العدد 19A1 كانون الاول 2025 المجلة العراقية للبحوث الانسانية والاجتماعية والعلمية
No.19A1 Dec 2025 Iraqi Journal of Humanitarian, Social and Scientific Research
Print ISSN 2710-0952 Electronic ISSN2790-1254

استخدام الطريقة المعلمية النسبية لحل مشكلة الأمثلية متعددة الأهداف لإيجاد الطريق الأقصر

خالد زغيتون جلوب
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي/ مدرس في جامعة الفلوجة
khalid.z.jaloop@uofallujah.edu.iq

المستخلص

تُعدُّ البرمجة الخطية متعددة الأهداف واحدة من أهم نماذج الأمثلية الرياضية وهي امتداد للبرمجة الخطية التقليدية، حيث يتم الأخذ بالحسبان أكثر من هدف يسعى صانع القرار لتحقيقه وغالباً ما تكون هذه الأهداف متضاربة فيما بينها وهي احدى اهم الصعوبات التي تواجه الباحثين في نماذج الأمثلية متعددة الأهداف. حيث لم يعد في الوقت الراهن مفهوم الحل الأمثل منطقياً، أي بشكل عام لا يوجد حل ممكن يستطيع تحقيق الأمثلية لجميع دوال الهدف في الوقت نفسه. فلنفترض إن لدينا شبكة طرق لها نقطة بدء معينة ونقطة نهاية معينة، وأن الأسهم التي تصل بين نقاط الشبكة تأخذ مسارات متعددة لتصل ما بين نقطة البداية ونقطة النهاية. وسنحاول من خلال مشكلة الطريق الأقصر أن نحصل على أقصر هذه الأسهم أو المسارات التي تربط بين نقطة البداية ونقطة النهاية. فعلى سبيل المثال يُستخدم هذا النموذج أصلاً في الحصول على أقصر مسافة أو مسار يمكن اتخاذه بين مدينة وأخرى من خلال شبكة من الطرق، إذ يُعتبر طول كل قوس دالة لتلك المسافة وللوقت المستغرق في السفر، ولتكلفة السفر أو لأي مقياس آخر، بمعنى آخر نحاول إيجاد أقصر الطرق بين نقطتي البدء والوصول. تهتم مشكلة أقصر مسار التقليدية أساساً بتحديد الطرق المتصلة في شبكة النقل والتي تمثل أقصر مسافة بين المصدر ومكان الوصول في شبكة الطرق عن طريق إيجاد إما الكلفة أو المسافة أو الوقت أو أي مقياس آخر. أما فيما يخص مشكلة البحث قيد الدراسة فهي تتمثل بإيجاد أقصر طريق أمثل متعدد الأهداف لكل من المسافة والكلفة في آن واحد وقد تم توضيح ذلك من خلال تطبيق نموذج عملي مقترح لمشكلة أقصر طريق متعدد الأهداف لحل مشكلة أي شركة أعمال وذلك عن طريق حساب أقصر أو أسرع الطرق بين موقعين للزبائن وهذا ليس بالأمر السهل في الواقع، حيث يرجع ذلك أساساً إلى تغير الظروف في شبكة الطرق بسرعة وبشكل منتظم. لذلك، تقوم الشركة باختبار نظام يقدم المشورة إلى أحد الفنيين حول المسار الذي يجب عليه اتخاذه إلى الزبون التالي، فقط بعد انتهائه من خدمة أحد الزبائن. كما تم حل النموذج العملي المقترح باستخدام الطريقة المعلمية وهي واحدة من أشهر الطرائق الخاصة بحل مشاكل الأمثلية متعددة الأهداف للحصول على حل أمثل متوازن مقبول لصانع القرار.

الكلمات المفتاحية

البرمجة الخطية، الأمثلية متعددة الأهداف، مشكلة أقصر طريق متعدد الأهداف، الطريقة المعلمية النسبية، صنع القرار الأمثل.

Using the relative parametric method to solve the multi-objective optimization problem to find the shortest path

Khalid Zeghaiton Chaloob
Ministry of Higher Education and Scientific Research, Scientific and Lecturer at Falluja University
khalid.z.jaloop@uofallujah.edu.iq

Abstract:

Multi-objective linear programming is one of the most important models of mathematical optimization and is an extension of traditional linear programming, where more than one goal is taken into account by the decision maker to achieve and often these goals are conflicting among themselves, which is one of the most important difficulties facing researchers in multi-objective optimization models. Currently, the concept of an optimal solution no longer makes sense, that is, in general, there is no possible solution that can optimize all the functions of the goal at the same time. Suppose we have a road network with a certain starting point and a certain end point, and the arrows connecting the points of the network take multiple paths to get between the starting point and the end point. And we will try with the shortest path problem to get the shortest of these arrows or paths connecting the starting point and the ending point. For example, this model is originally used to obtain the shortest distance or route that can be taken between one city and another through a network of roads, as the length of each arc is a function of that distance and the time taken to travel, the cost of travel or any other measure, in other words, we are trying to find the shortest route between the starting and arrival points. The traditional shortest path problem is mainly concerned with determining the connected routes in the transport network that represent the shortest distance between the source and the place of arrival in the road network by finding either cost, distance, time or some other measure. As for the research problem under study, it consists in finding the shortest optimal multi-objective route for both distance and cost at the same time. this was explained by applying a proposed practical model for the problem of the shortest multi-objective route to solve the problem of any business company by calculating the shortest or fastest routes between two customer locations. This is not easy in reality, mainly due to changing conditions in the road network quickly and regularly. Therefore, the company is testing a system that advises a technician on what path he should take to the next customer, only after he has finished serving one of the clients. The proposed practical model was also solved using the parametric method, which is one of the most popular methods for solving multi-objective optimization problems to obtain a balanced optimal solution acceptable to the decision maker.

Key words:
Linear programming, multi-objective optimization, multi-objective shortest path problem, relative parametric method, optimal decision making.

1. المقدمة:

تعد الأمثلية متعددة الأهداف واحدة من فروع الأمثلية المدروسة بشكل جيد حيث يتمثل الهدف في إيجاد الحلول المثلى بالاعتماد على مجموعة من الأهداف المتعددة. يمكن تمثيل العديد من مشاكل الحياة الحقيقية باستخدام الشبكات، فعلى سبيل المثال لاالحصر (شبكات النفط والغاز، شبكات النقل اللوجستي، شبكات

الاتصالات، شبكات المياه، ... الخ). إن الهدف الأساسي لنماذج الشبكات هو تحقيق الأداء الأمثل وفقاً للأهداف المحددة بشكل مسبق، لذا قد تظهر في مشاكل الشبكات التقليدية أهداف متعددة مثل (تخفيض التكلفة الكلية، تقليص المسافة، تقليل الوقت، وما إلى ذلك)، إذ يمكن صياغة مشكلة الشبكات رياضيا كمشكلة الطريق الأقصر متعدد الأهداف. هنالك العديد من البحوث التي قُدمت لمعالجة مشاكل الأمثلية متعددة الأهداف ومشكلة الطريق الأقصر متعدد الأهداف، حيث كانت بدايات هذا الموضوع في عام 1881 عندما قدم Edgeworth [1] أول مقترح حول الفكرة الأساسية لتحقيق الأمثلية متعددة الأهداف حيث غير هذا المقترح المفاهيم التقليدية للأمثلية فبدلاً من تحقيق الأمثلية لهدف واحد أصبح تحقيق الأمثلية لأكثر من هدف من خلال إيجاد أفضل المبادلات بين الأهداف المتعددة. كما قام كل من Kuhn و Tucker في عام 1951 [2] بنشر أو مقترح بخصوص الأمثلية متعددة الأهداف وذلك باستخدام مفهوم متجه الأمثلية، وفي عام 1970 قام أيضا كل من Bellman و Zadeh [3] بنشر أول مقترح حول تطبيق نظرية المجموعات الضبابية لحل مشاكل تحقيق الأمثلية متعددة الأهداف ووضع المفاهيم الأساسية لصنع القرار في البيئة الغامضة، كما نشر كل من Yoon و Hwang في عام 1979 [4] بحثا مهما م من خلاله تطوير مشاكل صنع القرار العقلاني عند وجود أهداف متعددة مع استعراض اهم الأساليب المستخدمة في حلها، وتقدموا باستعراض الكثير من الطرائق والأساليب الخاصة بحل مشاكل الأمثلية، ذات الأهداف المتعددة وبضمنها الطريقة المعلمية التي ستستخدم في هذه الورقة.

