتوزيع المقترحـة لتوزيع (Wrapped Zeghdoul Distribution) على النحو الاتي:

$$G(\theta,\gamma) = \frac{e^{2\pi\gamma-\theta\gamma}\left(-4(1+e^{2\pi\gamma})(-1+e^{\theta\gamma})\pi^2 - 2(-1+e^{2\pi\gamma})\pi(-1+e^{\theta\gamma}-2\theta) + (-1+e^{2\pi\gamma})^2\theta(1+\theta)\right)\gamma^3}{(-1+e^{2\pi\gamma})^3(2+\gamma)} \quad (8)$$

الشكل (3) ادناه يوضح الدالة التراكمية لتوزيع ((Wrapped Zeghdoul Distribution **)**باستعمال قيم افتراضية مختلفة للمعلمات:



الشكل (3) **يوضح دالة التجميعية لتوزيع**(Wrapped Zeghdoul Distribution) **(من اعداد الباحثة)**

8- دالة البقاء لتوزيع (Wrapped Zeghdoul Distribution)

دالة البقاء (Reliability function) بانها احتمال أن الوحدة التجريبية (الماكنة) تعمل وعدم فشلها في مدة زمنية معينة (0,t) بمعنى اخر بعد مرور الوقت t، اذ ان ($x > 0$) ، وغالبا ما يرمز لدالة البقاء بالرمز $R(x)$، ويكون التعريف الرياضي على النحو الاتي:

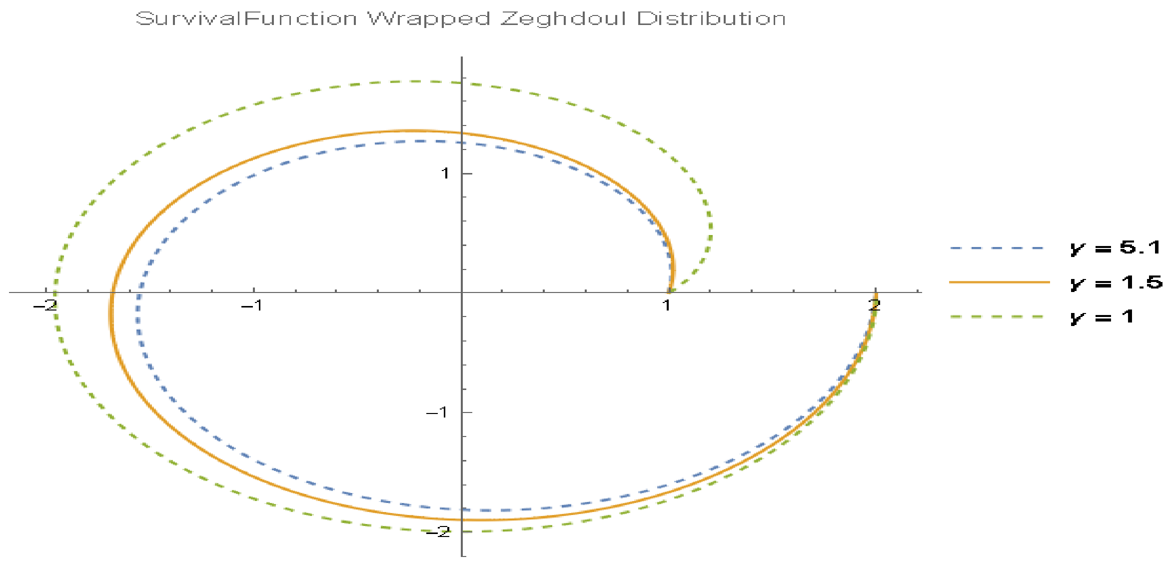
$$R(x) = pr\,(X > x)$$

يمكن الحصول على دالة البقاء لتوزيع(Wrapped Zeghdoul Distribution) من خلال الصيغة التالية

$$S\,(x) = 1 - G(\theta,\gamma)$$

$$S\,(x) = 1 - \left(\frac{e^{2\pi\gamma-\theta\gamma}(-4(1+e^{2\pi\gamma})(-1+e^{\theta\gamma})\pi^2}{(-1+e^{2\pi\gamma})^3(2+\gamma)} \frac{-2(-1+e^{2\pi\gamma})\pi(-1+e^{\theta\gamma}-2\theta)+(-1+e^{2\pi\gamma})^2\theta(1+\theta))\gamma^3}{(-1+e^{2\pi\gamma})^3(2+\gamma)}\right) \quad (9)$$

وان الشكل (3) ادناه يوضح دالة البقاء لتوزيع Wrapped Zeghdoul Distribution:



الشكل (3) يوضح دالة البقاء لتوزيع(Wrapped Zeghdoul Distribution) (من اعداد الباحثة)

