



فرائض للعلوم الاقتصادية والإدارية

KHAZAYIN OF ECONOMIC AND
ADMINISTRATIVE SCIENCES

ISSN: 2960-1363 (Print)

ISSN: 3007-9020 (Online)



Comparison between wavelet transforms and short-time Fourier transform in estimating a nonparametric regression function using simulation

Asst. Prof. Dr. Saad Kazem Hamza
University of Baghdad, College of
Administration and Economics /
Department of Statistics

saad.hamza@coadec.uobaghdad.edu.iq

Mayson Allawi Haji
Department of Statistics, College of
Administration and Economics
myswnlawy275@gmail.com

Abstract

Nonparametric regression is considered a suitable alternative to parametric regression, as it does not require assuming a specific functional form of the relationship between variables. However, traditional nonparametric methods suffer from high sensitivity to fluctuations and noise, as well as weak performance when dealing with non-stationary data. To overcome these challenges, signal processing techniques such as wavelet transforms and the Short-Time Fourier Transform (STFT) can be employed, as they provide a more accurate representation of the temporal and frequency characteristics of the data. This integration enhances estimation accuracy and reduces both bias and variance, granting this advanced methodology a clear advantage over classical nonparametric regression approaches, particularly in the analysis of complex economic, financial, and natural data. In this study, the Discrete Wavelet Transform (DWT) is employed, along with flexible thresholding values that handle coefficients at each level separately, unlike universal thresholds that process all levels simultaneously. Furthermore, the Short-Time Fourier Transform (STFT) and the Adaptive Short-Time Fourier Transform (ASTFT) are utilized with newly proposed thresholding rules. Through simulation experiments using test functions, sample sizes (128, 256, 512), and noise ratios (5%, 10%), the findings reveal that the most efficient estimation method is the DWT combined with the Fast Fourier Transform (FFT-DWT), followed by the DWT combined with the Adaptive Fast Fourier Transform (AFFT-DWT), as evaluated by the Average Mean Squared Error (AMSE) criterion.

Keywords: Discrete Wavelet Transform, Short-Time Fourier Transform, Multiwavelet Transform.

DOI: 10.69938/Keas.25020412

المقارنة بين التحويلات الموجية وتحويل فورير للزمن القصير في تقدير دالة الانحدار
اللامعلمي باستعمال المحاكاة

ا.م.د. سعد كاظم حمزة
جامعة بغداد كلية الادارة والاقتصاد /قسم الاحصاء
saad.hamza@coadec.uobaghdad.edu.iq

ميسون علاوي حاجي
قسم الاحصاء كلية الإدارة والاقتصاد
myswnlawy275@gmail.com

المستخلص: يُعدّ الانحدار اللامعلمي بديلاً مناسباً للانحدار المعلمي، إذ لا يتطلب افتراض شكل محدد للعلاقة بين المتغيرات. غير أن الطرق اللامعلمية التقليدية تعاني من حساسية عالية للتذبذبات والضوضاء وضعف في التعامل مع البيانات غير المستقرة. وللتغلب على هذه التحديات، يُستفاد من دمج تقنيات تحليل الإشارة مثل

التحويلات الموجية وتحويل فورييه للزمن القصير (STFT)، التي تتيح تمثيلاً أكثر دقة للخصائص الزمنية والترددية للبيانات. هذا الدمج يعزز دقة التقدير ويقلل من التحيز والتباين، مما يمنح هذه المنهجية المتقدمة تفوقاً واضحاً على طرائق الانحدار اللامعلمي الكلاسيكية، خاصة في دراسة البيانات الاقتصادية والمالية والطبيعية المعقدة. في هذه الرسالة تم توضيح طرائق تحويل الموجة المتقطعة (DWT) بالإضافة إلى استعمال قيم عتبة ذات مرونة كونها تتعامل مع تلك المعاملات عند كل مستوى على حدة بخلاف قيم العتبة الشاملة التي تتعامل مع جميع المستويات في آن واحد ، وتحويل فوريير للزمن القصير (SHTF) والمكيف (ASHTF) باستعمال قيم وقوانين عتبة جديدة ، من خلال تجارب المحاكاة لدوال اختبار وحجوم عينات (128،256،512) ونسب تشويش (5،10) قد اظهر البحث ان افضل طرائق التقدير هي طريقة التحويل الموجي المتقطع باستخدام تحويل فوارير للزمن القصير (FFT-DWT) يليها بعد ذلك طريقة التحويل الموجي المتقطع باستخدام تحويل فوارير للزمن القصير المكيف (AFFT-DWT) من خلال معيار المقارنة (AMSE).

الكلمات المفتاحية: التحويل الموجي المتقطع، تحويل فوارير للزمن القصير، تحويل متعدد الموجات

Corresponding Author: E-mail: myswnlawy275@gmail.com

1- المقدمة

ظهر العديد من التحويلات في السنوات الاخيرة في معالجة الاشارة كتحويل فوارير (Fourier Transform) (FT) والتحويلات المرتبطة به ، وهي التحويل الجيب تمام المنقطع (Discrete Cosine Transform) (DCT) وتحويل الجيب المتقطع (Discrete sine Transform) (DST) . في نظرية فواريريه يعبر عن الاشارة كمجموع لا نهائي نظرياً من الجيب والجيب التمام مما يجعل تحويل فواريريه مناسباً لتحليل الاشارات اللانهائية والدورية وغير فعلاً مع الاشارات متغيرة التردد او غير الثابتة ، سيطر تحويل فواريريه لعدة سنوات على مجال معالجة الاشارة ، ونجح هذا التحويل في توفير معلومات التردد الواردة في الاشارة المدروسة بشكل جيد الا انه فشل في اعطاء أية معلومات زمنية . حفز هذا القصور الباحثين على تكثيف الجهود في هذا المجال لايجاد الحلول المناسبة .

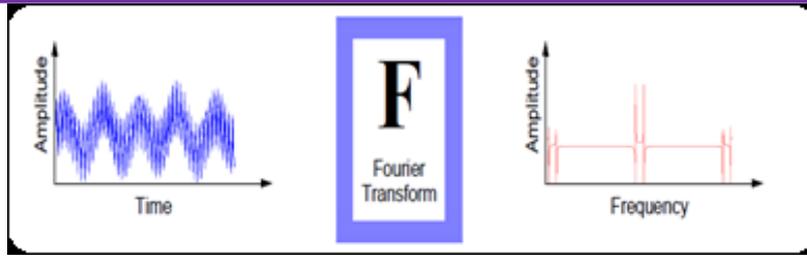
تمثلت الخطوة الاولى في هذه الرحلة البحثية الطويلة باقتراح منهجية فواريريه للزمن القصير (Short Time Fourier Transform) (STFT) حيث يقوم هذا التحويل بتمثيل الاشارة باستخدام نافذة معينة ثابتة العرض . ولكن المشكلة الرئيسية في الضياع الحاصل افي كل من الزمن والتردد حيث يتم الحصول على دقة عالية من اجل الاشارات ذات التردد العالي عند استخدام نافذة صغيرة . ولكن هذه الدقة لا تكون عالية للاشارات ذات التردد المنخفض ، وعند استخدام نافذة كبيرة يهمل تماماً لهذا السبب تم تطوير ما يعرف بالتحويل الموجي (Fourier Transform) ، تم حل المشكلات السابقة باستخدام هذا التحويل عن طريق استخدام نافذة متغيرة العرض بدلاً من نافذة ثابتة العرض . تقوم النافذة الكبيرة بانتاج موجة محددة تتضمن العناصر ذات التردد المنخفض والتي تعرف بالمعاملات التقريبية (Approximation coefficients) بينما تقوم النافذة الصغيرة بانتاج موجة مضغوطة تتضمن العناصر ذات التردد العالي والتي تعرف بالمعاملات التفصيلية (Details coefficients) للحصول على المعلومات الموصفة للاشارة ، يتم تحليلها اي تقسيمها الى المعاملات التقريبية والتفصيلية وتستمر هذه العملية لحين الحصول على مجموعة متتابعة من المعاملات التي تم تعريفها مسبقاً . تساعد هذه العملية في الحصول على المزيد من تفاصيل الاشارة في كل مرحلة.

يتم الحصول على الاشارة الاصلية او اعادة تركيبها بالتجميع المتسلسل لكل المعاملات الناتجة سابقاً (التقريبية والتفصيلية) بدءاً من اخر مرحلة تحليل والشكل (1) يوضح التحليلات المختلفة المستخدمة في معالجة الاشارة . تستخدم نظرية التحويل الموجي في العديد من المجالات مثل الرادار ، الفلك ، السمعيات ، الدراسات المالية والاقتصادية والطب والتنبؤ المبكر عن الزلازل .

هنالك نوعان رئيسيان من التحويل الموجي وهما التحويل الموجي المستمر (Continuous Wavelet Transformation) (CWT) والتحويل الموجي المتقطع (Discrete Wavelet Transformation) (DWT) ، صمم الاول للعمل مع الدوال المعرفة عبر كامل المحور الحقيقي ، بينما يتعامل الثاني مع الدوال المعرفة عبر مجال من الاعداد الصحيحة $(-N, \dots, 0, t=0, \dots, N)$ حيث تشير N الى حجم العينة قيد الدراسة .

2- تحويل فواريريه (Fourier Transformation)

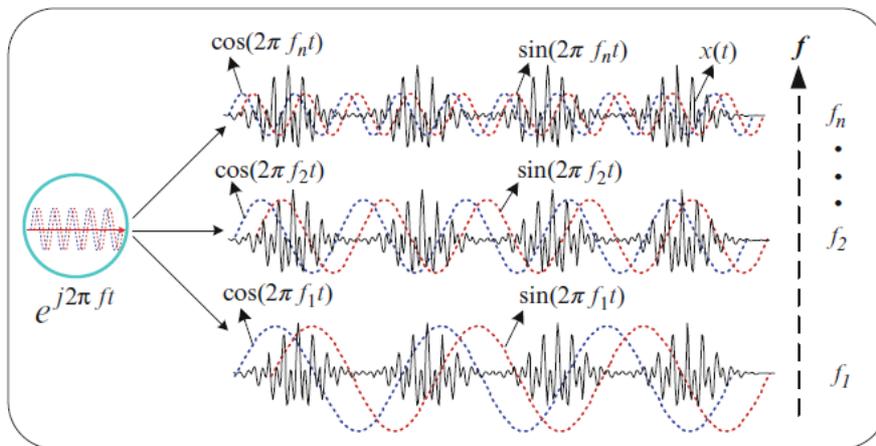
يعد تحويل فواريريه من اكثر التحويلات الرياضية انتشاراً ، ولا سيما في مجال الهندسة ومعالجة الاشارة ، ويعبر عنه بأنه تحويل شكل الاشارة من مجال الزمن الى المجال الترددي .



شكل (1) يمثل تحويل فوريير

قدمه العالم الفرنسي جوزيف فورييه عام (1822) وعرف منذ ذلك الحين بتحليل فورييه ، وهو طريقة تستعمل لتمثيل الاشارات الدورية باستخدام سلسلة من دوال الجيب والجيب تمام (دوال اسية عقدية) وبترددات مختلفة كما في الشكل (1) . ثم تم تطويرها من اجل اي اشارة حتى ولو لم تكن دورية بإنهاء دورها الى اللانهاية ، عندها ينتج ما يعرف بتحويل فورييه الذي يعبر عنه رياضياً لاشارة $X(t)$ بالعلاقة التالية :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad , \omega = 2\pi f \quad (1)$$



الشكل (2) يمثل الاشارة كمجموع سلسلة دوال Sine وبترددات مختلفة .