1 .1. مشكلة البحث:

تعد مشكلة البحث الأساسية في كيفية إيجاد الحل الأمثل متعدد الأهداف لمشكلة الطريق الأقصر بحيث تتحقق اقل مسافة وأدنى تكلفة في آن واحد، مع الأخذ بنظر الاعتبار التناقض الذي سينتج بين الهدفين لحل مشكلة إحدى شركات الأعمال، وذلك عن طريق حساب (المسافة والتكلفة) الأقل بين موقعين للعملاء، وهذا ليس بالأمر اليسير في الحياة الحقيقية؛ والسبب يرجع أساساً إلى تغير الظروف في شبكة الطرق بسرعة وبشكل منتظم، علماً إن أي شركة تبحث عن إيجاد نظام يقدم المشورة إلى الفنيين العاملين في الشركة بخصوص الطريق الذي يجب عليهم سلوكه للوصول إلى العملاء بعد انتهائهم من خدمة عملاء آخرين.

1 .2. هدف البحث:

إن الهدف الرئيسي من هذه الورقة هو إيجاد الحل الأمثل متعدد الأهداف لمشكلة الطريق الأقصر ولأي شركة أعمال بالأخذ بنظر الاعتبار تحقيق اقل (مسافة وكلفة) كلية، والذي يتيح وصول الفنيين الى العملاء بأقل تكلفة كلية وبأسرع وقت ممكن وذلك باستخدام الطريقة المعلمية الخاصة بحل مشاكل الأمثلية متعددة الأهداف التقليدية.

1 .3. أهمية البحث:

تظهر أهمية هذه الورقة في تقديم المشورة التي تبحث عنها أي شركة أعمال لإيجاد نظام يقدم إلى الفنيين العاملين فيها بشأن الطريق الذي يتوجب عليهم المرور به للوصول إلى العملاء، فقط بعد انتهائهم من خدمة عملاء آخرين. وكذلك إيجاد أقصر طريق أمثل متعدد الأهداف يحقق اقل (مسافة وكلفة) في آن واحد لأي شركة أعمال، وذلك بحساب (المسافة والكلفة) الأقل بين موقعين للعملاء.

1 .4. فرضية البحث:

يمكن القول إن الفرضية الأساسية لهذه الورقة تكمن من فرضية مفادها، إمكانية تحويل مشكلة الأمثلية متعددة الأهداف الى مشكلة أمثلية أحادية الهدف التقليدية أي بمعنى آخر، مشكلة برمجة خطية وذلك باستخدام الطريقة المعلمية، إذ يتم من خلالها تحقيق حل أمثل نهائي يرضي أي شركة أعمال. حيث سيتم في

البداية تحويل النموذج إلى مشكلة برمجة خطية، ومن ثم سيتم أخذ قيم مختلفة لمتجه المعالم (p) لغرض إيجاد مجموعة الحلول المهيمنة لهدفين مختلفين هما: المسافة/km و التكلفة/$.

2. الاستعراض المرجعي:

2 .1. الطريق الأقصر متعدد الأهداف:

قدم كل من Charnes و Cooper [5] في عام 1961، أول مقترح حول البرمجة الهدفية (Goal Programing) كأول طريقة يتم من خلالها تحديد الأهداف الواجب إنجازها، وإذا تم إنجازها يجب أن تكون نتائجها مقبولة لصانع القرار، وإذا كانت عكس ذلك يتم البحث عن حلول بديلة تكون قريبة بشكل كبير من الأهداف الواجب إنجازها لصانع القرار. وفي العام 1975 نشر العالم Zeleny [6] كتاب يتضمن 50 بحثاً بخصوص صنع القرار الأمثل بوجود معايير متعددة، والذي تضمن: (البرمجة متعددة الأهداف، البرمجة الهدفية، نظرية تحقيق الإزاحة المثلى، الحلول التقريبية لمشاكل صنع القرار عند وجود معايير متعددة، الطريقة التفاعلية للأهداف المتعددة باستخدام البرمجة الهدفية اللاخطية، التطبيقات الخاصة بمشاكل صنع القرار للمعايير المتعددة في مجال التخطيط وإدارة مصادر المياه وإدارة عملية صنع القرار العقلاني) وغيرها من المواضيع المهمة في ذات مجال البحث. كما قدم العالم Zimmerman [7] في عام 1978 أول مقترح بحث بشأن تطبيق نظرية المجموعات الغامضة على مشاكل صنع القرار المرضي عند وجود معايير متعددة، وذلك باستخدام دالة الانتماء الخطية الضبابية على مشكلة أكبر متجه؛ حيث أثبت في هذا المقترح، أن الحلول التي تم الحصول عليها باستخدام البرمجة الخطية الضبابية تكون دائماً حلول مثلى وكفؤة لمتخذ القرار. وفي عام 1982 أقترح العالم Zeleny [8] مفهوما جديدا للأمثلية ذات المعايير المتعددة وذلك عن طريق القيام بأسلوب جديد يفترض تصميم منطقة الحل الممكنة (feasible solution) للحصول على حلول مثلى جديدة تمتاز بالمرونة والعقلانية، وبشكل مغاير عن المنطق التقليدي لمنهجية الأمثلية. Carlsson و Kochetkov [9] نشرا كتاباً في عام 1983 يتعلق بصنع القرار عند وجود معايير متعددة (النظرية والتطبيق)، إذ احتوى هذا الكتاب على: (المفاهيم الأساسية للوصول إلى الأمثلية متعددة المعايير في بيئة عدم التأكد، خوارزمية البحث التفاعلي للمعايير المتعددة، مشاكل صنع القرار عند وجود مصادر كثيرة، البرمجة الخطية متعددة الأهداف، البرمجة الخطية الضبابية متعددة الأهداف، أسلوب الأنظمة الضبابية وحل المشاكل الإدارية المعقدة باستخدام البرمجة الخطية متعددة الأهداف). العالم Tzeng [10] قدم في عام 2003 بحثاً مهماً يختص بحل المشاكل المتعلقة بصنع القرار عند وجود معايير متعددة في الحياة الحقيقية بشكل علمي وكفوء، معتمداً بذلك على تطوير النظريات وطرق الحساب والتطبيقات المرتبطة بمشاكل صنع القرار عند وجود معايير متعددة مع عدم إهمال السرعة والدقة في الحل، لتكون جميع هذه الحلول مرضية بشكل واسع لكافة متخذي القرار. وفي عام 2007 قام Mustajoki [11] بنشر بحث يخص الطريقة التفاعلية لدعم القرار عند وجود معايير متعددة من خلال تطبيق الإجراءات والأدوات الجديدة للحالات العملية، إذ تضمن هذا البحث تحليلات القرار عند وجود معايير متعددة مع نظرية القيمة متعددة الصفات، فضلا عن دعم أنظمة القرار متعددة المعايير. White في العام 1990 [12] عين أكثر من 500 طريقة وتطبيق خاص بمشاكل الأمثلية متعددة الأهداف تم نشرها بين عامي (1955-1986). وفي عام 2000 [13] وضح Papadimitriou و Yannakakis كيف يمكن إنشاء ثغرة تقليدية بواسطة خوارزمية تخمينية متعددة الحدود يمكن من خلالها حساب الاتجاهات بدقة كبيرة لمشكلة اقصر طريق متعدد الأهداف ومن ثم تستطيع هذه الخوارزمية تكوين مخطط زمني تقريبي متعدد الحدود لهذه المشكلة بطريقة عقلانية تكون مرضية نسبيا لمتخذ القرار، ووضح Ireland وآخرون في عام 2004 [14] كيف يمكن لخط السكك الحديدية في المحيط الهادي أن يوفر ما يقرب من 100 مليون دولار سنوياً باستخدام

نماذج الشبكات المثلى وذلك بإيجاد أمثل طريق يحقق الأهداف المتعددة لتوجيه حمولاتها اليومية من خلال شبكة ضخمة من السكك الحديدية تضم الكثير من مسارات أمريكا الشمالية. وفي نفس السياق تمكن كل من Raith و Ehrgtt في عام 2009 [15] بعمل مقارنة فعالة للاستراتيجيات المختلفة لحل مشكلة الطريق الأقصر ثنائية الهدف للشبكات المعقدة والتي تتضمن الكثير من العقد والأوتار. واستطاع كذلك كل من Paixão و Santos في عام 2013 [16] بدراسة تقنية جديدة لوضع العلامات التقليدية لحل مشكلة اقصر طريق مع الأهداف المتعددة بوجود تكلفة متعددة لأوتار الشبكة التقليدية، بينما قدم Duque، Lozano و Medaglia [17] طريقة تكرارية فعالة تستخدم التعداد الضمني لحل مشكلة الأمثلية متعددة الأهداف لأقصر طريق باستخدام شبكة انسيابية تتألف من 1.2 مليون عقدة و 2.8 مليون وتر. Thomas وآخرون [18] قدموا مقترحاً جديداً لمخطط تقريب الوقت متعدد الحدود لمشكلة اقصر مسار متعدد الأهداف آخذين بنظر الاعتبار بأن التكاليف تكون موجبة وصحيحة للأوتار الخاصة بشبكة الأعمال.