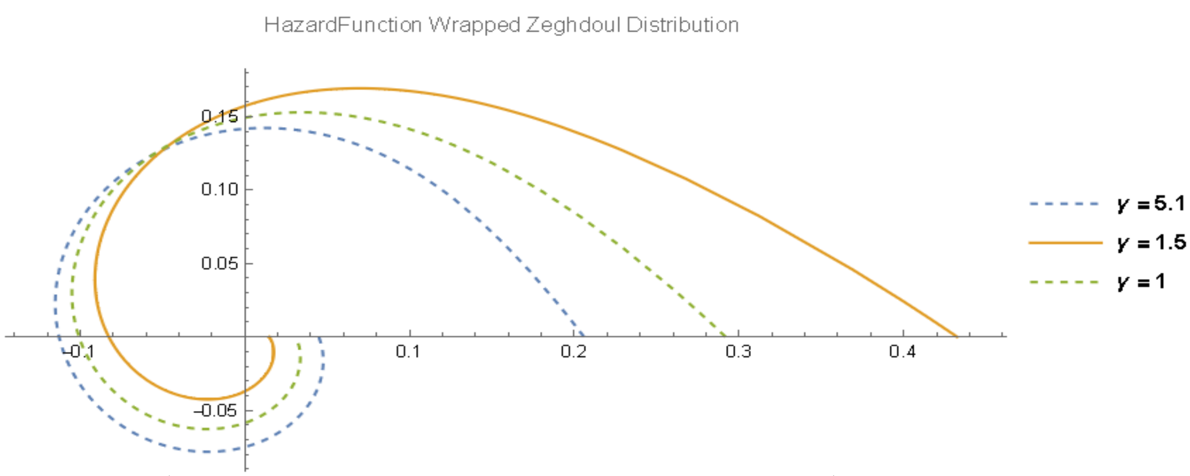
9- دالة المخاطرة لتوزيع (Wrapped Zeghdoul Distribution):

يمكن الحصول على دالة المخاطرة لتوزيع (Wrapped Zeghdoul Distribution) من خلال الصيغة التالية :

$$h(\theta,\gamma)=\frac{f(\theta,\gamma)}{S(\theta,\gamma)}$$

$$=\frac{\dfrac{e^{2\pi\gamma-\theta\gamma}\left(4(1+e^{2\pi\gamma})\pi^2+(-1+e^{2\pi\gamma})^2\theta(1+\theta)+2(-1+e^{2\pi\gamma})\pi(1+2\theta)\right)\gamma^3}{(-1+e^{2\pi\gamma})^3(2+\gamma)}}{1-\begin{pmatrix}\frac{e^{2\pi\gamma-\theta\gamma}(-4(1+e^{2\pi\gamma})(-1+e^{\theta\gamma})\pi^2}{(-1+e^{2\pi\gamma})^3(2+\gamma)}\\ \frac{-2(-1+e^{2\pi\gamma})\pi(-1+e^{\theta\gamma}-2\theta)+(-1+e^{2\pi\gamma})^2\theta(1+\theta))\gamma^3}{(-1+e^{2\pi\gamma})^3(2+\gamma)}\end{pmatrix}} \quad (10)$$

وان الشكل (4) ادناه يوضح دالة المخاطرة لتوزيع Wrapped Zeghdoul Distribution:



الشكل (4) يوضح دالة المخاطرة لتوزيع(Wrapped Zeghdoul Distribution) (من اعداد الباحثة)

10-لخصائص المميزة لتوزيع (Wrapped) Zeghdoul Distribution:

في هذا القسم نشتق الدالة المميزة والعزوم المثلثية والمعلمات الاخرى مثل معاملات الانحراف ولتفرطح

1-10 الدالة المميزة:

الدالة $\emptyset_x(t)=E(e^{itx})$ تسمى الدالة المميزة .Ch لـx يعرفون علماء الرياضيات .Ch على انه تحويل فورييه لـf(x) وهي داله الكثافة.يمكن استخدام الدالة المميزة (cf) للتوزيع الملتف بشكل مشابه لتلك الموجودة على الخط الحقيقي.

$$\emptyset(\rho)=\emptyset_x(t) \qquad (11)$$

$$\emptyset_x(t)=E(e^{itx}) \qquad (12)$$

يتم اعطاء الدالة المميزة لتوزيع zeghdoulبواسطه.

$$f(x,\theta)=\left[\frac{\gamma^3}{2+\gamma}\right]xe^{-\gamma x}+x^2e^{-\gamma x}$$

$$E\left(e^{xti}\right)=\left[\frac{\gamma^3}{2+\gamma}\right]\int_0^\infty e^{xti}\left(xe^{-\gamma x}+x^2e^{-\gamma x}\right)$$

$$E\left(e^{xti}\right)=\left[\frac{\gamma^3}{2+\gamma}\right]\int_0^\infty \left(xe^{xti}e^{-\gamma x}+x^2e^{xti}e^{-\gamma x}\right).dx$$

$$E\left(e^{xti}\right)=\left[\frac{\gamma^3}{2+\gamma}\right]\int_0^\infty \left(xe^{-x(\gamma-it)}+x^2e^{-x(\gamma-it)}\right).dx$$

$$E\left(e^{xti}\right)=\left[\frac{\gamma^3}{2+\gamma}\right]\left(\int_0^\infty xe^{-x(\gamma-it)}.dx+\int_0^\infty x^2e^{-x(\gamma-it)}.dx\right)$$

$$E\left(e^{xti}\right)=\frac{\gamma^3\left(\gamma+2-it\right)}{(2+\gamma)(\gamma-it)^3}$$

$$E\left(e^{xti}\right)=\emptyset_{x(t)}=\frac{\gamma^3\left(\gamma+2-it\right)}{(2+\gamma)(\gamma-it)^3} \qquad (13)$$