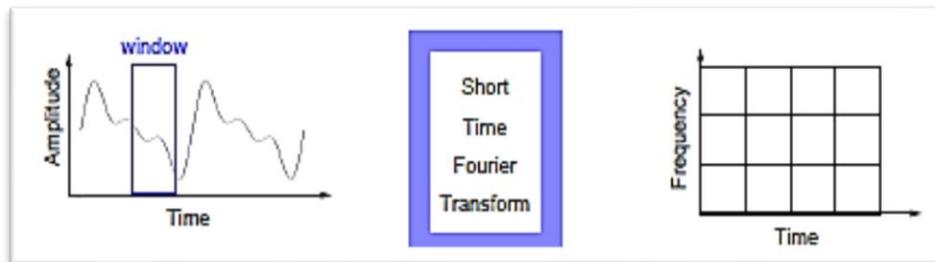
اما تحويل فوريير العكسي $X(f)$ للاشارة فيعبر عنه رياضياً بأنه تحويل شكل الاشارة من المجال الترددي الى المجال الزمني . ويعطى وفق العلاقة التالية :

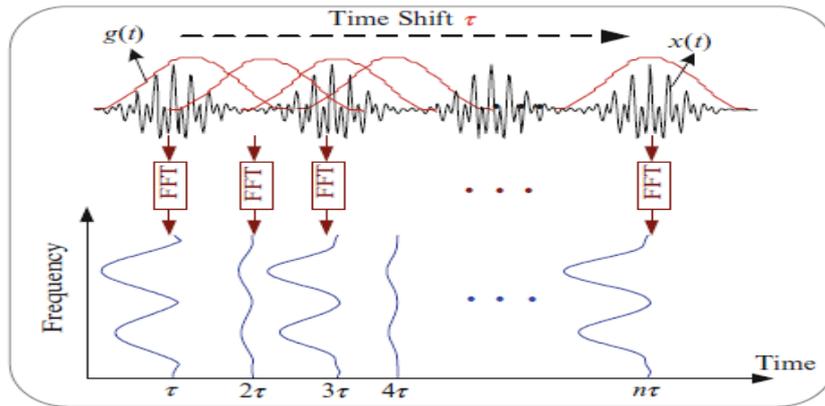
$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{-j\omega t} df \quad , \omega = 2\pi f \quad (2)$$

يعطي تحويل فورييه معلومات عن التمثيل الطيفي للاشارة ، لكن لا يزودنا بمعلومات عن ازمنا تلك المركبات الترددية المكونة للإشارة وتعتبر هذه المعلومات في المجال الزمني غير مهمة في حال كون الاشارة ثابتة . لكن المشكلة هي ان تحويل فورييه يصبح غير فعال بالنسبة للإشارات غير الثابتة ، لأنه لا يعطي معلومات عن المحتوى الترددي خلال الزمن ومعظم الاشارات الطبية والحيوية والاقتصادية والمالية هي اشارات غير ثابتة لهذا السبب تم تطوير ما يعرف بتحويل فوريير القصير زمنياً [6,10,13,15]

3- تحويل فورييه القصير زمنياً (Short-Time Fourier Transformation)(STTF)

أوجد العالم Dennis Gabor عام (1946) تقنية تدعى نوافذ الاشارة (Windowing The Signal) كحل للمشكلة السابقة ، حيث يتم تحليل جزء صغير فقط من الزمن من الاشارة غير الثابتة وتعتبر الاشارة ثابتة ضمن هذه النافذة .





الشكل (3) يوضح تحويل فورييه القصير زمنياً .

اذ يقوم هذا التحويل بتمثيل الاشارة لحظياً (زمنياً) وترددياً على حساب دقتها الزمنية والترددية وهذا يتعلق بحجم النافذة المستخدمة والشكل الرياضي لهذا التحويل يعطى بالعلاقة التالية :

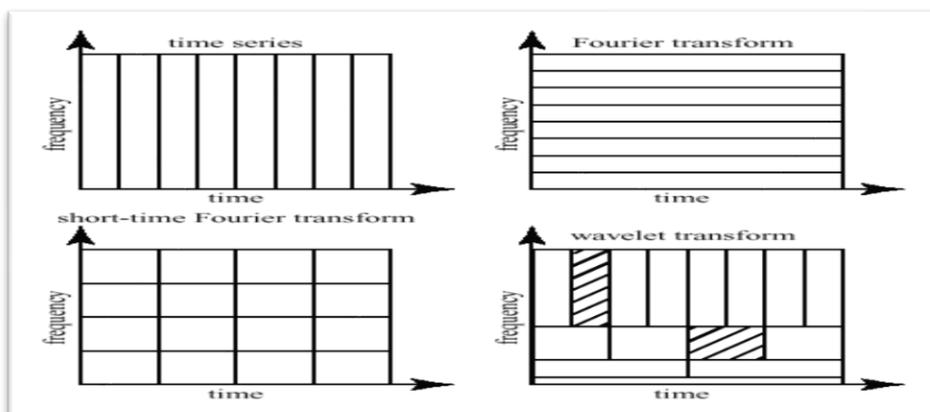
$$STFT_x^{(w)}(t, f) = \int_t^{\infty} [X(t).w^*(t - \hat{t})]e^{-j2\pi ft} dt \quad (3)$$

حيث ان $X(t)$ هي الاشارة المدروسة ، $w(t)$ هي دالة نافذة والتي تم ازاحتها بمقدار \hat{t} ، اذ يتم تحريك النافذة على طول الاشارة مع اجراء التحويل بضرب الاشارة بدالة النافذة في عدة نقاط زمنياً . والدالة الاسية ($e^{-j2\pi ft}$) تنقل الاشارة من المجال الزمني الى المجال الترددي .

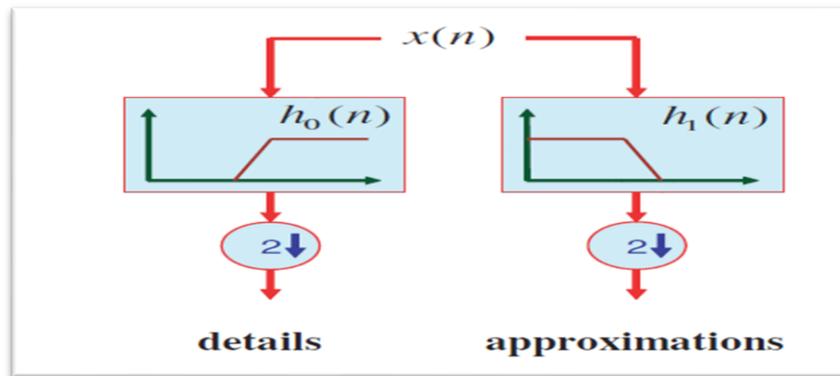
لكن المشكلة في هذا التحويل تكمن في الضياعات الترددية والزمنية ، اذ انه عند استخدام نافذة صغيرة يتم الحصول على دقة زمنية جيدة لكن دقة ترددية قليلة ، ويحدث العكس عند استخدام نافذة كبيرة ، وايضاً ان النافذة المستخدمة تكون ثابتة العرض بالنسبة للزمن والتردد لذلك تم تطوير ما يعرف بتحويل فورييه التكيفي [9,24,26,29].

4- التحويل المويجي (Wavelet Transformation)

التحويل المويجي هو عبارة عن اداة رياضية يمكن استخدامها لتقسيم الدوال والبيانات الى ترددات مختلفة كان تحويل الموجات موضوعاً بحثياً شائعاً في كثير من الأبحاث التقنية: الميكانيكية ، والإلكترونيات ، والاتصالات ، وأجهزة الكمبيوتر ، وعلم الأحياء والطب ، وعلم الفلك ، وما إلى ذلك. في مجال معالجة الإشارات والصور ، وهو تحويل بديل للتحويلات السابقة التي كانت تعاني من بعض حالات الضعف والقصور مثل تحويل فورييه و فورييه للزمن القصير والتي اقتصرت في تمثيل الإشارة على مجال الزمن واهمال التردد أو العكس من ذلك ، وعدم اخذ التغير في عرض النافذة و اكتفت بنافذة ثابتة ، لذلك ظهرت هذه التحويلات المويجية والتي تتميز بتمثيل الاشارة في كل من مجالي الزمن - تردد وعرض الحزمة متغير مع طبيعة البيانات حيث تستخدم الموجة كدالة نافذة (تحويل المويجي) نافذة مرنة للتردد الزمني والتي تضيق تلقائياً عند مراقبة الظواهر عالية التردد وتتسع عند دراسة الظواهر منخفضة التردد، الشكل (4) يوضح الفرق بين تحويل فوارير و التحويل المويجي يحلل التحويل المويجي بيانات الإدخال من حيث الوقت والقياس حسب دالة الموجة الأساسية والتي تسمى دالة الأم الموجية للحصول على معاملات الموجة وكما يوضح الشكل (5) لذلك يمكن تصميم أنواع مختلفة من الموجات بخصائص مختلفة بالإضافة إلى ذلك ، طور الباحثون أنواعاً مختلفة من الأساليب لتعزيز النظرية من خلال سد بعض أوجه القصور المحتملة [1,2,11,17].

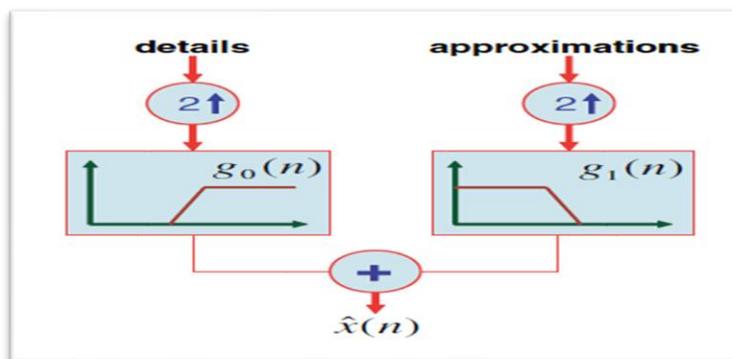


الشكل (4) يوضح الفرق بين تحويل فورييه و التحويل المويجي



الشكل (5) عملية التحلل للتحويل المويجي السريع.[5]

علاوة على ذلك ، يتميز التحويل المويجي بمزايا أكثر من تحويل فورييه لتمثيل الدوال التي لها فترات [40] انقطاع وقمم حادة ، وللتفكيك وإعادة البناء بدقة للإشارات المحدودة وغير الدورية أو غير الثابتة وكونه يمتاز بكفاءة عالية ونتائج أفضل ويعتبر تحويل المويجات فعالاً من الناحية الحسابية ، حيث أن الدالة الأساسية مضغوطة في طبيعتها ، ولأجراء اي عملية تحويل معلومات يجب ان تكون عملية التحويل متساوية في حجم المعلومات (Information) بعد اجراء التحويل وتجنب فقدان جزء منها ومن الملاحظات المهمة يجب على الباحث الانتباه اليها تحديد نوع التحويل المويجي المراد استخدامه اذ تصنف التحويلات المويجية إلى تحويل مويجي متقطع (Discrete Wavelet Transform)(DWT) تحويل مويجي مستمر (continuous wavelet transform)(CWT) ولكل تحويل ما يميزه عن الاخر فمثلا عند اجراء التحويل المويجي المستمر يتم إجراء تمدد وانضغاط المويجة الام وهذا يتطلب معلومات كثيرة وغالبا ما تكون زائدة عن الحاجة والى زمن حساب كثير بالإضافة الى انه يستخدم للإشارات اللانهائية ، على العكس من ذلك فعند اجراء التحويل المويجي المتقطع فإنه يستخدم ما يسمى بنوك المرشحات (filter banks) من أجل التحليل وإعادة بناء الإشارات ، بحيث تكون كمية المعلومات المستخدمة في عملية التحليل قليلة و كافية وخلال زمن حساب قليل بالإضافة الى انه يمكن اجراؤه لكل الاشارات ، ويفضل استخدام (DWT) كونه اسهل حسابيا وافضل في تفسير معاملات المويجة وطريقة تعامل افضل من (CWT) ، رياضيا عند اجراء اي تحويل مويجي عن طريق ما يعرف بالعتبة (Thresholding) يتم ضغط المويجة مع دالتين الاولى تسمى دالة المويجة الام فيتم الحصول على معاملات المويجة (wavelet coefficients) للحصول على المعاملات التفصيلية (Detail coefficients) $D(s,t)$ ، والثانية تسمى دالة المويجة الاب او دالة القياس للحصول على المعاملات التقريبية (Approximation coefficients) $A(s,t)$ والشكل (6) يوضح عملية إعادة بناء التحويل المويجي السريع [12,19,21,28]