2. 2. البرمجة الخطية متعددة الأهداف:

تعد البرمجة الخطية متعددة الأهداف واحدة من أهم نماذج الأمثلية الرياضية وهي امتداد للبرمجة التقليدية أحادية الهدف، حيث يتم الأخذ بنظر الاعتبار أكثر من هدف يسعى صانع القرار لتحقيقه. وغالباً ما تكون هذه الأهداف متضاربة فيما بينها وهي إحدى أهم الصعوبات التي تواجه الباحثين في نماذج الأمثلية متعددة الأهداف، حيث لم يعد حالياً مفهوم الحل الأمثل منطقياً أي بشكل عام، لا يوجد حل ممكن يستطيع تحقيق الأمثلية لجميع دوال الهدف في الوقت نفسه. يمكن الآن تمثيل نموذج البرمجة الخطية متعددة الأهداف بالشكل الآتي:

$$Min\ \mathcal{Z}(x) = (\mathcal{C}x)^T = (z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x))^T,$$
$$s.to:$$
$$x \in \mathcal{F} = \{\mathcal{A}x \geq b, x \geq 0\}.$$

حيث إن كل من يمثل:

$n \geq 2$؛ عدد دوال الهدف والتي تكون متعددة أي أكبر من واحد، أي بمعنى ليست برمجة خطية،

$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_r)$؛ متجه متغيرات القرار الخاص بالنموذج المتعدد،

$x \in \mathcal{F}$؛ فضاء الحل المقبول للنموذج المتعدد (feasible solution)؛

$\mathcal{Z}(x)$؛ متجه دوال الهدف وتعد المجموعة $\{\mathcal{O} = \mathcal{Z}(x)\}$ منسجمة مع الحلول الممكنة في فضاء الأهداف، والمتجه $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3, \dots, \mathcal{Y}_n)$، حيث إن الحل هو $\{\mathcal{Y}_i = z_i(x)\}$.

إن الحل الناتج من نموذج البرمجة الخطية متعددة الأهداف، يكون عبارة عن مجموعة حلول باريتو أو يطلق عليها أيضاً مجموعة الحلول الكفوءة [19].

2. 3. مشكلة البرمجة الخطية للطريق الأقصر:

من المشاكل المهمة تطبيقياً في تدفق الشبكات هي تلك المتعلقة بتعيين أقصر طريق بين عقدة البداية وعقدة النهاية، فإذا كان لدينا شبكة مكونة من n من العقد $1,2,3, \dots, n$، ويقابل كل وتر (i,j) عدد موجب d_{ij} ، يسمى المسافة، أو زمن العبور من العقدة i إلى العقدة j . وإن تعذر وجود طريق مباشر يصل بين العقدة i والعقدة j ، فإن المسافة تكون: $d_{ij} = +\infty$. ومن الممكن أن تختلف المسافة d_{ij} عن المسافة d_{ji} أي إن: $d_{ij} \neq d_{ji}$. إذ تكمن المشكلة في كيفية إيجاد طول الطريق الأقصر، انطلاقاً من عقدة البداية 1، إلى عقدة النهاية n. ومن الممكن كإحدى طرق حل هذه المشكلة، أن نفسرها على أنها مشكلة نقل تصف نقل

Print ISSN 2710-0952 Electronic ISSN2790-1254

كمية واحدة للتدفق من العقدة 1 إلى العقدة n ، بحيث تكون مسافة النقل من i إلى j هي d_{ij} . لذا، يمكن صياغة مشكلة المسار الأقصر كبرمجة خطية وكما هو مبين في الفقرة أدناه.

2.4. النموذج العام لمشكلة المسار الأقصر أحادية الهدف:

لا تزال مشكلة المسار الأقصر تمثل نوعاً خاصاً وهاماً من مشكلات البرمجة الخطية والتي تعد أيضاً حالة خاصة لمشكلة تدفق الشبكة ذات التكلفة الدنيا، والتي تهدف للعثور على الطريق الأمثل عبر شبكة الأعمال انطلاقاً من عقدة البداية وصولاً إلى عقدة النهاية، مع التركيز على تخفيض إجمالي المسافة المقطوعة.
بشكل عام، يمكن صياغة مشكلة إيجاد أقصر طريق ممكن كنموذج برمجة خطية كما مبين بالآتي [20]:

$$\underset{x}{Min}\, z(x) = \sum_{(i,j)\in E} d_{ij} x_{ij},$$
$$s.to:$$
$$i = \mathcal{S} \quad iff \quad \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = 1,$$
$$\forall i \neq \mathcal{S},\mathcal{T} \in \mathcal{V}: \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = 0,$$
$$i = \mathcal{T} \quad iff \quad \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = -1,$$
$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \forall (i,j) \in E.$$

حيث إن:

المتغيرات x_{ij} ؛ تمثل متغيرات القرار للنموذج العام أعلاه،

المتغيرات d_{ij} ؛ تمثل مسافة (أو تكلفة) الارتباط (i,j)،

$\sum_{(i,j)\in E} d_{ij} x_{ij}$؛ تمثل معادلة دالة الهدف التي تخفض مسافة (أو تكلفة) الطريق من العقدة $\mathcal{S}$ إلى العقدة $\mathcal{T}$ ،

x_{ij}؛ عبارة عن الكمية المتدفقة من العقدة $\mathcal{S}$ إلى العقدة $\mathcal{T}$ بواسطة (i,j)،

تمثل المعادلات من $\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = 1$ إلى $0 \leq x_{ij} \leq 1$ قيود النموذج،

تمثل المعادلات من $\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = 1$ إلى $\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = 0$ شروط الحفاظ على التدفق،

تمثل المعادلة $\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = 1$ شرط المحافظة على التدفقات في عقدة المصدر، العقدة $\mathcal{S}$، أي إن الفرق بين كمية المرور الواردة وكمية المرور الصادرة، $\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji}$، يساوي 1 وكمية المرور الصادرة عند العقدة $\mathcal{S}$ يساوي 1،

تمثل المعادلة $\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = 0$ مقدار المحافظة على التدفقات عند العقدة الوسطية i و $i \neq \mathcal{S},\mathcal{T}$.

المعادلة $\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij}$ تمثل كمية التدفق الصادرة عند العقدة i والتي تساوي كمية التدفق الواردة عند العقدة i ، $\sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji}$ عند عقدة النهاية، أي إن العقدة $\mathcal{T}$ تمثل المعادلة $\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = -1$ وهي شرط المحافظة على التدفقات، لذا فإن المعادلة آنفة الذكر يجب أن تتحقق، وعلى الرغم من ذلك فإن المعادلة يتم خصمها باستخدام المعادلات من $\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = 1$ إلى $\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = 0$ لذلك، فإن المعادلة $\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = -1$ مضمونة من خلال المعادلات $\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = 1$ و $\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = 0$،

$0 \le x_{ij} \le 1$ ؛ تمثل المدى الكلي لمتغيرات القرار x_{ij} .

2 .5 مشكلة المسار الأقصر متعددة الأهداف:

تعد مشكلة أقصر طريق متعدد الأهداف واحدة من المشاكل المهمة والشائعة حيث تتمثل المشكلة في كيفية إيجاد أقصر طريق لأي شبكة أعمال بالاعتماد على مجموعة معينة من الأهداف، مثل (الكلفة، المسافة، الوقت، الخ). سيتم في هذه الورقة دراسة مشكلة مقترحة من قبل الباحثين، والتي تبحث في كيفية اختيار أقصر طريق ممكن وبأقل كلفة متاحة لكي ينتقل الفنيون من عميل إلى آخر. إن عملية حساب أقصر أو أسرع الطرق بين موقعين للعملاء ليس بالأمر السهل في الواقع، ويرجع ذلك أساسا إلى تغير الظروف في شبكة الطرق بسرعة وبشكل منتظم. لذا نستطيع القول بأن الهدف الرئيسي لقسم الخدمات هو إيجاد حل أمثل متعدد الأهداف لمشكلة أقصر طريق، مع مراعاة تحقيق أقصى تدنية للأهداف الرئيسية المتعددة والمتمثلة بالمسافة والتكلفة سويةً.