$$\emptyset_{(p)}=\frac{\gamma^3\left(\gamma+2-it\right)}{(2+\gamma)(\gamma-ip)^3}$$

$$\emptyset_{(p)}=\frac{\gamma^3}{(2+\gamma)}\left[\left(\gamma+2-ip\right)(\gamma-ip)^{-3}\right] \qquad (14)$$

$$(a+ip)^r=(a^2+p^2)^{\frac{-r}{2}}e^{ir\arctan\left(\frac{a}{p}\right)}$$

$$(\gamma-ip)^{-3}=(\gamma^2+p^2)^{\frac{-3}{2}}e^{3i\arctan\left(\frac{p}{\gamma}\right)}$$

$$\left(\gamma+2-ip\right)=\left(\left(\gamma+2\right)^2+p^2\right)^{\frac{1}{2}}e^{-i\arctan\left(\frac{p}{\gamma+2}\right)}$$

$$\emptyset_{(p)}=\frac{\gamma^3}{(2+\gamma)}\left[(\gamma^2+p^2)^{\frac{-3}{2}}\left(\left(\gamma+2\right)^2+p^2\right)^{\frac{1}{2}}e^{3i\arctan\left(\frac{p}{\gamma}\right)-i\arctan\left(\frac{p}{\gamma+2}\right)}\right]$$

$$\emptyset_{(p)}=\frac{\gamma^3\left(\left(\gamma+2\right)^2+p^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(2+\gamma)(\gamma^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}e^{3i\arctan\left(\frac{p}{\gamma}\right)-i\arctan\left(\frac{p}{\gamma+2}\right)}$$

$$\emptyset_{(p)}=P_pe^{-i\mu p} \qquad (15)$$

$$P_p=\frac{\gamma^3\left(\left(\gamma+2\right)^2+p^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(2+\gamma)(\gamma^2+p^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (16)$$

10- 2 العزوم المثلثية:

أظهر أن العزوم المثلثية للتوزيع الدائري الملتف يساوي قيمه الدالة المميزة للمتغير العشوائي غير الملتف عند قيمه العدد الصحيح P.

$$\emptyset_{(p)} = \alpha_p + i\beta_p \qquad ;p=\pm1,\pm2,\ldots \qquad (17)$$

وبالتالي فإن العزوم المثلثية غير المركزية للتوزيع هي.

$$\mu p = 3\arctan\left(\frac{p}{\gamma}\right) - \arctan\left(\frac{p}{\gamma+2}\right) \qquad (18)$$

$$\emptyset_p = \alpha_p + \beta_p$$

$$\alpha_p = P_p\cos(\mu p)$$

$$\beta_p = P_p\sin(\mu p)$$

$$\alpha_p = \frac{\gamma^3\left(\left(\gamma+2\right)^2 + p^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(2+\gamma)(\gamma^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\left(3\arctan\left(\frac{p}{\gamma}\right) - \arctan\left(\frac{p}{\gamma+2}\right)\right) \qquad (19)$$

$$\beta_p = \frac{\gamma^3\left(\left(\gamma+2\right)^2 + p^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(2+\gamma)(\gamma^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\left(3\arctan\left(\frac{p}{\gamma}\right) - \arctan\left(\frac{p}{\gamma+2}\right)\right) \qquad (20)$$

$$\overline{\alpha_p} = \frac{\gamma^3\left(\left(\gamma+2\right)^2 + p^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(2+\gamma)(\gamma^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\left(3\arctan\left(\frac{p}{\gamma}\right) - \arctan\left(\frac{p}{\gamma+2}\right) - p\left(3\arctan\left(\frac{1}{\gamma}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\gamma+2}\right)\right)\right) \qquad (21)$$

$$\overline{\beta_p} = \frac{\gamma^3\left(\left(\gamma+2\right)^2 + p^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(2+\gamma)(\gamma^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\left(3\arctan\left(\frac{p}{\gamma}\right) - \arctan\left(\frac{p}{\gamma+2}\right) - p\left(3\arctan\left(\frac{1}{\gamma}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\gamma+2}\right)\right)\right) \qquad (22)$$

3-10 الوسط الحسابي لتوزيع(Wrapped Zeghdoul Distribution

وقد يسمى بمتوسط الاتجاه (Average direction) أو الاتجاه المفضل (preferred direction) قد يتبادر إلى الأذهان لحساب متوسط الاتجاه هو حساب الوسط الحسابي للزوايا بطريقة البيانات الاعتيادية وهو اعتقاد خاطئ بسبب الاختلاف بطبيعة البيانات فالبيانات الدائرية تحتاج إلى تحديد نقطة الصفر و اتجاه الدوران فعلى سبيل المثال لو كانت لدينا طائرين يطيران بالزاويتين (°330 , °30) مع افتراض الشرق هو نقطة الصفر و اتجاه الدوران عكس عقرب الساعة , يمكن حساب الوسط الحسابي لتوزيع(Wrapped Zeghdoul Distribution) المقترح من خلال الصيغة الاتية.

$$\mu = \mu_1$$

$$\mu = 3\arctan\left(\frac{1}{\gamma}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\gamma+2}\right) \qquad (23)$$