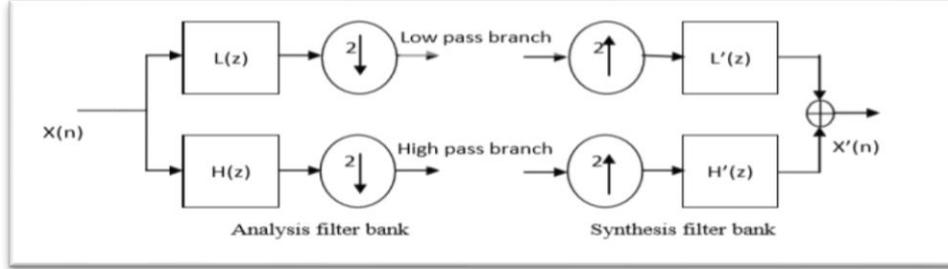


[5] يوضح عملية إعادة بناء التحويل المويجي السريع.(6)الشكل

5- التحويل المويجي المتقطع (DWT) (Discrete Wavelet Transform)

يعتبر التحويل المويجي المتقطع من ادوات التحويل المويجي الاكثر شهرة وتطبيقا في مختلف المجالات الهندسية والرياضيات والاحصاء وغيرها من التطبيقات ، حيث اقترح العالم Mallat عام (1989) التحويل المويجي المتقطع وهو عبارة عن خوارزمية سريعة وكفؤة تستخدم بتحويل معاملات المويجة من بيانات مشوشة اثناء عملية التحويل المويجي الى بيانات غير مشوشة ، يوفر DWT معلومات كافية لكل من التحليل والتركيب وتقليل وقت الحساب بشكل كافٍ حيث يتم اجراء عملية تحويل للبيانات من نطاق الوقت (مجال البيانات الاصلي) الى المجال المويجي (Wavelet Domain) والشكل (7) يوضح التحويل المويجي المتقطع للإشارة

وان ما يميز هذا التحويل عن باقي التحويلات كونه يستعمل ما يعرف بالمرشحات (Filters) حيث يتم تقسيم الإشارة الى مرشحين اثنين High Pass و Low Pass وهما مرشح التمرير المنخفض ويرمز له $L(z)$ ويتم من خلاله حساب ما يسمى بمعاملات القياس scale coefficients والتي تمثل اشارات ذات تردد منخفض ومرشح التمرير العالي ويرمز له $H(z)$ والذي يتم من خلاله حساب المعاملات التفصيلية (coefficient detail) و التي تمثل اشارات ذات تردد عالي وكما موضح في الشكل (8) ادناه او يمكن حسابه من باستخدام المصفوفات [12,11,15].



الشكل (7) يوضح مرشحين التمرير العالي والمنخفض للإشارة $x(n)$

يتم ادخال الإشارة المتقطعة $x(n)$ الى بنك المرشحات filter banks فيتم ترشيحها الى $L(z), H(z)$ وهي تمثل في نفس الوقت معاملات الموجة والتي تقوم بتجزئة المحتوى الترددي للإشارة الى حزم متساوية ، يتم بعدها تحويل المعاملات من مستوى واحد من الدقة j إلى المستوى التقريبي الاتي $j-1$. ينتج عن ذلك خوارزمية سريعة ودقيقة تدل عليها خوارزمية الهرم وتعرف المعاملات الموجية رياضيا كما يلي : [12]

$$= \sum L_n c_{j-1,k} - 2k c_{j,n} \quad (4)$$

$$= \sum H_n d_{j-1,k} - 2k c_{j,n} \quad (5)$$

حيث ان :

C_{j-1} هو معامل القياس عند المستوى $j-1$

d_{j-1} هو معامل التفصيل عند المستوى $j-1$

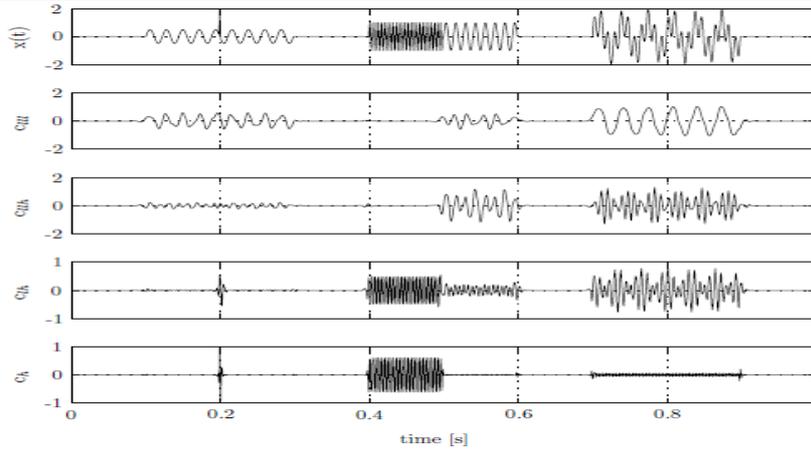
اما عبارة $2k$ فهي تعني ان البيانات تم ترشيحها من خلال مرشحين اثنين هما L و H ، وبعدها يتم سحب كل مشاهدة تسلسلها زوجي وبالتالي كل مرشح سينتج نصف المحتوى الترددي المدخل ، وبذات عدد العينات وعليه فان مخرجات المرشحين معا" تحتوي على نفس المحتوى الترددي ولكن عدد العينات سيتضاعف عند المخرجات عما كان عليه عند المدخلات ولهذا السبب سيتم تخفيض عدد العينات (downsampling) بمقدار 2 ويشار إلى هذه العملية بالرمز $(\downarrow 2)$ ، بعدها تتم عملية اعادة بناء الإشارة الاصلية واستعادة الإشارة تتم من خلال زيادة عدد العينات (upsampling) ويرمز لها بالرمز $(\uparrow 2)$ ولكي تكون عملية بناء الإشارة بشكل مثالي يجب ان تكون المرشحات في مرحلتها التحليل والتركيب متعامدة لتجنب فقدان معلومات الإشارة الاصلية ، ومن ثم يتم تمرير الإشارة عبر المرشحين $L(z), H(z)$ ، حيث ان الجزء الذي يحتوي على المعلومات المهمة التي تخص الإشارة الاصلية تكون عادة ضمن ممر التردد المنخفض ولهذا السبب يكون دائما الاهتمام بالترددات واطئة التردد ، و سبب اهمال التكرارات عالية التردد كونها تحتوي على تشويش الإشارة وبالتالي سيتم استبعادها . ويمكن كتابة التحويل الموجي المتقطع بصيغة المصفوفات من خلال اخذ مصفوفة متعامدة W مع قاعدة موجية متعامدة فينتج عنها متجه w من معاملات الموجة.

$$= Wyw$$

حيث يمثل الجزء العلوي (L) من المصفوفة مرشحات القياس ذات التردد المنخفض لينتج معاملات القياس او معاملات التقريب والجزء السفلي (H) يمثل مرشحات ذات التردد العالي لينتج معاملات الموجية . وبما انه مصفوفة موجية متعامدة فبالإمكان اخذ معكوس لها للحصول على التقدير النهائي للدالة وعليه تكون الصيغة النهائية لتقدير دالة الانحدار الموجي [3,5]:

$$= W^{-1}w \quad \hat{y}_i$$

$$W_N = \begin{bmatrix} L \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & \dots & h_1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_1 \\ g_0 & g_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$



الشكل (8) يوضح التحويل الموجي المتقطع للإشارة X(t)

6- تحويل الموجات المتعددة (Maltiwavelet Transformation)

تم تطوير فكرة التحويلات الموجية المتعددة في اوائل التسعينيات ومن قبل العديد من الباحثين في مجال الرياضيات والاحصاء ومعالجة الاشارة و ابرزهم الباحثان Geronimo, Hardin (1994) وهما اول من قدم النهج الرياضي للموجات المتعددة والتي برزت كتطوير للتحويلات الموجية التقليدية . حيث يستخدم عدة دوال موجية بدلاً من دالة واحدة لتحليل الاشارة ، يهدف هذا النهج الى تحسين دقة التحليل في المجالات المختلفة مثل تحليل الصور ومعالجة الاشارات في البيانات المالية . سمي هذا التحويل متعدد الموجات كونه يستخدم عدة دوال موجية في نفس الوقت اي بخلاف التحويلات السابقة والتي تستخدم دالة واحدة مثل دالة (Daubechies, Haar) ، مما يسمح بتحليل اكثر دقة واستيعاب ميزات مختلفة من الاشارة .

ولفهم الشكل الرياضي للتحويل الموجي متعدد الموجات يجب علينا البدء بتعريف التحويل الموجي التقليدي اذ انه يعتمد على دالة الام (Mother Wavelet) والتي يتم تحويلها عبر عمليات القياس (Scaling) والازاحة (Shifting) ويمكن تحليلها رياضياً وفق الاتي :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (8)$$

حيث ان :

a : معامل التحجيم (التحليل عند عدة مستويات) .

b : معامل الازاحة (التحليل الزمني) .

$\psi(t)$: هي دالة الموجة الاساسية .

بعد تعريف دالة الموجة للتحويل الموجي التقليدي نوضح الان التحويل الموجي متعدد الموجات اذ انه يستخدم مجموعة من الدوال الموجية بدلاً من دالة واحدة وفق الاتي [8,31,18] :

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_n(t) \end{bmatrix}$$

حيث ان : $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ هي دوال موجية مختلفة تستخدم في التحليل حيث .

يتم تمثيل الاشارة من خلال التحويل الموجي المتعدد بواسطة مجموعة من معاملات التقريب والتفصيل

$$W_j(k) = x(n) \cdot (k - \psi_j 2^j n) \quad (9)$$

حيث ان :

$x(n)$: الاشارة المدخلة .

ψ_j : مجموعة الدوال الموجية المتعددة .

$W_j(k)$: تمثل معاملات الاشارة في المستوى j .