2 .6 نموذج البرمجة الخطية المقترح لحل مشكلة أقصر طريق متعدد الأهداف:

سيتم في هذه الفقرة صياغة نموذج رياضي مقترح لحل مشكلة أقصر طريق متعدد الأهداف بالاعتماد على النموذج الأصلي لمشكلة البرمجة الخطية لأقصر طريق والمبين في الفقرة (2 .4) أعلاه:

$$\underset{(x_1,x_2)}{Min}\ Z(x) = \{z_1(x), z_2(x)\} = \{z_1(x) = \sum_{\forall arcs} d_{ij}x_{ij}\, , z_2(x) = \sum_{\forall arcs} c_{ij}x_{ij}\},$$

$s.t\,o:$

$$\sum_{arcsout} x_{ij} - \sum_{arcsin} x_{ji} = 1, \quad \text{Start node } (i),$$

$$\sum_{arcsout} x_{ij} - \sum_{arcsin} x_{ji} = 0, \quad \text{Transshipment nodes},$$

$$\sum_{arcsin} x_{ij} - \sum_{arcsout} x_{ji} = -1, \quad \text{End node } (j),$$

$$x_{ij} \le 1, x_{ij} \ge 0\ for\ all\ i\ and\ j.$$

حيث إن الموضح في أدناه يمثل الآتي:

$z_1(x)$ ؛ دالة الهدف الأولى الخاصة بتحقيق اقصى تدنية للمسافة بين العقد الكلية على شبكة الأعمال،

$z_2(x)$ ؛ دالة الهدف الثانية المتعلقة بتخفيض التكلفة الكلية للشبكة.

يمكن القول إن الحل الأمثل للنموذج أعلاه والمقبول لصانع القرار، هو الحل الذي يخفض جميع دوال الهدف في آن واحد، لكن تنشأ مشكلة التناقض بين دوال الهدف $z_1(x)$ و $z_2(x)$ على التوالي والذي يجعل الحصول على مثل هذا الحل غير ممكن في كثير من الأحيان، إذ أنه في الوقت الذي تكون فيه إحدى دوال الهدف مخفضة $Min\ z$ تكون دالة الهدف الأخرى معظمة $Max\ z$ ، وعليه لإيجاد حل متوازن ومقبول لصانع القرار سيتم استخدام واحدة من أهم الأساليب الشائعة والمستخدمة في حل مشاكل الأمثلية متعددة الأهداف، ألا وهي الطريقة المعلمية النسبية (Relative Parametric Method (RPM)) وكما هو مبين بشكل تفصيلي تباعاً.

2 .7 الطريقة المعلمية النسبية Relative Parametric Method (RPM):

باستخدام الطريقة المعلمية سيتم تحويل مشكلة الأمثلية متعددة الأهداف الى مشكلة برمجة خطية وذلك بتحويل المشكلة المذكورة في الفقرة رقم (2 .2) إلى المشكلة أحادية الهدف المبينة بالشكل التالي:

$$\underset{x\in\mathcal{F}}{Min}\ \mathcal{R}.Z(x) = r.Cx = \sum_{i=1}^{n} r_i\, .\, z_i(x),$$

s.to:

$$x \in \mathcal{F} = \{x | Ax \ge b, x \ge 0\}.$$

حيث يطلق على المعاملات $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \geq 0$ ، بالمتجه المعلمي النسبي والذي سيتم تعيينه لدوال الهدف Cx للحصول على مجموعة حلول باريتو، وذلك بعد تغيير المعاملات المعلمية النسبية r [21]. سيتم توضيح كيفية تطبيق هذه الطريقة في الجانب التطبيقي المبين في الفقرة رقم (3) لاحقاً.

3. الجانب التطبيقي:

سيطبق في هذا الجانب كيفية إيجاد أقصر طريق أمثل متعدد الأهداف يتم من خلاله تحقيق اقل (مسافة وتكلفة) ممكنة في آن واحد لأي شركة أعمال أو خدمة في الحياة الحقيقية، وذلك عن طريق احتساب الطريق الأقصر والتكلفة الأقل بين أي موقعين للعملاء، علماً إن الشركة تبحث عن إيجاد نظام يقدم المشورة إلى الفنيين العاملين في الشركة بخصوص الطريق الذي يجب عليهم سلوكه إلى العملاء بعد انتهائهم نهائياً من خدمة عملاء آخرين. وسيفعل الباحثين في هذه الورقة الطريقة المعلمية النسبية لإيجاد الطريق الأمثل النهائي المرضي لصانع القرار. إذ تم افتراض المعلومات (أو البيانات) المتعلقة بالمسافة والتكلفة من قبل الباحثين في الجدول رقم **(1)** والجدول رقم **(2)** على التوالي، وكما موضح تفصيلياً في أدناه.

الجدول رقم 1. المسافة بالكيلومتر (d_{ij}) ، بين عقد شبكة الأعمال المختلفة (المصدر من إعداد الباحثين)

(Start-End) node	المسافة	(Start-End) node	المسافة	(Start-End) node	المسافة
1 – 1	0	16 – 17	1.7	32 – 33	2.3
1 – 2	5.3	16 – 19	3.3	32 – 40	1.4
1 – 3	4.4	16 – 20	1.9	33 – 35	2.6
1 – 4	2.1	17 – 20	4.7	34 – 39	3.1
2 – 4	4.6	17 – 22	1.6	34 – 40	3.4
2 – 6	2.7	18 – 19	3.2	34 – 44	5.1
3 – 7	3.5	18 – 25	3.5	35 – 40	1.9
3 – 8	1.9	19 – 20	1.7	35 – 41	2.8
4 – 5	5.2	19 – 25	4	36 – 37	1.4
4 – 8	3.1	19 – 26	1.1	36 – 42	3.7
4 – 11	1.3	20 – 21	3.1	37 – 38	2.4
5 – 6	1.8	21 – 22	3.9	37 – 42	1.8
6 – 12	0.6	21 – 27	1.5	37 – 43	3.9
6 – 13	2.8	22 – 23	2.7	38 – 39	4
7 – 8	5.3	22 – 27	4.8	38 – 43	4.7
7 – 9	1.4	23 – 24	3.1	39 – 43	5.9
8 – 10	2.5	23 – 28	5.9	40 – 41	4.5
9 – 10	2.3	24 – 29	1.3	40 – 44	2.1
9 – 15	3	25 – 26	4.2	40 – 46	6.5
10 – 11	1.9	25 – 30	1.8	41 – 46	1.5
10 – 15	5.2	25 – 37	2.4	42 – 47	2.8
10 – 16	2.5	26 – 27	2.9	43 – 44	5.3

10 – 17	1.5	26 – 38	1.7	43 – 47	2.7
11 – 12	5	27 – 28	3.9	44 – 45	4.4
12 – 14	4.5	27 – 31	5	45 – 46	3.6
12 – 17	2.1	27 – 39	4.4	45 – 48	1.4
12 – 22	4.2	28 – 29	2.6	45 – 49	5.5
13 – 14	1	28 – 31	0.9	46 – 49	1.6
14 – 23	2.6	28 – 32	1	47 – 48	2.2
14 – 24	2	29 – 33	1.7	48 – 50	1.9
15 – 16	0.8	30 – 36	4.3	49 – 50	3.8
15 – 18	2.6	31 – 34	2	50 – 50	0

الجدول رقم 2. التكلفة الكلية بالدولار (c_{ij}) بين عقد شبكة الأعمال المختلفة (المصدر من إعداد الباحثين)

(Start-End) node	الكلفة	(Start-End) node	الكلفة	(Start-End) node	الكلفة
1 – 1	0$	16 – 17	4.9	32 – 33	12
1 – 2	4.2	16 – 19	1.6	32 – 40	7.7
1 – 3	3.3	16 – 20	4.2	33 – 35	9.1
1 – 4	5.1	17 – 20	6.5	34 – 39	3.8
2 – 4	3.8	17 – 22	5.7	34 – 40	4.1
2 – 6	4.3	18 – 19	1.8	34 – 44	2.9
3 – 7	3.9	18 – 25	9.5	35 – 40	5.9
3 – 8	6.5	19 – 20	2.8	35 – 41	11
4 – 5	1.9	19 – 25	4.3	36 – 37	3.7
4 – 8	7.2	19 – 26	1.9	36 – 42	10
4 – 11	4.9	20 – 21	5.8	37 – 38	12
5 – 6	9.9	21 – 22	3.8	37 – 42	4.7
6 – 12	8.7	21 – 27	7.9	37 – 43	8.1
6 – 13	10	22 – 23	10	38 – 39	5.6
7 – 8	2.8	22 – 27	9.0	38 – 43	13
7 – 9	9.3	23 – 24	8.0	39 – 43	15
8 – 10	4.6	23 – 28	5.4	40 – 41	9.3
9 – 10	7.6	24 – 29	3.1	40 – 44	4.8
9 – 15	6.1	25 – 26	9.1	40 – 46	1.8
10 – 11	1.5	25 – 30	1.5	41 – 46	12
10 – 15	8.9	25 – 37	6.1	42 – 47	1.7
10 – 16	4.6	26 – 27	7.8	43 – 44	6.5
10 – 17	3.4	26 – 38	4.8	43 – 47	3.9