4-10البابن الدائري لتوزيع(Wrapped Zeghdoul Distribution

يعتبر الباين من المقاييس التي تقيس تشتت البيانات عن نقطة معينة والتي تأخذ عادتا متوسط هذه البيانات وبالتالي فهو يقيس مقدار بعد كل نقطة من نقاط البيانات عن وسطها الحسابي ، في البيانات الدائري هناك بعدين لكل اتجاه من اتجاه البيانات عن أي اتجاه أخر سواء كان هذا الاتجاه هو اتجاه الوسط أو أي اتجاه اخرويمكن حساب الباين الدئري للتوزيع المقترح من خلال المعادلة الصيغة الاتية.

$$V_\circ = 1 - P_1$$

$$V_\circ = 1 - \frac{\gamma^3\left((\gamma+2)^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{(2+\gamma)(\gamma^2+1)^{\frac{3}{2}}} \qquad (24)$$

5-10الانحراف المعياري الدائري لتوزيع(Wrapped Zeghdoul Distribution)

الانحراف المعياري في البيانات الاعتيادية هو الجذر التربيعي للتباين أما في البيانات الدائرية فمن غير المستحسن اخذ جذر الباين وذلك لان اغلب البيانات الدائرية تتبع توزيعات متماثلة وغير مشتت و الحصول على تقديرات معقولة لنسب هذا التوزيع ولحسابه الانحراف المعياري الدائري للتوزيع المقترح نستعمل الصيغة الآتية :

$$\sigma_\circ = \sqrt{-2\mathrm{Log}(V_\circ)}$$

$$\sigma_\circ = \sqrt{-2Log\left(1 - \frac{\gamma^3\left((\gamma+2)^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{(2+\gamma)(\gamma^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right)} \qquad (25)$$

6-10معامل الالتواء Coefficient of Skewness

هو درجة عدم التماثل والانحراف عن التماثل، فإذا كان منحنى توزيع الشكل العام للبيانات له طرف على يمين مركز التوزيع أطول من الطرف الايسر،فان التوزيع يسمى ملتوي لليمين وأن له التواءً موجباً، وإذا حدث العكس الدائري للتوزيع المقترح نستعمل يقال إن التوزيع ملتوي لليسار وأنه سالب الالتواء ويمكن حساب **معامل الالتواء** الصيغة الآتية :.

$$\text{coefficient of skewness } = \frac{\overline{\beta_2}}{(V_\circ)^{\frac{3}{2}}}$$

coefficient of skewness

$$= \frac{\dfrac{\gamma^3\left((\gamma+2)^2+4\right)^{\frac{1}{2}}}{(2+\gamma)(\gamma^2+4)^{\frac{3}{2}}}\sin\left(3\arctan\left(\frac{2}{\gamma}\right) - \arctan\left(\frac{2}{\gamma+2}\right) - 2\left(3\arctan\left(\frac{1}{\gamma}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\gamma+2}\right)\right)\right)}{\left(1 - \dfrac{\gamma^3\left((\gamma+2)^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{(2+\gamma)(\gamma^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (26)$$

7-10 معامل التفرطح (Coefficient of Kurtosis)

التفرطح ويسمى أيضا معامل التسطيح أو درجة التقوس ، وهو مؤشر لقياس درجة تحدب أو تقوس دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي حقيقي, وهو إلى جانب التجانس، من أهم معالم أشكال توزيع المتغيرات العشوائية، ويمكن من وصف شكل توزيع الاحتمالات في جوار القيمة المتوقعة ولحساب **معامل التفرطح** للتوزيع المقترح نستعمل الصيغة الآتية :

$$\text{The coefficient of kurtosis } = \frac{\overline{\alpha_2} - (1-V_\circ)^4}{(V_\circ)^2}$$

$$= \frac{\frac{\gamma^3\left((\gamma+2)^2+4\right)^{\frac{1}{2}}}{(2+\gamma)(\gamma^2+4)^{\frac{3}{2}}}\cos\left(3\ \mathrm{arcta65n}\left(\frac{2}{\gamma}\right)-\arctan\left(\frac{2}{\gamma+2}\right)-2\left(3\arctan\left(\frac{1}{\gamma}\right)-\arctan\left(\frac{1}{\gamma+2}\right)\right)\right)-(1-V_\circ)^4}{\left(\frac{\gamma^3\left((\gamma+2)^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{(2+\gamma)(\gamma^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right)^2} \qquad (27)$$

11-طرائق التقدير

1-11 طريقة الامكان الاعظم MLE

تعد طريقة الامكان الأعظم واحدة من اهم الطرائق المستخدمة في عملية التقدير شائعة الاستعمال, وأول من أعد هذه الطريقة الباحث (C.F.Gauss) وقام بتطبيقها لاول مرة الباحث (S.A.Fisher) في عام (1922) وتتميز المقدرات المستخرجة على وفق طريقة الامكان الاعظم بأن لها بعض خصائص المقدر الجيد ,حيث ان المقدرات المحسوبة باستخدام هذه الطريقة تتصف بالثبات ان طريقة الإمكان الاعظم تعطي مقدرات غالبا ما تكون متسقة , فضلاً عن أنها تكون أكثر دقة بازدياد حجم العينة، وان مقدر الإمكان الأعظم هو الذي يجعل لوغاريتم دالة الإمكان في نهايتها العظمى.