7- التحويل الموجي المتقطع باستخدام تحويل فورييه للزمن القصير

قدمت هذه الطريقة لأول مرة عام (1996) من قبل كلاً من Truong Nguyen & Robertg ، حيث ناقشا كيفية تسريع العمليات الحسابية باستخدام تحويل فوارير للزمن القصير (STFT) خاصة في تطبيقات ضغط الصور ومعالجة الاشارات اذ انه من خلال استعمال تحويل فوارير كخطوة اولى في عملية التقدير يمكن تحويل الالتفاف (Convolution) الى عملية ضرب العناصر في المجال الترددي مما يقلل الزمن الى $O(N \log N)$ بدلاً من $O(N^2)$ ، وبالإمكان تلخيص حساب تحويل المويجي المتقطع باستخدام تحويل فوارير للزمن القصير (FFT) من خلال الخوارزمية الآتية :

الخطوة (1) : حساب تحويل فوارير السري (FFT) للإشارة الداخلة $(x(n))$ والذي يعطي $x(k)$

$$FFT[x(n)] = x(k) \quad (10)$$

الخطوة (2) : حساب تحويل فوارير السري للمرشح g والذي ينتج عنه $G(k)$ (مرشح الترددات العالية) .

$$FFT[g] = G(k) \quad (11)$$

الخطوة (3) : حساب تحويل فوارير السري للمرشح h والذي ينتج عنه $H(k)$ (مرشح الترددات المنخفضة) .

$$FFT[h] = H(k) \quad (12)$$

الخطوة (4) : يتم ضرب إشارة فوارير $x(k)$ بطيف المرشحات الترددية للحصول على ما يلي :

- مرشح الترددات المنخفضة $H(k)$ لاستخراج الإشارة التقريبية (Approximation) .

$$H(k) * X(k) = YL(K) \quad (13)$$

- مرشح الترددات العالية $G(k)$ لاستخراج الإشارة التفصيلية (Detail) .

$$G(k) * X(k) = YH(K) \quad (14)$$

الخطوة (5) : العودة الى المجال الزمني باستخدام تحويل فوارير العكسي بعد الترشيح في المجال الترددي ، يتم استعادة الإشارة الى المجال الزمني باستخدام تحويل فوارير السري العكسي (IFFT) :

$$yL(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} YL(k) e^{j2\pi kn/N} \quad (15)$$

$$yH(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} YH(k) e^{j2\pi kn/N} \quad (16)$$

الخطوة (6) : تقليل عدد العينات (Down Sampling) بالابقاء على كل عينة ثنائية فقط من خلال تحويل المويجات .

$$yH(2n) = yL(2n), XH(n) = XL(n) \quad (17)$$

هذا الاجراء يؤدي الى تقسيم الإشارة الاصلية الى جزئين بحجم اصغر هما :

- الإشارة التقريبية $XL(n)$ التي تمثل الترددات المنخفضة .

- الإشارة التفصيلية $XH(n)$ التي تمثل الترددات العالية .

بعد ذلك يتم تكرار العملية على الإشارة التقريبية $XL(n)$ لانشاء مستويات تحليل متعددة (Multi-Level-Decomposition)

الخطوة (7) : عرض النتائج ورسم الإشارة الاصلية ومكوناتها [4,17,23,25] .

8- التحويل المويجي متعدد المويجات باستخدام تحويل فوارير للزمن القصير

Fast Fourier-Multiwavelet Transforms

فكرة هذه الطريقة مشابهة للطريقة السابقة الا انه يتم استخدام التحويل المويجي متعدد المويجات بدلاً من التحويل المويجي التقليدي مما يسمح بتحليل اكثر دقة واستيعاب ميزات مختلفة من الإشارة ويمكن تلخيص الخوارزمية لحسابه وفق الخطوات التالية :

الخطوة (1) : حساب تحويل فوارير السري (FFT) للإشارة الداخلة $x(n)$ والذي يعطي $x(k)$

$$FFT[x(n)] = x(k) \quad (18)$$

الخطوة (2) : حساب تحويل فوارير السري (FFT) للمرشح g والذي ينتج عنه $G(k)$ (مرشح الترددات العالية) .

$$G_0(k), G_1(k), \dots, G_3(k) \quad (19)$$

الخطوة (3) : حساب تحويل فوارير السري للمرشح H والذي ينتج عنه $H(k)$ (مرشح الترددات المنخفضة) .

$$H_0(k), H_1(k), \dots, H_3(k) \quad (20)$$

الخطوة (4) : يتم ضرب إشارة فورييه $x(k)$ بطيف المرشحات الترددية للحصول على ما يلي :
- مرشح الترددات المنخفضة $H(k)$ لاستخراج الإشارة التقريبية (Approximation).

$$H_0(k), H_1(k), \dots, H_3(k) * X(k) = YL(K) \quad (21)$$

- مرشح الترددات العالية $G(k)$ لاستخراج الإشارة التفصيلية (Detail).

$$G_0(k), G_1(k), \dots, G_3(k) * X(k) = YH(K) \quad (22)$$

الخطوة (5) : العودة الى المجال الزمني باستخدام تحويل فوريير العكسي بعد الترشيح في المجال الترددي ، يتم استعادة الإشارة الى المجال الزمني باستخدام تحويل فورييه السريع العكسي (IFFT) :

$$yL(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} YL(k) e^{j2\pi kn/N} \quad (23)$$

$$yH(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} YH(k) e^{j2\pi kn/N} \quad (24)$$

الخطوة (6) : نطبق التحويل المويجي متعدد المويجات على ترددات معينة ، اذ يتم تطبيقه على نطاقات ترددية معينة بدلاً من تطبيقه على كامل الإشارة من خلال استخدام عدة دوال موجية لمعالجة المعلومات الترددية المستخرجة .

الخطوة (7) : عرض النتائج ورسم الإشارة الاصلية ومكوناتها [7,10,19,29].

9- دوال الاختبار Test function

لكل منهجية حديثة طرقها وتطبيقاتها الخاصة في الاختبار التي تتماشى مع تطور الواقع العملي للدراسة قيد البحث، فمنهجية الانحدار المويجي هي الاخرى استخدمت عدة دوال للاختبار لمواكبة التطور الحاصل في نظرية المويجات وهي دوال اختبار قياسية تمثل أمثلة نموذجية للدوال التي يمكن مواجهتها في التطبيقات العملية الحديثة في مجالات مختلفة، اذ قدم العديد من العلماء مثل (Donoho & Jonston) عام (1994) الذين اقترحوا دوال تكون ذات معاملات كبيرة عند كل قياس سميت (Doppler)، وHeavisine, Blocks، وخلال نفس العام قدم Nason & Silverman دوال اخرى مثل (Piecewise Polynomial)، وكون هذه الدوال هي دوال اختبار قياسية تم استخدامها في تجارب المحاكاة ليتم محاكاتها مع اي ظاهرة تحدث في الجانب التطبيقي مشابهة مع الجانب الواقعي وفيما يلي صيغ لبعض دوال الاختبار: [2,12]

10-دالة (Doppler)

تمثل دالة Doppler مثالاً كلاسيكياً لإشارة ذات تردد متغير (no stationary frequency)، حيث يكون التردد أعلى بشكل كبير عند القيم القريبة من الصفر. تُستخدم هذه الدالة بشكل واسع لاختبار قدرة خوارزميات التقدير على التعامل مع إشارات تتغير بشكل حاد وغير متجانس. يتميز هذا النوع من الإشارات بأنه يحتوي على مناطق ذات تذبذبات عالية ومتغيرة باستمرار. تُستخدم هذه الدالة في اختبار كفاءة طرق المويجات في التقاط التغيرات الموضعية الحادة في التردد وتكون مناسبة لتقييم طرق التقدير في البيانات المالية والفيزيائية مثل الرادار أو التصوير الطبي والشكل الرياضي للدالة وفق الاتي [2,11].

$$\sin \{2\pi(1 + \varepsilon)\}, \varepsilon = 0.05, f_1(x) = \{x(1 - x)\}^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

11- دالة Heavisine

تجمع هذه دالة بين عنصرين دالة جيبية تمثل تغيرات لمساء منتظمة قفزتان حادثان عند $x=0.3$ و $x=0.72$. وهذا يجعلها مثالاً جيداً لاختبار النماذج في ظروف مختلطة، حيث توجد كل من النعومة والانقطاعات تستخدم في تقييم قدرة النماذج على الحفاظ على التفاصيل الدقيقة في المناطق الملساء اختبار حساسية النموذج للقفزات المتناثرة في إشارة لمساء والشكل الرياضي للدالة وفق الاتي [2,10].

$$4\sin 4\pi x - \sin(x-0.3) - \sin(0.72-x)k = f_2(x) \quad (26)$$

12- دالة (Blocks)

دالة مقطعية تتكون من مجموعة من القفزات (jumps) عند مواقع محددة: تستخدم دالة Blocks لتقليد إشارات تحتوي على تغيرات فجائية (discontinuities). تُعد مثالاً تقليدياً يُستخدم لاختبار قدرة تقنيات المويجات على التعامل مع الإشارات غير المستمرة أو ذات القفزات. وهي تمثل حالة شائعة في إشارات الوقت الحقيقي، مثل بيانات المالية والاقتصادية وبيانات القلب أو إشارات الحواف في الصور. تستخدم في تقييم فعالية المويجات في كشف وتحديد التحولات المفاجئة واختبار أداء خوارزميات تقليل الضوضاء في حالات القفزات الحادة والشكل الرياضي للدالة وفق الاتي [2,19].

$$= \sum h_j k(x-x_j), \quad k(x) = \{1 + \text{sgn}(x)\}/2 \quad f_3(x) \quad (27)$$

$$(0.1, 0.13, 0.15, 0.23, 0.25, 0.40, 0.44, 0.65, 0.76, 0.78, 0.81)x_j =$$

$$=(4, -5, -4, 5, -4.2, 2.1, 4.3, -3.1, 2.1, -4.2)h_j$$

13- نموذج المحاكاة

لانموذج الانحدار اللامعلمي $y_i = g(t_i) + e_i$ و ان $t_i = i/n$ ، $i=1, \dots, n$ ، ضمن الفترة $[0,1]$ متباعدة بشكل متساوي ، اما الاخطاء e_i يتم توليدها على انها اخطاء تتوزع توزيعاً طبيعياً ، دالة الانحدار اللامعلمي والتي سيتم تقديرها في ظل توافر شروط التحويل ، اما المتغير المعتمد فيتم توليده من خلال دوال الاختبار مضافاً اليها التشويش e_i .
وبغية تنفيذ تجارب المحاكاة تم استعمال العوامل الآتية :

- 1- حجوم العينات n ، تم استعمال ثلاثة انواع من احجام العينات وهي 128 ، 256 ، 512 وهي احجام يكون حجم العينة دايديك (Dyadic) اي $n = 2^j$ ، لكل J عدد صحيح موجب وتم اختيارها لتكون قيم اعلى واقل ومساوية لحجم البيانات الحقيقية.
- 2- نسب التشويش (SNR) حيث تم استعمال اثنان من نسب التشويش وهي نسبة تشويش عالية متمثلة بـ (SNR=5) ونسبة تشويش قليلة متمثلة بـ (SNR=10).
- 3- دوال الاختبار $g(t_i)$ ، المستعملة تم اختيارها لتمثل حالات مختلفة من الواقع العملي و تم استعمال دوال (Doppler) والتي تمتاز بتردداتها المتغيرة ، كذلك دالة (Heavesin) والتي تمتاز كونها متقطعة وغير مستمرة بالاضافة الى دوال (Blocks) وهي دوال غير دورية ذات مطبات حادة والموضحة في الجانب النظري .
- 4- تم استعمال موجة (Daubechies) عند عدد عزوم تلاشي $N = 10$ كدالة ام (mother wavelet) .