العدد 19A1 كانون الاول 2025 المجلة العراقية للبحوث الانسانية والاجتماعية والعلمية
No.19A1 Dec 2025 Iraqi Journal of Humanitarian, Social and Scientific Research
Print ISSN 2710-0952 Electronic ISSN2790-1254

11 – 12	1.6	27 – 28	5.4	44 – 45	11
12 – 14	7.3	27 – 31	6.8	45 – 46	6.4
12 – 17	2.7	27 – 39	8.8	45 – 48	4.9
12 – 22	2.8	28 – 29	9.6	45 – 49	3.2
13 – 14	5.1	28 – 31	11	46 – 49	2.7
14 – 23	6.9	28 – 32	7.0	47 – 48	10
14 – 24	9.7	29 – 33	4.8	48 – 50	14
15 – 16	3.4	30 – 36	7.9	49 – 50	1.6
15 – 18	2.9	31 – 34	2.8	50 – 50	0$

3. 1. نموذج البرمجة الخطية متعدد الأهداف لحل مشكلة الطريق الأقصر:

سيتم الآن بناء نموذج البرمجة الخطية متعدد الأهداف لحل مشكلة أقصر طريق باستخدام النموذج المقترح من قبل الباحثين والمبين في الفقرة (6.2)، وكذلك باستخدام الجدول **رقم (1)** المتعلق بالمسافة والجدول **رقم (2)** الخاص بالتكلفة وكما هو موضح بالآتي:

$$\underset{x\in\mathcal{F}}{Min}\ z_1(x) = 5.3x_{12} + 4.4x_{13} + 2.1x_{14} + 4.6x_{24} + 2.7x_{26} + 3.5x_{37} + 1.9x_{38} + 5.2x_{45} + 3.1x_{48} + 1.3x_{411} + 1.8x_{56} + 0.6x_{612} + 2.8x_{613} + 5.3x_{78} + 1.4x_{79} + 2.5x_{810} + 2.3x_{910} + 3x_{915} + 1.9x_{1011} + 5.2x_{1015} + 2.5x_{1016} + 1.5x_{1017} + 5x_{1112} + 4.5x_{1214} + 2.1x_{1217} + 4.2x_{1222} + x_{1314} + 2.6x_{1423} + 2x_{1424} + 0.8x_{1516} + 2.6x_{1518} + 1.7x_{1617} + 3.3x_{1619} + 1.9x_{1620} + 4.7x_{1720} + 1.6x_{1722} + 3.2x_{1819} + 3.5x_{1825} + 1.7x_{1920} + 4x_{1925} + 1.1x_{1926} + 3.1x_{2021} + 3.9x_{2122} + 1.5x_{2127} + 2.7x_{2223} + 4.8x_{2227} + 3.1x_{2324} + 5.9x_{2328} + 1.3x_{2429} + 4.2x_{2526} + 1.8x_{2530} + 2.4x_{2537} + 2.9x_{2627} + 1.7x_{2638} + 3.9x_{2728} + 5x_{2731} + 4.4x_{2739} + 2.6x_{2829} + 0.9x_{2831} + x_{2832} + 1.7x_{2933} + 4.3x_{3036} + 2x_{3134} + 2.3x_{3233} + 1.4x_{3240} + 2.6x_{3335} + 3.1x_{3439} + 3.4x_{3440} + 5.1x_{3444} + 1.9x_{3540} + 2.8x_{3541} + 1.4x_{3637} + 3.7x_{3642} + 2.4x_{3738} + 1.8x_{3742} + 3.9x_{3743} + 4x_{3839} + 4.7x_{3843} + 5.9x_{3943} + 4.5x_{4041} + 2.1\,x_{4044} + 6.5x_{4046} + 1.5x_{4146} + 2.8x_{4247} + 5.3x_{4344} + 2.7x_{4347} + 4.4x_{4445} + 3.6x_{4546} + 1.4x_{4548} + 5.5x_{4549} + 1.6x_{4649} + 2.2x_{4748} + 1.9x_{4850} + 3.8x_{4950}$$

;

And:

$$\underset{x\in\mathcal{F}}{Min}\ z_2(x) = 4.2x_{12} + 3.3x_{13} + 5.1x_{14} + 3.8x_{24} + 4.3x_{26} + 3.9x_{37} + 6.5x_{38} + 1.9x_{45} + 7.2x_{48} + 4.9x_{411} + 9.9x_{56} + 8.7x_{612} + 10x_{613} + 2.8x_{78} + 9.3x_{79} + 4.6x_{810} + 7.6x_{910} + 6.1x_{915} + 1.5x_{1011} + 8.9x_{1015} + 4.6x_{1016} + 3.4x_{1017} + 1.6x_{1112} + 7.3x_{1214} + 2.7x_{1217} + 2.8x_{1222} + 5.1x_{1314} + 6.9x_{1423} + 9.7x_{1424} + 3.4x_{1516} + 2.9x_{1518} + 4.9x_{1617} + 1.6x_{1619} + 4.2x_{1620} + 6.5x_{1720} + 5.7x_{1722} + 1.8x_{1819} + 9.5x_{1825} + 2.8x_{1920} + 4.3x_{1925} + 1.9x_{1926} + 5.8x_{2021} + 3.8x_{2122} + 7.9x_{2127} + 10x_{2223} + 9.0x_{2227} + 8x_{2324} + 5.4x_{2328} + 3.1x_{2429} + 9.1x_{2526} + 1.5x_{2530} + 6.1x_{2537} + 7.8x_{2627} + 4.8x_{2638} + 5.4x_{2728} + 6.8x_{2731} + 8.8x_{2739} + 9.6x_{2829} + 11x_{2831} + 7\,x_{2832} + 4.8x_{2933} + 7.9x_{3036} + 2.8x_{3134} + 12x_{3233} + 7.7x_{3240} + 9.1x_{3335} + 3.8x_{3439} + 4.1x_{3440} + 2.9x_{3444} + 5.9x_{3540} + 11x_{3541} + 3.7x_{3637} + 10x_{3642} + 12x_{3738} + 4.7x_{3742} + 8.1x_{3743} + 5.6x_{3839} + 13x_{3843} + 15x_{3943} + 9.3x_{4041} + 4.8\,x_{4044} + 1.8x_{4046} + 12x_{4146} + 1.7x_{4247} + 6.5x_{4344} + 3.9x_{4347} + 11x_{4445} + 6.4x_{4546} + 4.9x_{4548} + 3.2x_{4549} + 2.7x_{4649} + 10x_{4748} + 14x_{4850} + 1.6x_{4950}$$

;

s.to:

$(node - 1)$: $x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1,$

$(node-2):\ x_{24}+x_{26}-x_{12}=0,$

$(node-3):\ x_{37}+x_{38}-x_{13}=0,$

$(node-4):\ x_{45}+x_{48}+x_{411}-x_{14}-x_{24}=0,$

$(node-5):\ x_{56}-x_{45}=0,$

$(node-6):\ x_{612}+x_{613}-x_{26}=0,$

$(node-7):\ x_{78}+x_{79}-x_{37}=0,$

$(node-8):\ x_{810}-x_{38}-x_{48}-x_{78}=0,$

$(node-9):\ x_{910}+x_{915}-x_{79}=0,$

$(node-10):\ x_{1011}+x_{1015}+x_{1016}+x_{1017}-x_{810}-x_{910}=0,$

$(node-11):\ x_{1112}-x_{411}-x_{1011}=0,$

$(node-12):\ x_{1214}+x_{1217}+x_{1222}-x_{1112}-x_{612}=0,$

$(node-13):\ x_{1314}-x_{613}=0,$

$(node-14):\ x_{1423}+x_{1424}-x_{1214}-x_{1314}=0,$

$(node-15):\ x_{1516}+x_{1518}-x_{915}-x_{1015}=0,$

$(node-16):\ x_{1617}+x_{1619}+x_{1620}-x_{1016}-x_{1516}=0,$

$(node-17):\ x_{1720}+x_{1722}-x_{1017}-x_{1217}-x_{1617}=0,$

$(node-18):\ x_{1819}+x_{1825}-x_{1518}=0,$

$(node-19):\ x_{1920}+x_{1925}+x_{1926}-x_{1619}-x_{1819}=0,$

$(node-20):\ x_{2021}-x_{1620}-x_{1720}-x_{1920}=0,$

$(node-21):\ x_{2122}+x_{2127}-x_{2021}=0,$

$(node-22):\ x_{2223}+x_{2227}-x_{1222}-x_{1722}-x_{2122}=0,$

$(node-23):\ x_{2324}+x_{2328}-x_{1423}-x_{2223}=0,$

$(node-24):\ x_{2429}-x_{1424}-x_{2324}=0,$

$(node-25):\ x_{2526}+x_{2537}+x_{2530}-x_{1825}-x_{1925}=0,$

$(node-26):\ x_{2627}+x_{2638}-x_{1926}-x_{2526}=0,$

$(node-27):\ x_{2728}+x_{2731}+x_{2739}-x_{2127}-x_{2227}-x_{2627}=0,$

$(node-28):\ x_{2829}+x_{2832}+x_{2831}-x_{2328}-x_{2728}=0,$

$(node-29):\ x_{2933}-x_{2429}-x_{2829}=0,$

$(node-30):\ x_{3036}-x_{2530}=0,$

$(node-31):\ x_{3134}-x_{2731}-x_{2831}=0,$

$(node-32):\ x_{3233}+x_{3240}-x_{2832}=0,$

$(node-33):\ x_{3335}-x_{3233}-x_{2933}=0,$

$(node-34):\ x_{3439}+x_{3440}+x_{3444}-x_{3134}=0,$

$(node-35):\ x_{3540}+x_{3541}-x_{3335}=0,$

$(node-36):\ x_{3637}+x_{3642}-x_{3036}=0,$

$(node-37):\ x_{3738}+x_{3742}+x_{3743}-x_{2537}-x_{3637}=0,$

$(node-38):\ x_{3839}+x_{3843}-x_{2638}-x_{3738}=0,$

$(node-39)$: $x_{3943}-x_{2739}-x_{3439}-x_{3839}=0,$
$(node-40)$: $x_{4041}+x_{4044}+x_{4046}-x_{3240}-x_{3440}-x_{3540}=0,$
$(node-41)$: $x_{4146}-x_{3541}-x_{4041}=0,$
$(node-42)$: $x_{4247}-x_{3642}-x_{3742}=0,$
$(node-43)$: $x_{4344}+x_{4347}-x_{3743}-x_{3843}-x_{3943}=0,$
$(node-44)$: $x_{4445}-x_{3444}-x_{4044}-x_{4344}=0,$
$(node-45)$: $x_{4546}+x_{4548}+x_{4549}-x_{4445}=0,$
$(node-46)$: $x_{4649}-x_{4046}-x_{4146}-x_{4546}=0,$
$(node-47)$: $x_{4748}-x_{4247}-x_{4347}=0,$
$(node-48)$: $x_{4850}-x_{4548}-x_{4748}=0,$
$(node-49)$: $x_{4950}-x_{4549}+x_{4649}=0,$
$(node-50)$: $x_{4850}+x_{4950}=1,$
$0\le x_{ij}\le 1,\ \forall i\in(1,2,\dots,49)\ and\ \forall j\in(2,3,\dots,50).$

حيث إن:
$z_1(x)$ و $z_2(x)$ تمثل دالة المسافة والتكلفة على التوالي،
والمعادلات من $(node-1)$ إلى $(node-50)$ تمثل قيود المشكلة الرئيسية.

3. 2. حل نموذج البرمجة الخطية متعددة الأهداف لمشكلة المسار الأقصر:

في البداية سيتم في هذه الفقرة حل النموذج أعلاه باستخدام البرنامج $(LINGO)$ الخاص بتطبيقات بحوث العمليات [22]، حيث سنقوم بالخطوات الآتية:

1- حل دالة الهدف الأولى الخاصة بالمسافة مع قيود المشكلة الرئيسية $(x\in\mathcal{F})$ كنموذج برمجة خطية اعتيادية للحصول على قيمة $z_1(x)$،
2- كذلك يتم حل دالة الهدف الثانية المتعلقة بالتكلفة الكلية مع قيود المشكلة الرئيسية $(x\in\mathcal{F})$ كنموذج برمجة خطية تقليدية للحصول على ناتج الدالة $z_2(x)$،
3- تعويض متغيرات القرار الناتجة من حل نموذج المسافة في دالة الهدف الخاصة بالتكلفة ومن ثم تعويض متغيرات القرار الناتجة من حل نموذج التكلفة في دالة الهدف المتعلقة بالمسافة، وذلك لإيجاد مجموعة حلول باريتو وكما مبين في الجداول (2 و 3 و 4) تباعاً.

الجدول رقم 2. أقصر طريق أمثل بالنسبة لدالة الهدف الخاصة بالمسافة (Z_1)

From node (i) to node (j)	المسافة / كيلومتر	التكلفة / دولار
1 - 4	2.1	5.1
4 - 8	3.1	7.2
8 - 10	2.5	4.6
10 - 16	2.5	4.6
16 - 19	3.3	1.6
19 - 26	1.1	1.9
26 - 38	1.7	4.8
38 - 43	4.7	13

العدد 19A1 كانون الاول 2025
المجلة العراقية للبحوث الانسانية والاجتماعية والعلمية
No.19A1 Dec 2025 Iraqi Journal of Humanitarian, Social and Scientific Research
Print ISSN 2710-0952 Electronic ISSN2790-1254

43 - 47	2.7	3.9
47 - 48	2.2	10
48 - 50	1.9	14
المجموع	$Z_1(x)$=27.8	$Z_2(x)$=70.7

الجدول رقم 3. أقصر طريق أمثل بالنسبة لدالة الهدف الخاصة بالتكلفة (Z_2)

From node (i) to node (j)	المسافة / كيلومتر	التكلفة / دولار
1 - 4	2.1	5.1
4 - 8	1.3	4.9
8 - 10	5.0	1.6
10 - 16	4.2	2.8
16 - 19	4.8	9.0
19 - 26	5.0	6.8
26 - 38	2.0	2.8
38 - 43	5.1	2.9
43 - 47	4.4	11
47 - 48	5.5	3.2
48 - 50	3.8	1.6
المجموع	$Z_1(x)$=43.2	$Z_2(x)$=51.7

نستخلص من الجدولين (2) و (3) مجموعة حلول باريتو المبينة بالجدول رقم (4) بشكل تفصيلي.

الجدول رقم 4. مجموعة حلول باريتو لدالة المسافة للهدف $z_1(x)$ ولدالة التكلفة $z_2(x)$

متغيرات القرار المثلى لدالتي الهدف (المسافة و التكلفة)											الدالة الأولى	الدالة الثانية
$x_{1\text{-}4}$	$x_{4\text{-}8}$	$x_{8\text{-}10}$	$x_{10\text{-}16}$	$x_{16\text{-}19}$	$x_{19\text{-}26}$	$x_{26\text{-}38}$	$x_{38\text{-}43}$	$x_{43\text{-}47}$	$x_{47\text{-}48}$	$x_{48\text{-}50}$	$z_1(x)$	$z_2(x)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	27.8	70.7
$x_{1\text{-}4}$	$x_{4\text{-}11}$	$x_{11\text{-}12}$	$x_{12\text{-}22}$	$x_{22\text{-}27}$	$x_{27\text{-}31}$	$x_{31\text{-}34}$	$x_{34\text{-}44}$	$x_{44\text{-}45}$	$x_{45\text{-}49}$	$x_{49\text{-}50}$	43.2	51.7
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		

يمكن ملاحظة التناقض من الجدول رقم (4) بين دالتي الهدف $z_1(x)$ و $z_2(x)$ ، حيث إن دالة الهدف الأولى تمثل المسافة ودالة الهدف الثانية تمثل التكلفة، فعندما يتم تقليل المسافة الكلية يتم في الوقت ذاته زيادة التكلفة الكلية وإذا تم تقليل التكلفة الكلية يتم في الوقت نفسه زيادة المسافة الكلية، أي بمعنى آخر لا نحصل على حل امثل نهائي يرضي أي شركة خدمات لدالتي الهدف $z_1(x)$ و $z_2(x)$ ، حيث إن الشركة تبحث عن حل أمثل يحقق تقليل المسافة والتكلفة الكلية في آن واحد، وللحصول على مثل هذا الحل سيتم استخدام الطريقة المعلمية النسبية المذكورة سابقاً. لحل النموذج المقترح في الفقرة رقم (3. 1) باستخدام الطريقة المعلمية النسبية للحصول على حل أمثل نهائي يرضي أي شركة خدمات، سيتم أولاً تحويل