فاذا كانت لدينا مشاهدات عينة عشوائية بحجم n (θ_1 , θ_2, ..., θ_n) من توزيع Wrapped Zeghdoul Distribution فإن دالة الامكان الأعظم التي يرمز لها بالرمز (L) ستكون هي الدالة الاحتمالية المشتركة للعينة العشوائية وكالاتي:

$$L(\theta_1,\theta_2\ldots\theta_n,\gamma) = f(\theta 1,\gamma).f(\theta 2,\gamma)\ldots f(\theta n,\gamma)$$

$$L(\theta_1,\theta_2\ldots\theta_n,\gamma)=\prod_{i=1}^{n} f_{WZD}(\theta_1,\theta_2\ldots\theta_n,\gamma) \qquad (28)$$

$$=\left(\frac{e^{2\pi\gamma-\theta\gamma}\gamma^3}{(e^{2\pi\gamma}-1)^3(2+\gamma)}\right)^n\prod_{i=1}^{n}\left((4(1+e^{2\pi\gamma})\pi^2+(-1+e^{2\pi\gamma})^2\theta(1+\theta)+2(-1+e^{2\pi\gamma})\pi(1+2\theta)\right))$$

$$Log\ L(\theta_1,\theta_2\ldots\theta_n,\gamma)$$

$$= n\mathrm{Log}\left(\frac{e^{2\pi\gamma-\theta\gamma}\gamma^3}{(e^{2\pi\gamma}-1)^3(2+\gamma)}\right)+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Log}\left(\begin{matrix}(4(1+e^{2\pi\gamma})\pi^2+(-1+e^{2\pi\gamma})^2\theta(1+\theta)\\ +e^{2\pi\gamma})\pi(1+2\theta))\end{matrix}\right) \qquad (29)$$

$$= n\mathrm{Log}\left(\frac{e^{2\pi\gamma-\theta\gamma}\gamma^3}{(e^{2\pi\gamma}-1)^3(2+\gamma)}\right)+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Log}\left(\begin{matrix}(4(1+e^{2\pi\gamma})\pi^2+(-1+e^{2\pi\gamma})^2\theta(1+\theta)\\ +e^{2\pi\gamma})\pi(1+2\theta))\end{matrix}\right)$$

$$=\left(\begin{matrix}n(2\pi\gamma-\theta\gamma)+3n\mathrm{Log}[\gamma]-3n\mathrm{Log}[(e^{2\pi\gamma}-1)]-n\mathrm{Log}[2+\gamma]\\ +\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Log}[4((1+e^{2\pi\gamma})\pi^2+(-1+e^{2\pi\gamma})^2\theta(1+\theta)+e^{2\pi\gamma})\pi(1+2\theta)]\end{matrix}\right)$$

$$\frac{(\mathrm{Logl}\theta_1,\theta_2\ldots\theta_n,0)}{\delta\gamma}$$

$$=\left(\begin{array}{c}2\pi-\frac{6e^{2\pi\gamma}\pi}{-1+e^{2\pi\gamma}}-\theta\\+\frac{4e^{2\pi\gamma}\pi\left(\pi+2\pi^2+2\pi\theta+(-1+e^{2\pi\gamma})\theta(1+\theta)\right)}{4(1+e^{2\pi\gamma})\pi^2+(-1+e^{2\pi\gamma})^2\theta(1+\theta)+2(-1+e^{2\pi\gamma})\pi(1+2\theta)}\\+\frac{3}{\gamma}-\frac{1}{2+\gamma}\end{array}\right) \quad (30)$$

حيث نلاحظ معادلة (30) غير خطية لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية ولذلك يتم حلها باستعمال الطريقة العددية (نيوتن رافسون) للحصول على مقدرات طريقة الإمكان الأعظم

(2-11)طريقه المربعات الصغرى OLS:

هي من الطرق الكلاسيكية المهمة وهي طريقه إحصائية تهدف الى تقليل مجموع مربعات الفرق بين القيم الفعلية ويتم فيها إيجاد القيم المقدرات الاحتمالية والتي تجعل مقدار الخطأ المحسوب أصغر ما يمكن ويمتاز مقدارها بامتلاكه بعض خصائص المقدر الجيد ويمكن الحصول عليه.

لتكن $x_1.x_2.\dots.x_n$ مشاهدات عشوائية بحجم عينة n تتبع توزيع **Wrapped Zeghdoul Distribution**.يمكننا الحصول على تقديرات LS للمعالم غير معروفه عن طريق تقليل.