14- تجارب المحاكاة

تضمنت تجارب المحاكاة دوال الاختبار المستعملة في انموذج الانحدار اللامعلمي (1-1) لتوليد البيانات (X_i, Y_i) من ثم اجريت تجارب المحاكاة لتقدير الانموذج من خلال توظيف عدد من طرائق التقدير لدالة الانحدار اللامعلمي في ظل عدم تساوي المسافات زمنياً وحجم عينة اعتباطي تم تكرار التجربة (500) بثبات جميع العوامل عدا المتغير العشوائي e_i والذي يعاد توليده عند تكرار كل تجربة.

15- تحليل تجارب المحاكاة

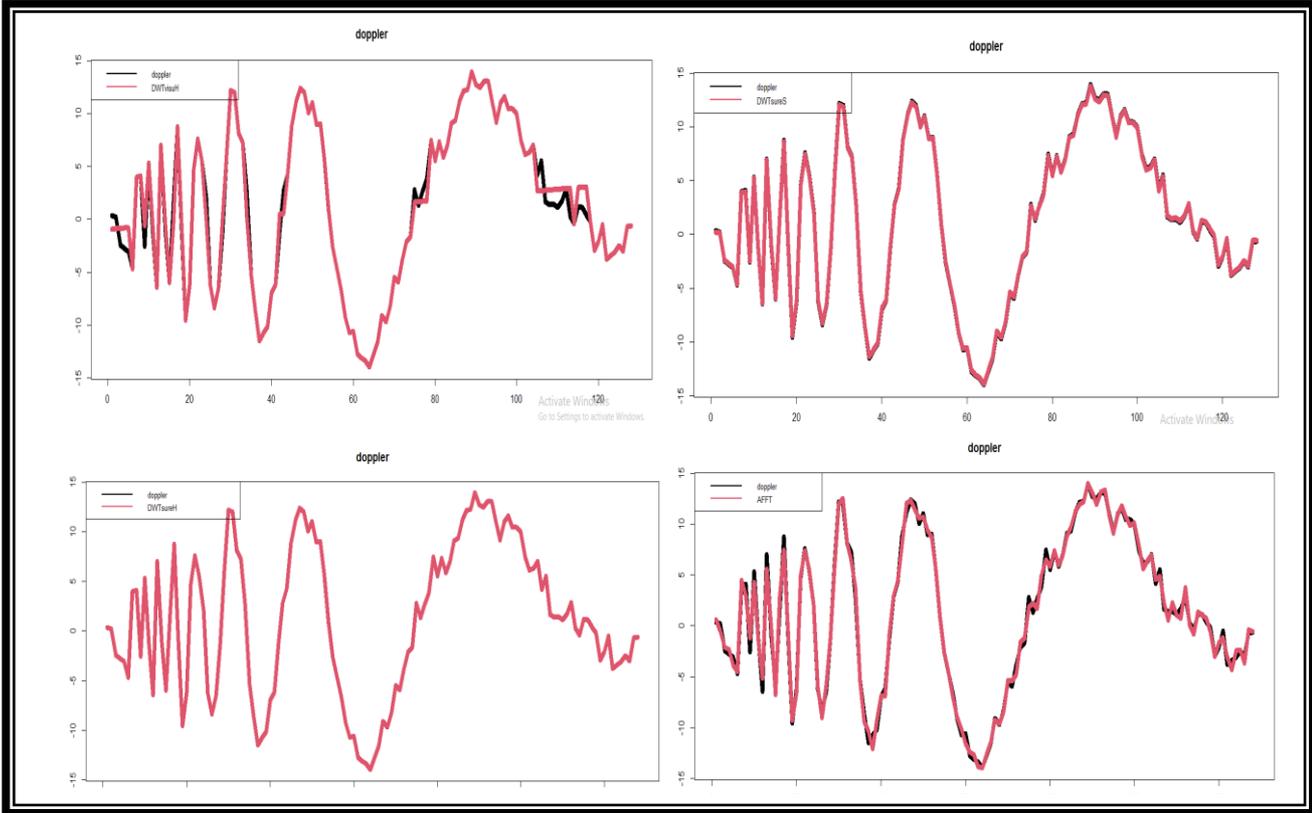
اجريت تجارب المحاكاة باستعمال ثلاث حجوم للعينات وبتكرار (500) . اذ سيتم تحليل وتفسير النتائج من خلال مقارنة الطرائق بمعيار (AMSE) حسب كل دالة من دوال الاختبار الموضحة في الجانب النظري وعند كل حجم عينة وباختلاف نسب التشويش لغرض الاطلاع على اداء الطرائق باختلاف المواقف المتوقع مواجهتها في الجانب التطبيقي وكما يلي :

جدول رقم (1) يبين معيار (AMSE) لمقارنة التقديرات لدالة (Doppler) المشوشة لحجوم عينات $n=128, n=256, n=512$ ونسبة إشارة إلى تشويش (SNR=5,10)

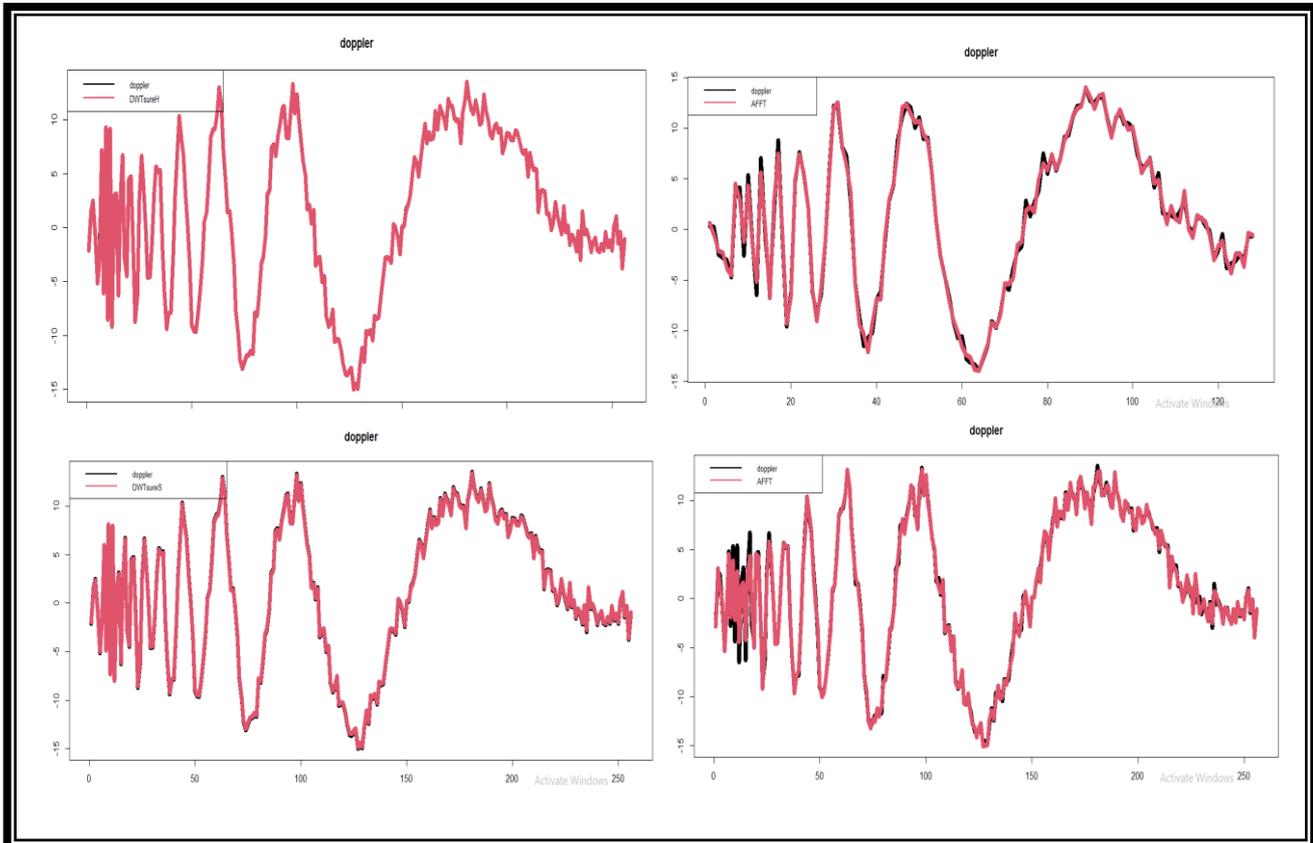
n	SNR=5			SNR=10		
	FFT-DWT	FFT-MDWT	AFFT-DWT	FFT-DWT	FFT-MDWT	AFFT-DWT
128	0.06077073	0.1311446	0.1034977	0.06437351	0.1298054	0.1027827
256	0.04030387	0.1347615	0.05694452	0.03474428	0.1289051	0.05144814
512	0.01983778	0.1510291	0.03028722	0.0156956	0.1453977	0.0503415

- 1- عند SNR=5 باختلاف حجوم العينات فان افضل طرائق التقدير هي طريقة (FFT-DWT) تلاها بعد ذلك طريقة (AFFT-DWT) بينما تراجعت طريقة (FFT-MDWT) .
- 2- عند زيادة حجم العينة نلاحظ انخفاض قيمة AMSE لكلا من طريقتي (AFFT-DWT FFT-DWT) بينما نلاحظ ازدياد قيمته عند طريقة FFT-MDWT.

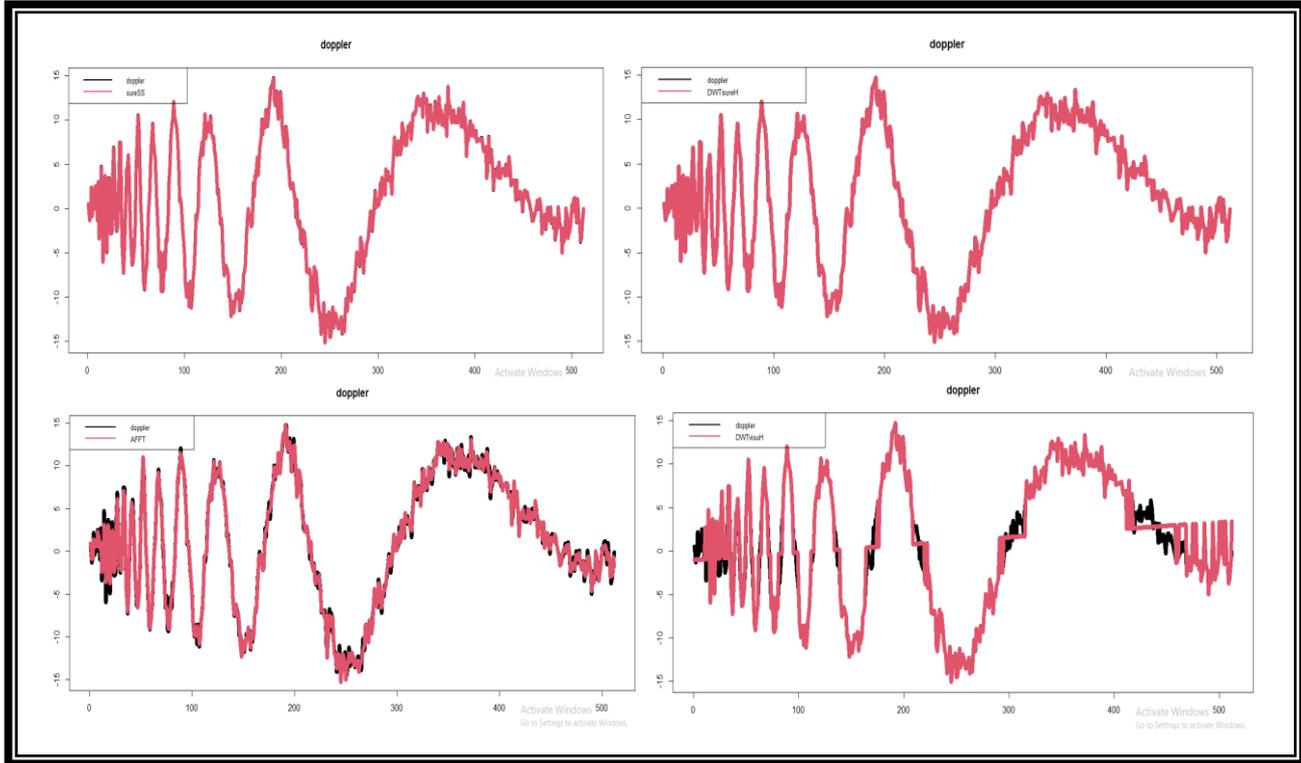
نلاحظ تطابق اداء الطرائق عند نسبة التشويش $SNR=10$ للقرتين اعلاه.