النموذج إلى مشكلة برمجة خطية تقليدية، وبعد ذلك سيتم أخذ قيم مختلفة لمتجه المعالم النسبية $(\mathcal{R})$ لغرض إيجاد مجموعة حلول باريتو أو مجموعة الحلول الكفوءة. فعندما تكون النسبة المعلمية لدالة الهدف الأولى (المسافة) $\left\{r_1=\frac{1}{2}\right\}$، والنسبة المعلمية لدالة الهدف الثانية (التكلفة) $\left\{r_2=\frac{1}{2}\right\}$؛ فإن نموذج النسبة المعلمية المقترح لحل مشكلة الطريق الأقصر متعدد الأهداف يمكن صياغته بالشكل النهائي الآتي، حيث يمثل هذا الحل حلاً أوفقاً لدالتي الهدف ويمكن مرضي لصانع القرار:

$$\underset{x\in\mathcal{F}}{Min}\ \mathcal{R}.\mathcal{Z}(x)=\sum_{i=1}^{n}r_i\times z_i(x)=\frac{1}{2}\times z_1(x)+\frac{1}{2}\times z_2(x);$$

$$=4.75x_{12}+3.85x_{13}+3.6x_{14}+4.2x_{24}+3.5x_{26}+3.7x_{37}+4.2x_{38}+3.55x_{45}+5.15x_{48}+3.1x_{411}+5.85x_{56}+4.65x_{612}+6.4x_{613}+4.05x_{78}+5.35x_{79}+3.55x_{810}+4.95x_{910}+4.55x_{915}+1.7x_{1011}+7.05x_{1015}+3.55x_{1016}+2.45x_{1017}+3.3x_{1112}+5.9x_{1214}+2.4x_{1217}+3.5x_{1222}+3.05x_{1314}+4.75x_{1423}+5.85x_{1424}+2.1x_{1516}+2.75x_{1518}+3.3x_{1617}+2.45x_{1619}+3.05x_{1620}+5.6x_{1720}+3.65x_{1722}+2.5x_{1819}+6.5x_{1825}+2.25x_{1920}+4.15x_{1925}+1.5x_{1926}+4.45x_{2021}+3.85x_{2122}+4.7x_{2127}+6.35x_{2223}+6.9x_{2227}+5.55x_{2324}+5.65x_{2328}+2.2x_{2429}+6.65x_{2526}+1.65x_{2530}+4.25x_{2537}+5.35x_{2627}+3.25x_{2638}+4.65x_{2728}+5.9x_{2731}+6.6x_{2739}+6.1x_{2829}+5.95x_{2831}+4x_{2832}+3.25x_{2933}+6.1x_{3036}+2.4x_{3134}+7.15x_{3233}+4.55x_{3240}+5.85x_{3335}+3.45x_{3439}+3.75x_{3440}+4x_{3444}+3.9x_{3540}+6.9x_{3541}+2.55x_{3637}+6.85x_{3642}+7.2x_{3738}+3.25x_{3742}+6x_{3743}+4.8x_{3839}+8.85x_{3843}+10.45x_{3943}+6.9x_{4041}+3.45x_{4044}+4.15x_{4046}+6.75x_{4146}+2.25x_{4247}+5.9x_{4344}+3.3x_{4347}+7.7x_{4445}+5x_{4546}+3.15x_{4548}+4.35x_{4549}+2.15x_{4649}+6.1x_{4748}+7.95x_{4850}+2.7x_{4950}$$
;

s.to:

$(node-1):\ x_{12}+x_{13}+x_{14}=1,$

$(node-2):\ x_{24}+x_{26}-x_{12}=0,$

$(node-3):\ x_{37}+x_{38}-x_{13}=0,$

$(node-4):\ x_{45}+x_{48}+x_{411}-x_{14}-x_{24}=0,$

$(node-5):\ x_{56}-x_{45}=0,$

$(node-6):\ x_{612}+x_{613}-x_{26}=0,$

$(node-7):\ x_{78}+x_{79}-x_{37}=0,$

$(node-8):\ x_{810}-x_{38}-x_{48}-x_{78}=0,$

$(node-9):\ x_{910}+x_{915}-x_{79}=0,$

$(node-10):\ x_{1011}+x_{1015}+x_{1016}+x_{1017}-x_{810}-x_{910}=0,$

$(node-11):\ x_{1112}-x_{411}-x_{1011}=0,$

$(node-12):\ x_{1214}+x_{1217}+x_{1222}-x_{1112}-x_{612}=0,$

$(node-13):\ x_{1314}-x_{613}=0,$

$(node-14):\ x_{1423}+x_{1424}-x_{1214}-x_{1314}=0,$

$(node-15):\ x_{1516}+x_{1518}-x_{915}-x_{1015}=0,$

$(node-16):\ x_{1617}+x_{1619}+x_{1620}-x_{1016}-x_{1516}=0,$

$(node-17):\ x_{1720}+x_{1722}-x_{1017}-x_{1217}-x_{1617}=0,$

$(node-18):\ x_{1819}+x_{1825}-x_{1518}=0,$

$(node-19):\ x_{1920}+x_{1925}+x_{1926}-x_{1619}-x_{1819}=0,$

$(node-20):\ x_{2021} - x_{1620} - x_{1720} - x_{1920} = 0,$
$(node-21):\ x_{2122} + x_{2127} - x_{2021} = 0,$
$(node-22):\ x_{2223} + x_{2227} - x_{1222} - x_{1722} - x_{2122} = 0,$
$(node-23):\ x_{2324} + x_{2328} - x_{1423} - x_{2223} = 0,$
$(node-24):\ x_{2429} - x_{1424} - x_{2324} = 0,$
$(node-25):\ x_{2526} + x_{2537} + x_{2530} - x_{1825} - x_{1925} = 0,$
$(node-26):\ x_{2627} + x_{2638} - x_{1926} - x_{2526} = 0,$
$(node-27):\ x_{2728} + x_{2731} + x_{2739} - x_{2127} - x_{2227} - x_{2627} = 0,$
$(node-28):\ x_{2829} + x_{2832} + x_{2831} - x_{2328} - x_{2728} = 0,$
$(node-29):\ x_{2933} - x_{2429} - x_{2829} = 0,$
$(node-30):\ x_{3036} - x_{2530} = 0,$
$(node-31):\ x_{3134} - x_{2731} - x_{2831} = 0,$
$(node-32):\ x_{3233} + x_{3240} - x_{2832} = 0,$
$(node-33):\ x_{3335} - x_{3233} - x_{2933} = 0,$
$(node-34):\ x_{3439} + x_{3440} + x_{3444} - x_{3134} = 0,$
$(node-35):\ x_{3540} + x_{3541} - x_{3335} = 0,$
$(node-36):\ x_{3637} + x_{3642} - x_{3036} = 0,$
$(node-37):\ x_{3738} + x_{3742} + x_{3743} - x_{2537} - x_{3637} = 0,$
$(node-38):\ x_{3839} + x_{3843} - x_{2638} - x_{3738} = 0,$
$(node-39):\ x_{3943} - x_{2739} - x_{3439} - x_{3839} = 0,$
$(node-40):\ x_{4041} + x_{4044} + x_{4046} - x_{3240} - x_{3440} - x_{3540} = 0,$
$(node-41):\ x_{4146} - x_{3541} - x_{4041} = 0,$
$(node-42):\ x_{4247} - x_{3642} - x_{3742} = 0,$
$(node-43):\ x_{4344} + x_{4347} - x_{3743} - x_{3843} - x_{3943} = 0,$
$(node-44):\ x_{4445} - x_{3444} - x_{4044} - x_{4344} = 0,$
$(node-45):\ x_{4546} + x_{4548} + x_{4549} - x_{4445} = 0,$
$(node-46):\ x_{4649} - x_{4046} - x_{4146} - x_{4546} = 0,$
$(node-47):\ x_{4748} - x_{4247} - x_{4347} = 0,$
$(node-48):\ x_{4850} - x_{4548} - x_{4748} = 0,$
$(node-49):\ x_{4950} - x_{4549} + x_{4649} = 0,$
$(node-50):\ x_{4850} + x_{4950} = 1,$
$0 \le x_{ij} \le 1,\ \forall i \in (1,2,\dots,49)\ and\ \forall j \in (2,3,\dots,50).$

بعد حل النموذج أعلاه وجدنا إن الحل الأمثل النهائي هو:

$$\underset{x\in\mathcal{F}}{Min}\ \mathcal{R}.\mathcal{Z}(x) = 45.55\ and\ \mathcal{Z}^*(x) = (z_1^*(x) = 29.7/km\ ,\ z_2^*(x) = 61.4\$)$$

وقيمة متغيرات القرار المثلى المرضية لصانع القرار مبينة في الجدول رقم (5) وكالآتي:

الجدول رقم 5. مغيرات القرار المثلى لأقصر طريق التي تحقق أدني تخفيض لدالتي الهدف $z_1(x)$ و$z_2(x)$

Optimal Decision Variable (ODV)	Value
x_{13}^*	1
x_{38}^*	1
x_{810}^*	1
x_{1016}^*	1
x_{1619}^*	1
x_{1925}^*	1
x_{2537}^*	1
x_{3742}^*	1
x_{4247}^*	1
x_{4748}^*	1
x_{4850}^*	1