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\left(F(x)-\frac{i}{n+1}\right)^2$$

$F(x)$: تمثل داله التوزيع التجميعية cdf للتوزيع المقترح

$\frac{i}{n+1}$ هو مقدار لامعلمي

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\begin{array}{c}\frac{\gamma^3e^{2\pi\gamma-\theta\gamma}}{(-1+e^{2\pi\gamma})^3(2+\gamma)}\left((-4(1+e^{2\pi\gamma})(-1+e^{\theta\gamma})\pi^2\right)\\-2(-1+e^{2\pi\gamma})\pi(-1+e^{\theta\gamma}-2\theta)+(-1+e^{2\pi\gamma})^2\theta(1+\theta))\end{array}\right)-\frac{i}{n+1}\right)^2$$

$$\frac{dQ}{\gamma}=$$

$$2\sum_{i=1}^{n}\left(\begin{array}{c}\left(\left(\begin{array}{c}\frac{\gamma^3e^{2\pi\gamma-\theta\gamma}}{(-1+e^{2\pi\gamma})^3(2+\gamma)}\left((-4(1+e^{2\pi\gamma})(-1+e^{\theta\gamma})\pi^2\right)\\-2(-1+e^{2\pi\gamma})\pi(-1+e^{\theta\gamma}-2\theta)+(-1+e^{2\pi\gamma})^2\theta(1+\theta))\end{array}\right)-\frac{i}{n+1}\right)\\\frac{1}{(-1+e^{2\pi\gamma})^4(2+\gamma)^2}2e^{2\pi\gamma-\theta\gamma}\gamma^2\\(1+4e^{2\pi\gamma}+e^{4\pi\gamma})(-1+e^{\theta\gamma})\pi^3\gamma(2+\gamma)\\-(-1+e^{2\pi\gamma})^3\theta(1+\theta)(-6+2(-1+\theta)\gamma+\theta\gamma^2)\\+4(-1+e^{4\pi\gamma})\pi^2(6-\gamma^2-3\theta\gamma(2+\gamma)+e^{\theta\gamma}(-6+\gamma^2))\\2(-1+e^{2\pi\gamma})^2\pi(3\theta^2\gamma(2+\gamma)-2(3+\gamma)+2e^{\theta\gamma}(3+\gamma)+2\theta(-6+\gamma^2)))\end{array}\right) \quad (31)$$

حيث نلاحظ ان المعادلة (31) غير خطية لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية ولذلك يتم حلها باستعمال الطريقة العددية (نيوتن رافسون) للحصول على مقدرات طريقة المربعات الصغرى .

12-المحاكاة:

لقد تضمنت تجارب المحاكاة [1]المراحل الاساسية لتطبيق اساليب تقدير دالة البقاء في هذا البحث.

المرحلـة الأولـى: مرحلـة تحديـد القـيم الافتراضـية وتعتبـر مـن المراحـل المهمـة الـذي تعتمـد عليهـا المراحـل اللاحـق للبرنامج، وتتم اختيار القيم الافتراضية كالاتي:

1- تحديـد قـيم افتراضـيـة مختلفـة لمعلمـات توزيـع **Wrapped Zeghdoul Distribution** وفـق الجـدول الآتي:

جدول (1) يبين القيم الافتراضية لمعلمات التوزيع

Model	γ
1	**0.01**
2	**0.05**
3	**0.5**
4	**1**
5	**1.5**

2-اختيار حجوم مختلفة للعينة لغرض معرفة مدى تأثير حجم العينة على دقة النتائج حيث كانت صغيرة(10,20,30)، ومتوسطة(75) وكبيرة(100)).

3-تكرار كل تجربة كان مساويا الى (L=1000) لغرض الحصول على تجانس عال.

المرحلة الثانية توليد البيات العشوائية : وفي هذه المرحلة يتم توليد بينات عشوائية وفق التوزيع المقترح بالاعتماد على طريقة (مونت- كارلو) يمكن تلخيصها على وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$\theta = \frac{1}{2(\gamma-e^{2\pi\gamma}\gamma)^3}(-1+e^{2\pi\gamma})^3\left(\frac{\gamma^3-4\pi\gamma^3+4e^{2\pi\gamma}\pi\gamma^3-(-1+e^{2\pi\gamma})^3(2+\gamma)}{\sqrt{\frac{(1+8\pi(4\pi+(-1+e^{2\pi\gamma})(e^{\theta\gamma}+2e^{2\pi\gamma}\pi)))\gamma^6 4(-1+e^{2\pi\gamma})^3 u\gamma^3(2+\gamma)}{(-1+e^{2\pi\gamma})^6(2+\gamma)^2}}}\right) \tag{32}$$

ui: متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع المنتظم.

المرحلة الثالثة إيجاد التقديرات: وفي هذه المرحلة تتم إيجاد المقدرات لمعلمات ودالة البقاء لتوزيع ليندلي باستعمال طراق التقدير والمتمثلة بطريق بيز القياسية وطريقة بيز الهرمي .

المرحلة الرابعة المقارنة بين طرائق التقدير: وهي المرحلة الأخيرة من مراحل تجارب المحاكات حيث يتم فيها المقارنة بين طريقتي تقدير دالة البقاء لتوزيع **Wrapped Zeghdoul Distribution** وذالك بالاعتماد على المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطاء (MSE) التي يعطى بالصيغة الاتية :

$$MSE(\hat{\gamma}(xi)) = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(\hat{\gamma}_j(xi)-\gamma(xi)\right)^2 \tag{33}$$

اذ ان:

r : تمثل عدد مرات تكرار التجربة.

n_t : تمثل حدود المتغير t_i.

$\gamma(x)$: القيم الحقيقية للمعلمات وفقا للقيم الافتراضية.

$\hat{\gamma}_j(x)$: المعلمات المقدرة.