الشكل (9) يوضح القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية للمتغير المعتمد Y عند نسبة تشويش 5 وحجم عينة 128 لدالة Doppler



الشكل (10) يوضح القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية للمتغير المعتمد Y عند نسبة تشويش 5 وحجم عينة 256 لدالة Doppler
ISSN: 2960-1363 Vol. 02 No.04



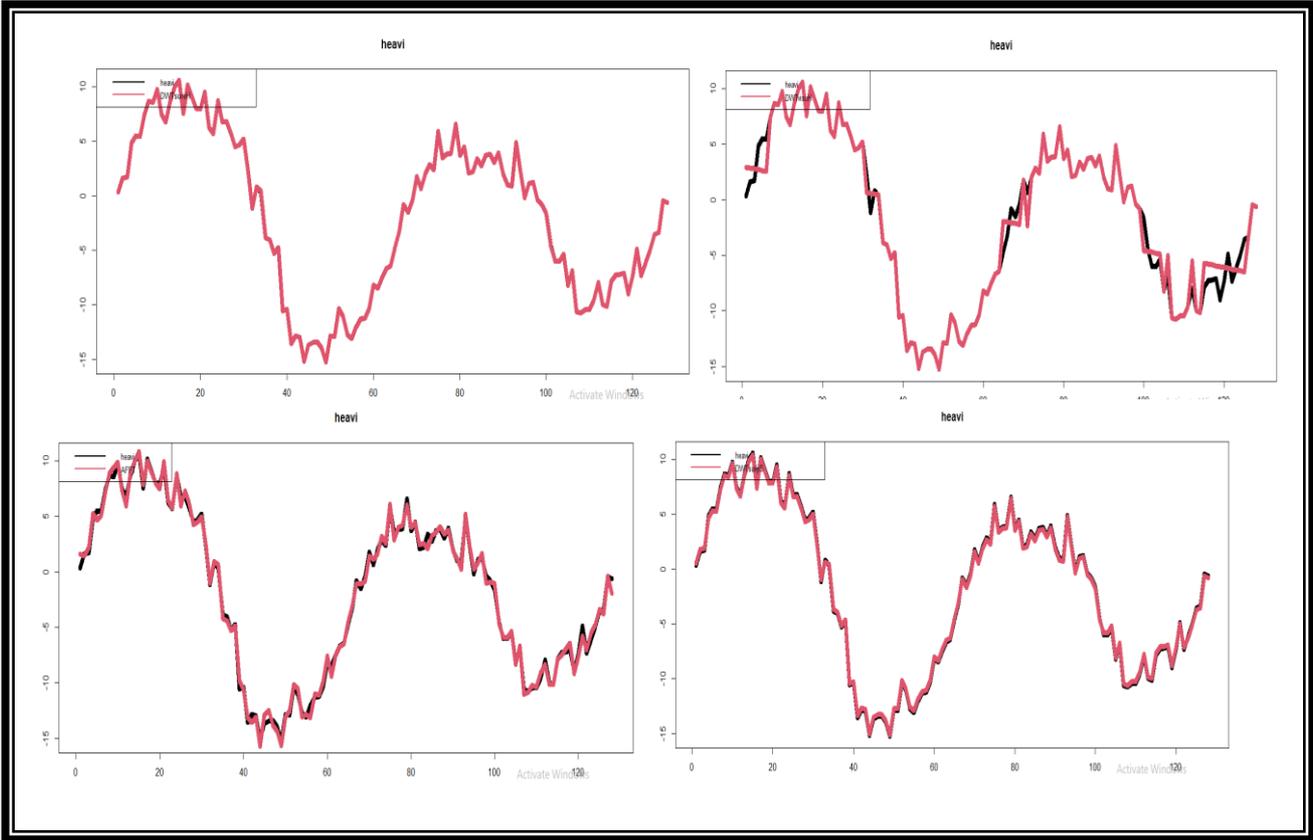
الشكل (11) يوضح القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية للمتغير المعتمد Y عند نسبة تشويش 5 وحجم عينة 512 لدالة Doppler

جدول رقم (2) يبين معيار (AMSE) لمقارنة التقديرات لدالة (Havisin) المشوشة لحجوم عينات $n=128, n=256, n=512$ ونسبة إشارة إلى تشويش ($SNR=5$)

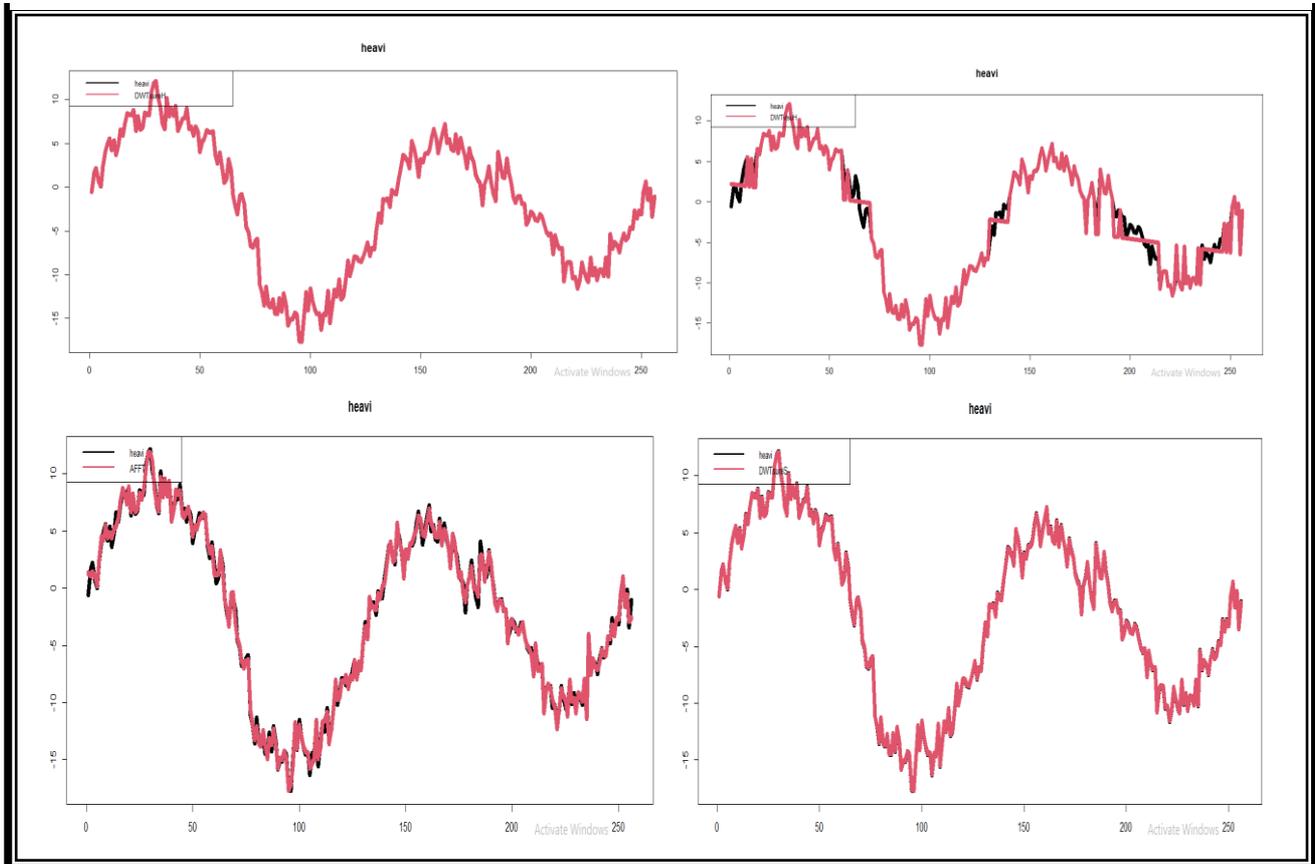
n	SNR=5			SNR=10		
	FFT-DWT	FFT-MDWT	AFFT-DWT	FFT-DWT	FFT-MDWT	AFFT-DWT
128	0.01167366	0.01940464	0.01483342	0.0068924	0.01463643	0.00987007
256	0.01118116	0.02429867	0.01321063	0.005047922	0.01323411	0.006339658
512	0.009696901	0.02707303	0.01132502	0.005399181	0.01815605	0.006120703

- 1- عند $SNR=5$ باختلاف حجوم العينات فان افضل طرائق التقدير هي طريقة (FFT-DWT) تلاها بعد ذلك طريقة (AFFT-DWT) بينما تراجعت طريقة (DWT) بينما تراجعت طريقة (FFT-MDWT).
- 2- عند زيادة حجم العينة نلاحظ انخفاض قيمة AMSE لكلا من طريقتي (AFFT-DWT FFT-DWT,) بينما نلاحظ ازدياد قيمته عند طريقة FFT-MDWT.