إن الطريقة المعلمية النسبية أعلاه قد حددت مجموعة كل حلول باريتو للنموذج المقترح وأعطت حل مرضي لأي شركة خدمات عند المعلمة النسبية $\left(r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{2}\right)$ حيث إن المسار الأمثل وفقاً لدالتي الهدف $z_1(x)$ و $z_2(x)$ ممثل بالجدول رقم (6) أدناه، وذلك بعد تعويض متغيرات القرار النهائية والمثلى أعلاه في دالتي الهدف الأصلية، أي بمعنى التعويض في دالة المسافة للهدف $z_1(x)$ ولدالة التكلفة للهدف $z_2(x)$ على التوالي للحصول على الحل الأمثل النهائي والذي حقق أقصر طريق ممكن مع أقل تكلفة كلية والذي ينتج حلا متعدد الأهداف مرضي لصانع القرار ولأي شركة أعمال في العالم الحقيقي، والحل الأمثل النهائي الذي ينتج قيمة دالتي الهدف هو:

$$z_1^*(x) = 29.7/km, and\ z_2^*(x) = 61.4\$.$$

الجدول رقم 6. أقصر طريق أمثل حقق أدنى تخفيض في آن واحد لدالتي الهدف z_1^* و z_2^*

Optimal Shortest Path (OSP) from node *i* to node *j*	المسافة الكلية z_1^*/km	التكلفة الكلية $z_2^*/\$$
1 – 3	4.4	3.3
3 – 8	1.9	6.5
8 – 10	2.5	4.6
10 – 16	2.5	4.6
16 – 19	3.3	1.6
19 – 25	4.0	4.3
25 – 37	2.4	6.1
37 – 42	1.8	4.7
42 – 47	2.8	1.7
47 – 48	2.2	10
48 – 50	1.9	14
Sum	29.7	61.4

4. الاستنتاجات:

- من خلال النتائج التي تم الحصول عليها من خلال نموذج البرمجة الخطية للامثلية متعددة الأهداف (الطريقة المعلمية النسبية) نستنتج إن هنالك موازنة فعلية في تحقيق أقصى تدنية لدالة الهدف الأولى التي تمثل المسافة ودالة الهدف الثانية التي تمثل التكلفة الكلية، حيث يكون الأداء هنا متوازن من ناحية المسافة ومن ناحية التكلفة.
- التركيز على كيفية إيجاد أقصر طريق أمثل متعدد الأهداف الذي يحقق اقل تخفيض للمسافة والتكلفة في نفس الوقت لحل مشكلة أي شركة خدمات متعددة الأهداف عن طريق احتساب الطريق الأقصر والتكلفة الكلية الأقل بين أي موقعين للعملاء باستخدام شبكة طرق افتراضية تتألف من 50 عقدة.
- كذلك تم تحديد الطريقة العقلانية لتحقيق اقصى موازنة منجزة من ناحية أدني تخفيض للمسافة والتكلفة ترضي طموح أي شركة خدمات في العالم الحقيقي، لذا تم في هذا البحث اقتراح وإنجاز نموذج البرمجة الخطية متعددة الأهداف لحل مشكلة الطريق الأقصر والأمثل.
- اثبت النموذج المقترح في هذه الورقة مدى الكفاءة والفعالية في حل المشكلة قيد الدراسة، وذلك بعد أن وفرت الطريقة المعلمية النسبية حل أمثل نهائي لدالتي الهدف $z_1(x)$ و $z_2(x)$ مع أقصر طريق أمثل وحيد.
- إن استخدام هكذا نوع من النماذج الرياضية يعد تقنية جديدة من شأنها أن ترفع من جودة صنع القرار العقلاني في شركات الخدمات والأعمال المهتمة بتقديم خدمة سريعة للعملاء عند وجود أهداف متعددة ومتضاربة فيما بينها.
- بالإمكان استخدام النموذج المقترح (الطريقة المعلمية النسبية) في حل المشاكل المماثلة لمشكلة الدراسة، لما وفرته الطريقة آنفة الذكر من مرونة كبيرة لإيجاد حل أمثل نهائي لدالتي الهدف $z_1(x)$ و $z_2(x)$ مع مع أقصر طريق أمثل (Optimal Shortest Path).
- تستطيع شركات الأعمال التي تهتم بتقديم خدمة سريعة للعملاء عند وجود أهداف متعددة تبني الطريقة المستخدمة في هذه الورقة لحل المشاكل التي تواجهها لما تمتلكه هذه الطريقة من كفاءة وفعالية في إيجاد حل للأهداف المتعددة بطريقة واقعية وعقلانية.
- نستنتج إنه من الممكن التوسع في مثل هكذا دراسات واستخدام النماذج المقدمة في هذه الورقة الى الدراسات العليا (الماجستير والدكتوراه)، وتقديم الإثراء العلمي الكافي لشركات الأعمال ومكتبات الجامعات لطالبي المعرفة العلمية في هذا الصدد لتطوير نظرية صنع القرار العقلاني والأمثل.

المصادر

1- Edgeworth, Y., (1881); “Evolutionary Multi-Objective Optimization: Past, Present and Future”, URL: http://www.delta.cs.cinvestav.mx/~ccoell
2- Kuhn, H.W., and Tucker A.W. (1951). Nonlinear Programming, in J. Neyman (ed.), Proceedings Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, pp. 481-491, University of California Press, Berkeley, California.
3- Bellman, R.E., Zadeh, L.A., (1970); “Decision-making in a fuzzy environment”, Mgmt Sci 17: 141-166.

Print ISSN 2710-0952 Electronic ISSN2790-1254

4- Hwang, C.L. and Yoon, K. (1979). Multiple Objective Decision Making-Methods and Applications, Springer-Verlag, Berlin Heidlberg, Printed in Germany.
5- Charnes, A., Cooper, W.W., (1961); "Management Models and Industrial Applications of Linear Programming", John Wiley & Sons, New York.
6- Zeleny, M., (1975); "Multiple Objective Decision Making (MODM): Kyoto", Springer-Verlag, New York.
7- Zimmermann, H.J., (1978); "Fuzzy programming and linear programming with several objective functions", URL:http://www.elsevier.com/locate/dsw
8- Zeleny, M. (1982). Multiple Criteria Decision Making (MCDM), McGraw-Hill Book Company: New York.
9- Carlsson, C. & Kochetkov, Y., (1983); "Theory and Practice of Multiple Criteria Decision Making", North-Holland publishing company, Printed in the Netherlands.
10- Tzeng, G.H., (2003); "New Thinking Trend with MCDM for Social Science Research in E-Era", National Distinguished Chair Professor Institute of Management of Technology, National Chiao Tung University, URL:http://www.cc.nctu.edu.tw/~ghtzeng/
11- Mustajoki, J., (2007); "Interactive multiple criteria decision support (new tools & processes for practical applications)", Helsinki University of technology department of engineering physics and mathematics systems analysis laboratory.
12- White, D. J. (1990). A bibliography on the applications of mathematical programming multiple-objective methods. Journal of the Operational Research Society, 41, 669–691.
13- Papadimitriou C.H., M. Yannakakis, (2000). On the approximability of trade-offs and optimal access of web sources, in Proceedings of the 41st Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, pp. 86-92, IEEE Computer Society.
14- Ireland, P., Case, R., Fallis, J., Van Dyke, C., Kuehn, J., & Meketon, M. (2004). The Canadian Pacific Railway transforms operations by using models to develop its operating plans. Interfaces, 34(1), 5–14.
15- Raith, A. and Ehrgott, M.; (2009). A comparison of solution strategies for bi-objective shortest path problems. Computers & Operations Research, Volume 36, Issue 4. Pages 1299-1331.

16- Paixão J.M., & Santos J.L.; (2013). Labeling Methods for the General Case of the Multi-Objective Shortest Path Problem-A Computational Study. Computational Intelligence and Decision Making, Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering, Vol. 61, Springer. Pages 489-502.

17- Duque, D.; Lozano, L. and Medaglia, A.L.; (2015). An exact method for the bi-objective shortest path problem for large-scale road networks. European Journal of Operational Research, Volume 242, Issue 3. Pages 788-797.

18- Thomas, B., Twan, D. and Wilcovanden, H.; (2017). Analysis of FPTASes for the multi-objective shortest path problem. Computers & Operations Research, Volume 78, Elsevier Ltd. Pages 44-58.

19- Jozefowiez, N., Glover, F. & Laguna M.; (2008). Multi-objective Meta-heuristics for the TSP with Profits. J Math Model Algor; Springer Science with Business Media B.V.

20- Eiji, O.; Linear Programming and Algorithms for Communication Networks: A Practical Guide to Network Design, Control, and Management - CRC Press (eBook). Taylor & Francis Group, LLC (2013). http://www.crcpress.com/.

21- Hwang, C.L. & Yoon, K., (1979); “Multiple Objective Decision Making-Methods and Applications”, A state of the Art Survey. Springer-Verlag, Berlin Heidlberg.

22- Schrage, L. (1999). Optimization Modeling with LINGO (5th Edition). Chicago, IL: LINDO Systems Inc.

–