1-12 مناقشة نتائج تجربة المحاكاة

Models1		**Model 1 (θ = 0.01)**		
	n	**θ**	**MSE**	**Bias**
ML	**10**	**0.405**	**0.278381**	**0.399**
	20	**0.299**	**0.119389**	**0.292**
	30	**0.195**	**0.0800616**	**0.193**
	50	**0.261**	**0.104693**	**0.254**
	75	**0.13**	**0.0404047**	**0.128**
	100	**0.264**	**0.0755094**	**0.256**
OLS	**10**	**0.464**	**0.392526**	**0.458**
	20	**0.293**	**0.120538**	**0.287**
	30	**0.219**	**0.0779756**	**0.215**

	50	**0.233**	**0.0857097**	**0.229**
	75	**0.166**	**0.0449312**	**0.164**
	100	**0.261**	**0.0868666**	**0.255**
WLS	**10**	**0.47**	**0.400515**	**0.464**
	20	**0.3**	**0.125428**	**0.294**
	30	**0.211**	**0.0733283**	**0.207**
	50	**0.272**	**0.101663**	**0.266**
	75	**0.17**	**0.048777**	**0.168**
	100	**0.208**	**0.0596223**	**0.204**

Models2		**Model 2 (θ = 0.05)**		
	n	θ	MSE	Bias
ML	**10**	0.339	0.177	0.306
	20	0.305	0.164	0.303
	30	0.316	0.158	0.314
	50	0.326	0.12	0.285
	75	0.233	0.048	0.192
	100	0.245	0.04	0.165
OLS	**10**	0.258	0.172	0.258
	20	0.346	0.188	0.306
	30	0.328	0.174	0.317
	50	0.367	0.149	0.307
	75	0.239	0.064	0.199
	100	0.289	0.047	0.189
WLS	**10**	0.337	0.202	0.317
	20	0.287	0.155	0.267
	30	0.235	0.113	0.244
	50	0.329	0.115	0.269
	75	0.246	0.066	0.206
	100	0.288	0.049	0.188

Models3		**Model 3 (θ = 0.5)**		
	n	**θ**	**MSE**	**Bias**
ML	**10**	**0.373**	**0.093**	**0.276**
	20	**0.486**	**0.086**	**0.239**

	30	0.46	0.066	0.185
	50	0.477	0.038	0.135
	75	0.586	0.015	0.103
	100	0.517	0.019	0.116
OLS	10	0.297	0.116	0.316
	20	0.441	0.148	0.332
	30	0.429	0.083	0.238
	50	0.487	0.029	0.166
	75	0.597	0.028	0.144
	100	0.493	0.042	0.154
WLS	10	0.362	0.093	0.27
	20	0.45	0.141	0.322
	30	0.442	0.075	0.219
	50	0.51	0.022	0.14
	75	0.6	0.022	0.129
	100	0.547	0.015	0.102

Models4		Model 4 (θ = 1)		
	n	θ	MSE	Bias
ML	10	0.476	0.506	0.555
	20	0.566	0.402	0.434
	30	0.544	0.407	0.456
	50	0.657	0.306	0.347
	75	0.44	0.508	0.56
	100	0.567	0.402	0.433
OLS	10	1.055	0.042	0.167
	20	0.987	0.021	0.13
	30	0.969	0.013	0.097
	50	0.979	0.012	0.074
	75	0.984	0.021	0.131
	100	0.999	0.005	0.06
WLS	10	1.057	0.038	0.163
	20	0.977	0.017	0.115
	30	0.977	0.011	0.089

	50	0.978	0.01	0.067
	75	0.986	0.02	0.128
	100	0.999	0.004	0.061

Models5		**Model 5 (θ = 1.5)**		
	n	**θ**	**MSE**	**Bias**
ML	**10**	**0.001**	**6.244**	**2.499**
	20	**9E-04**	**6.245**	**2.499**
	30	**8E-04**	**6.246**	**2.499**
	50	**1.818**	**1.895**	**0.846**
	75	**2.518**	**0.052**	**0.193**
	100	**2.593**	**0.039**	**0.131**
OLS	**10**	**2.405**	**0.055**	**0.174**
	20	**2.334**	**0.097**	**0.25**
	30	**2.467**	**0.082**	**0.232**
	50	**2.473**	**0.032**	**0.146**
	75	**2.506**	**0.047**	**0.18**
	100	**2.553**	**0.036**	**0.117**
WLS	**10**	**2.387**	**0.057**	**0.187**
	20	**2.369**	**0.08**	**0.227**
	30	**2.472**	**0.075**	**0.224**
	50	**2.504**	**0.035**	**0.16**
	75	**2.508**	**0.048**	**0.18**
	100	**2.567**	**0.034**	**0.105**

13-الاستنتاجات:

1- اظهرت النتائج المحاكاة عند حجم عينة (10) من خلال النماذج المقترحة للمعلمة نلاحظ ان طريقتي ml و ols قد امتلكت اقل mse في اكثر النماذج لحجم عينه (10) حيث ظهر في النموذج الأول والثالث طريقة ml والنموذج الثاني والخامس طريقة ols
2- نلاحظ من خلال الجدول عند حجم عينه (20) قد تفوقت طريقة wls لأغلب النماذج حيث امتلكت اقل mse في النموذج الثاني والرابع والخامس وبعدها كانت طريقة ml اما طريقة ols فلم تمتلك اقل mse في هذه النماذج
3- كانت افضل طريقة في حجم العينة (30) هي طريقة wls لأربع نماذج .
4- عند حجم عينه (50) كانت الأفضلية بين طريقتي wls و ols حيث كانت كلا الطريقتين امتلكت افضل mse لنموذجين في حين في النموذج الثاني كانت طريقة ml هي افضل طريقة
5- عند حجم عينه (75) اثبتت ان طريقة ml هي افضل طريقة كونها امتلكت اقل mse لثلاث نماذج من اصل 5 في حين كان النموذج الرابع افضل طريقة هي wls والنموذج الخامس هو ols.
6- عند زيادة حجم العينة الى (100) اثبتت ان طريقة wls كانت الأفضل في تقدير المعلمة امتلكت اقل mse لجميع النماذج .

14-التوصيات:

بالاعتماد على إجراءات البحث واستنتاجاته يوصي الباحث بالاتي:

1- اســتعمال طريقة الامكان الاعظم في تقدير معلمات ودالة البقاء لتوزيع Wrapped Zeghdoul Distribution عند احجام العينات المتوسطة والكبيرة وطريقة المربعات الصغرى عند احجام العينات الصغيرة.
2- تطبيق التوزيع المقترح في دراسات تتعلق بتقدير دالة البقاء والمعولية على قيد الحياة وغيرها من الدوال.
3- اســتعمال طرائق تقدير اخرى لتقدير معلمات ودالة البقاء لتوزيع Wrapped Zeghdoul Distribution ومقارنتها بالطرائق التي اعتمدت في هذه الدراسة.
4- التوسع في استعمال نظرية التوزيعات الدائرية للحصول على توزيعات دائرية جديدة وذلك لمرونتها العالية في تمثيل ووصف البيانات.
5- التوسع في استعمال نظرية التوزيعات الدائرية للحصول على توزيعات جديدة تمتاز بالمرونة العالية في تمثيل ووصف البيانات الدائرية الاتجاهية .

المصادر:

1. Awad, Ghazwane Rafiq, (2012), "Comparison of Bayesian estimators for the parameter, reliability functions and failure rate of the Raleigh distribution using balanced and unbalanced loss functions" Master's thesis, College of Administration and Economics - Al-Mustansiriya University.
2. Abdul Aleema, Manal Musa, (2022), "Estimating the risk function for the transformed kappa distribution", Master's thesis, College of Administration and Economics - University of Karbala
3. **Al-Quraishi, Kanaan Adnan, (2022), "Constructing a Probability Distribution Using the Topp Leone G-Family Rule to Estimate the Reliability Function", Master's Thesis, College of Administration and Economics - University of Karbala**

3.Asprion, N., Böttcher, R., Schwientek, J., Höller, J., Schwartz, P., Vanaret, C., & Bortz, M. (2021). Decision support for the development, simulation and optimization of dynamic process models. Frontiers of Chemical Science and Engineering, 16(2), 210–220. https://doi.org/10.1007/s11705-021-2046-x

4.Aston, J. A. (2014). Modeling circular time series data using bivariate wrapped distributions. Journal of the Royal Statistical Society. Series B. Statistical Methodology, 76(1), 1-18 .

5.Bangaru, M. (2018). Statistical inference for directional data using wrapped normal distributions. Chapman & Hall/CRC .

6.Barido-Sottani, J., Saupe, E. E., Smiley, T. M., Soul, L. C., Wright, A. M., & Warnock, R. C. M. (2020). Seven rules for simulations in paleobiology. In Paleobiology (Vol. 46, Issue 4, pp. 435–444). https://doi.org/10.1017/pab.2020.30

7. Bennett, J. H., ed. (1990). "Statistical Inference and Analysis", Selected Correspondence of R. A. Fisher. Oxford. Univ. Press.

8.Bhattacharya, S. K., & Ghosh, A. K. (2018). Nonparametric estimation of wrapped Rayleigh distributions. Journal of the American Statistical Association, 113(522), 1551-1565 .

9.Cimino, A., Gnoni, M. G., Longo, F., Barone, G., Fedele, M., & Piane, D. L. (2023). Modeling & Simulation as Industry 4.0 enabling technology to support manufacturing process design: a real industrial application. Procedia Computer Science, 217, 1877–1886. https://doi.org/10.1016/j.procs.2022.12.388

10.Durán, J. M. (2020). What is a Simulation Model? Minds and Machines, 30(3), 301–323. https://doi.org/10.1007/s11023-020-09520-z

11.Eppich, W., & Reedy, G. (2022). Advancing healthcare simulation research: innovations in theory, methodology, and method. In Advances in Simulation (Vol. 7, Issue 1). https://doi.org/10.1186/s41077-022-00219-y

12..Genton, M. G. (2002). Bayesian inference using wrapped normal distributions. Journal of the American Statistical Association, 97(460), 1196-1208.

13.Ghitany, M.E., Atieh, B. and Nadarajah, S. (2008b) 'Lindley distribution and its applications', Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 78, No. 4, pp.493–506.

14.Messaadia, H., & Zeghdoudi, H. (2018). Zeghdoudi distribution and its applications. *International Journal of Computing Science and Mathematics*, *9*(1), 58-65.