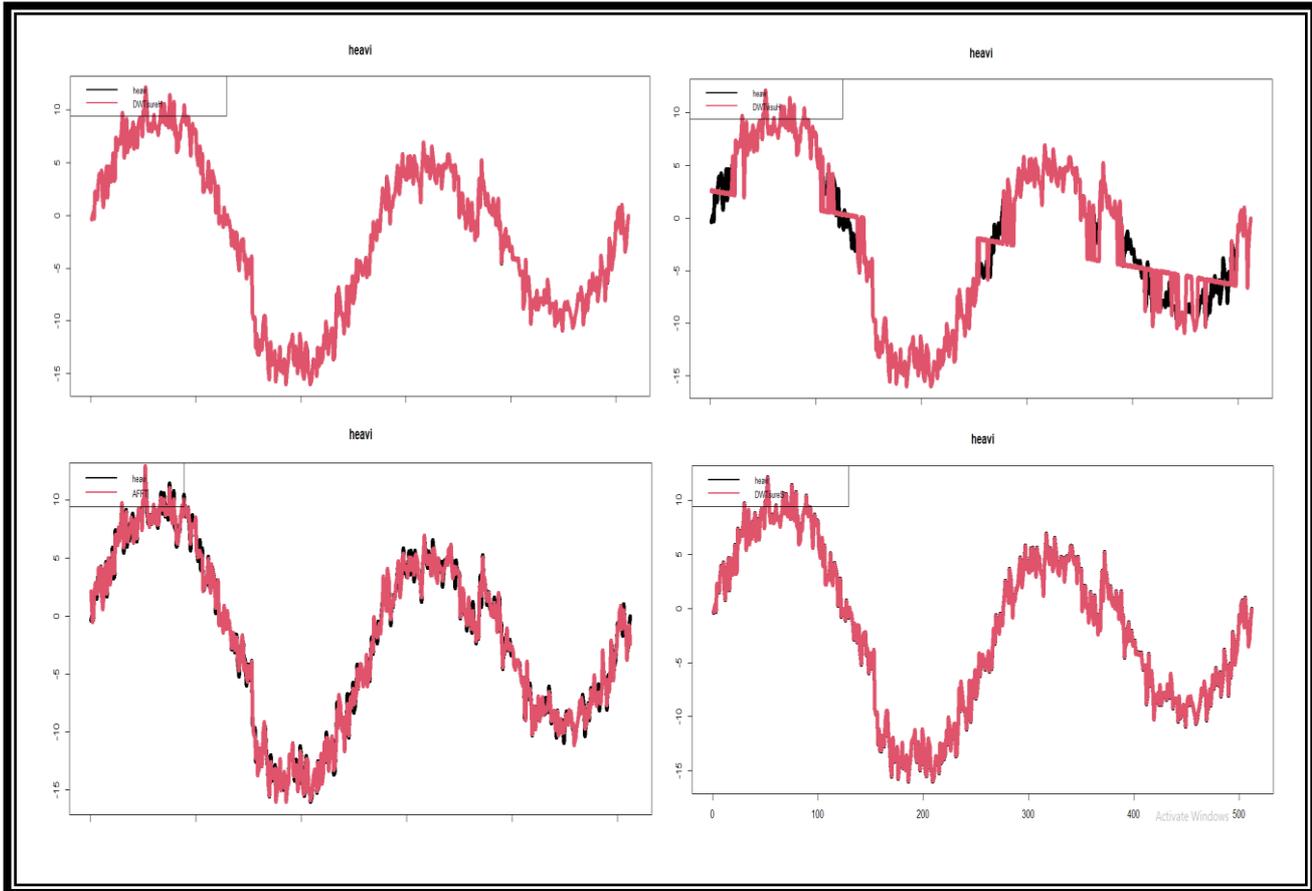
نلاحظ تطابق اداء الطرائق عند نسبة التشويش $SNR=10$ للفقرتين اعلاه



الشكل (12) يوضح القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية للمتغير المعتمد Y عند نسبة تشويش 5 وحجم عينة 128 لدالة Heavi



الشكل (13) يوضح القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية للمتغير المعتمد Y عند نسبة تشويش 5 وحجم عينة 256 لدالة Heavi

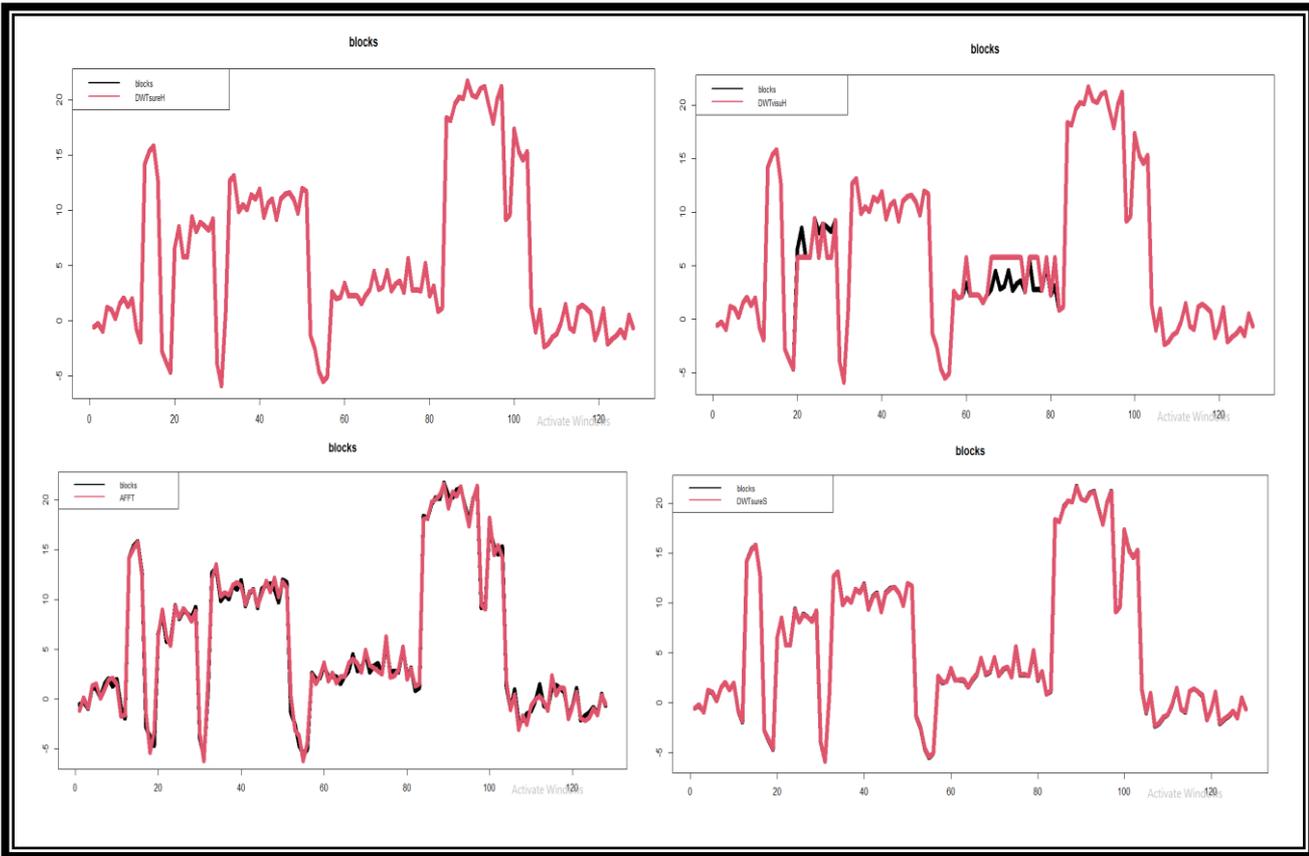


الشكل (14) يوضح القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية للمتغير المعتمد Y عند نسبة تشويش 5 وحجم عينة 512 لدالة Heavi

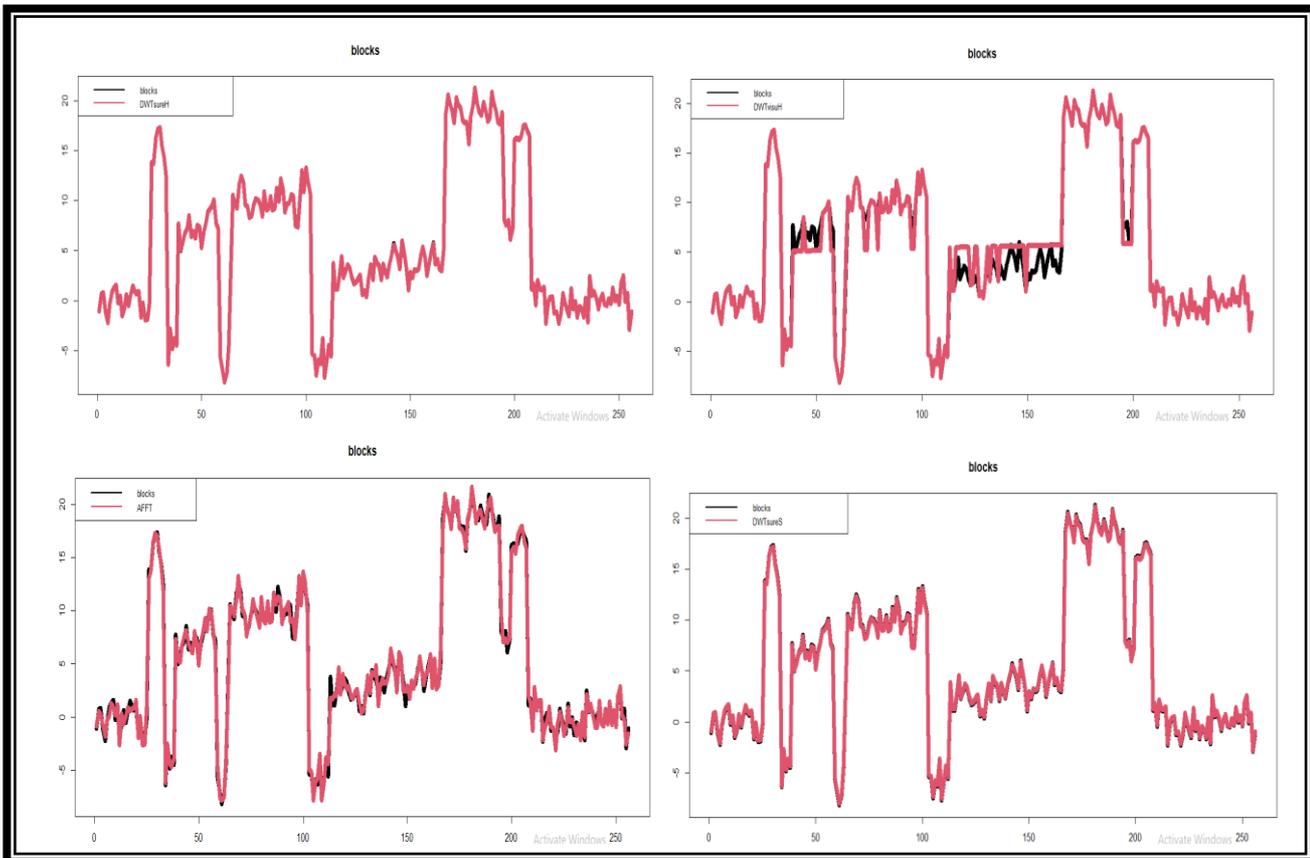
جدول رقم (3) يبين معيار (AMSE) لمقارنة التقديرات لدالة (Block) المشوشة لحجوم عينات $n=128, n=256, n=512$ ونسبة إشارة إلى تشويش (SNR=5)

SNR=5			SNR=10			
n	FFT-DWT	FFT-MDWT	AFFT-DWT	FFT-DWT	FFT-MDWT	AFFT-DWT
128	0.1050136	0.1788065	0.1373894	0.1073632	0.1843175	0.1382303
256	0.04078999	0.2188269	0.08018873	0.04008521	0.1935035	0.07639131
512	0.02767823	0.2154212	0.04058122	0.0275731	0.1942409	0.03896609

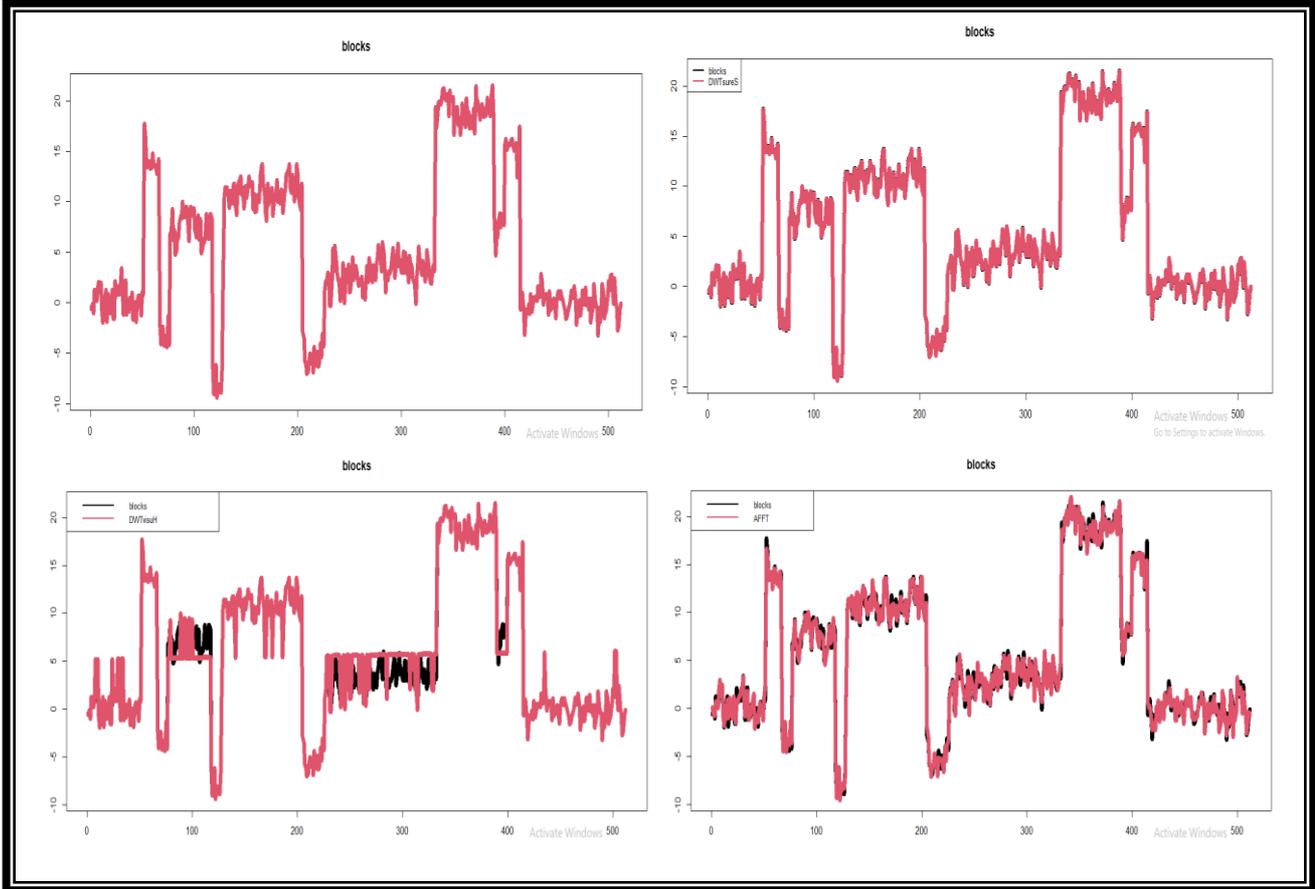
- 1- عند $SNR=5$ باختلاف حجوم العينات فان افضل طرائق التقدير هي طريقة (FFT-DWT) تلاها بعد ذلك طريقة (AFFT-DWT) بينما تراجعت طريقة (DWT) بينما تراجعت طريقة (FFT-MDWT).
- 2- عند زيادة حجم العينة نلاحظ انخفاض قيمة AMSE لكلا من طريقتي (AFFT-DWT FFT-DWT,) بينما نلاحظ ازدياد قيمته عند طريقة FFT-MDWT.
- 3- نلاحظ تطابق اداء الطرائق عند نسبة التشويش $SNR=10$ للفقرتين اعلاه



الشكل (15) يوضح القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية للمتغير المعتمد Y عند نسبة تشويش 5 وحجم عينة 128 لدالة Block



الشكل (16) يوضح القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية للمتغير المعتمد Y عند نسبة تشويش 5 وحجم عينة 256 لدالة Block



الشكل (17) يوضح القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية للمتغير المعتمد Y عند نسبة تشويش 5 وحجم عينة 128 لدالة Block

الاستنتاجات

- من خلال ما تم الحصول عليه في الجانب التجريبي باستعمال المحاكاة تم استنتاج الآتي :
- 1- بصورة عامة فان طريقة (FFT-DWT) هي افضل طرائق التقدير باختلاف حجم العينة ونسب التشويش ودوال الاختبار تلاها بعد ذلك (AFFT-DWT) ويعود السبب في ذلك الى كون التقديرات الموجية تتمتع بمرونة عالية مع النماذج اللاخطية وكذلك تتعامل مع الاشارة موضعيا وزمانيا .
 - 2- يلاحظ من النتائج ان افضل دوال الاختبار اداءً باختلاف احجام العينات ونسب التشويش ومعالم الارتباط هي دالتي اختبار (Havisin, Doppler) توالياً ويعود السبب في ذلك الى انها مرنة في التعامل مع التغيرات المفاجئة والتقلبات في التردد مما يجعلها مناسبة للتعامل مع بيانات ذات خصائص غير خطية ومعقدة.
 - 3- لا يوجد نمط عام سواء كان زيادة في قيمة (AMSE) او نقصانها بزيادة حجم العينة باختلاف الطرائق ودوال الاختبار اذ نلاحظ انخفاض قيمة (AMSE) لطريقتي (AFFT-DW, FFT-DWT) في حين تزداد القيمة لطريقة FFT-MDWT.
 - 4- لا يوجد نمط عام سواء كان زيادة في قيمة (AMSE) او نقصانها عند تقليل نسبة التشويش SNR او زيادتها باختلاف الطرائق ودوال الاختبار اذ نلاحظ انخفاض قيمة (AMSE) عند دالة Havisin في حين نلاحظ عندي دالتي الاختبار الاخرى زيادة قيمة (AMSE) عند حجم عينة 128 بينما تنخفض عند حجمي عينة 256 و 512 .

المصادر

- 1- حمزة ، سعد كاظم ، (2015) ”استخدام قيم عتبة مختلفة في مقارنة بعض طرائق التقدير الموجي لدالة الانحدار اللامعلمي بوجود بيانات مفقودة“ ، مجلة كلية الرافدين الجامعة للعلوم.
- 2- Abramovich, F., Bailey, T. C., & Sapatinas, T. (2000). Wavelet analysis and its statistical applications. *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)*, 49(1), 1-29.
- 3- Al Wadi, S., Ismail, M. T., & Karim, S. A. A. (2010). A comparison between the Daubechies wavelet transformation and the fast Fourier transformation in analyzing insurance time series data. *Far East J. Appl. Math*, 45(1), 53-63.
- 4- Akin, M. (2002). Comparison of wavelet transform and FFT methods in the analysis of EEG signals. *Journal of medical systems*, 26(3), 241-247.
- 5- Amandeep.K. (2016) . Comparative Analysis of Wavelet Transform and Fourier Transform.vol 5,issue1,2016 Department of Mathematics, Guru Nanak Dev University Amritsar
- 6- Beck, T. W., Housh, T. J., Johnson, G. O., Weir, J. P., Cramer, J. T., Coburn, J. W., & Malek, M. H. (2005). Comparison of Fourier and wavelet transform procedures for examining the mechanomyographic and electromyographic frequency domain responses during fatiguing isokinetic muscle actions of the biceps brachii. *Journal of Electromyography and Kinesiology*, 15(2), 190-199.
- 7- Bergmann, R. (2013). The fast Fourier transform and fast wavelet transform for patterns on the torus. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 35(1), 39-51.
- 8- Cotronei, M., Montefusco, L. B., & Puccio, L. (2002). Multiwavelet analysis and signal processing. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 45(8), 970-987.
- 9- Czerwinski, R. N., & Jones, D. L. (2002). Adaptive short-time Fourier analysis. *IEEE Signal Processing Letters*, 4(2), 42-45.
- 10- Faraggi.M(2019). Extracting Features from ECG Time Series Using Fourier and Wavelet Transforms.2019
- 11- Hamza, S. K. (2024). Comparison of Some Wavelet Transformations to Estimate Nonparametric Regression Function. *Journal of Economics and Administrative Sciences*, 30(142), 532-549.
- 12- He, Y. (2015). *Wavelet estimators in nonparametric regression model and simulation study*. The University of Alabama in Huntsville.
- 13- Heo, B., & Kim, J. (2025, July). WaveRec: Is Wavelet Transform a Better Alternative to Fourier Transform for Sequential Recommendation?. In *Proceedings of the 2025 International ACM SIGIR Conference on Innovative Concepts and Theories in Information Retrieval (ICTIR)* (pp. 497-502).
- 14- Islam, M. R. (2006). Superiority of wavelet theory compared to fourier transform. *Khulna University Studies*, 119-122.
- 15- Kan. Y (2023) A comparison of application of Fourier Transform and Wavelet Transform on image compression. Proceedings of the 2023 International Conference on Machine Learning and Automation. DOI: 10.54254/2755-2721/37/20230494.
- 16- Karim, S. A. A., Kamarudin, M. H., Karim, B. A., Hasan, M. K., & Sulaiman, J. (2011, April). Wavelet Transform and Fast Fourier Transform for signal compression: A comparative study. In *2011 International Conference on Electronic Devices, Systems and Applications (ICEDSA)* (pp. 280-285). IEEE.
- 17- Li, L., Cai, H., Han, H., Jiang, Q., & Ji, H. (2020). Adaptive short-time Fourier transform and synchrosqueezing transform for non-stationary signal separation. *Signal Processing*, 166, 107231.
- 18- Mager, D. E., & Abernethy, D. R. (2007). Use of wavelet and fast Fourier transforms in pharmacodynamics. *The Journal of pharmacology and experimental therapeutics*, 321(2), 423-430.
- 19- Mahmoud, W. A. (2021). Computation of wavelet and multiwavelet transforms using fast fourier transform. *Journal Port Science Research*, 4(2), 111-117.
- 20- Mallat, S. G. (2002). A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 11(7), 674-693.
- 21- Mariani, M. C., Bhuiyan, M. A. M., Tweneboah, O. K., Beccar-Varela, M. P., & Florescu, I. (2020). Analysis of stock market data by using Dynamic Fourier and Wavelets techniques. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 537, 122785.
- 22- Nason, G. P. (Ed.). (2008). *Wavelet methods in statistics with R*. New York, NY: Springer New York.

- 23-** Pasarella, M. D., Sifriyani, S., & Amijaya, F. D. T. (2022). Nonparametrik Regression Model Estimation With The Fourier Series The Fourier Series Approach And ITS Application To The Accumulative Covid-19 Data In Indonesia. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 16(4), 1167-1174.
- 24-** Rahman, M. M., Roshid, H. O., Pk, M. A., & Mamun, M. A. A. (2011). A comparative study of wavelet transform and fourier transform.
- 25-** Rafajłowicz, E., & Skubalska-Rafajłowicz, E. (1993). FFT in calculating nonparametric regression estimate based on trigonometric series.
- 26-** Sifuzzaman, M. I. M. R. A. M. Z., Islam, M. R., & Ali, M. Z. (2009). Application of wavelet transform and its advantages compared to Fourier transform.
- 27-** Sun, P. (2015). Comparison of STFT and Wavelet Transform in Time-frequency Analysis. *SCIENCE IN ELECTRONICS*
- 28-** Wang, Z., Wan, F., Wong, C. M., & Zhang, L. (2016). Adaptive Fourier decomposition based ECG denoising. *Computers in Biology and Medicine*, 77, 195-205.
- 29-** Zhang, Y., Guo, Z., Wang, W., He, S., Lee, T., & Loew, M. (2003). A comparison of the wavelet and short-time fourier transforms for Doppler spectral analysis. *Medical engineering & physics*, 25(7), 547-557.