KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

محاكاة تقدير معالم المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا بأسلوب بيز

Bayesian Parameters Estimation for the Stochastic Differential Delay Equation: A Simulation Study

أ.د. مهند فائز كاظم

الباحث أنور فوزي علي

كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة القادسية

Prof. Dr. Muhannad Fayez Kazim

Researcher Anwar Fawzy Ali

Faculty of Administration and Economics/University of Al-Qadisiyah

DOI: https://doi.org/10.36322/jksc.176(A).19366

الملخص:

تناول هذا البحث تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخفة زمنيا من خلال تجارب محاكاة ومقارنة نتائجها مع النموذج التقليدي المسمى بالحركة البروانية الهندسية.

ان استخدام الطرائق العددية في ايجاد الحل العددي للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً يتم دون التطرق الى تقدير معامل هذه المعادلات. حيث ان تقدير معالم هذا النوع من المعادلات يعتبر ضرورة لفهم سلوك الظاهرة المدروسة خصوصا ان هناك ظواهر ذات سلوك عشوائي تعتمد على بيانات تاريخية (معلمة التخلف الزمني)، كما ان هناك صعوبات في تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً حيث تواجه الكثير من الباحثين المهتمين لذا تم تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة

KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

زمنياً باستخدام أسلوب بيز. حيث اظهرت نتائج تجارب المحاكاة تفوق نموذج المعادلات التفاضلية ذات التخلف الزمني على نموذج الحركة البروانية الهندسية.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً, الحركة البروانية الهندسية, تقدير بيز, خوارزمية كبس, خوارزمية متروبولس- هاستنك.

Abstract:

This paper dealt with the estimation of the parameters of stochastic differential delay equations through simulated experiments and compared their results with the traditional model called the geometric Brownian motion. The use of numerical methods in finding the numerical solution to the stochastic differential delay equations is done without addressing the estimation of the coefficient of these equations. As estimating the parameters of this type of equations is necessary to understand the behavior of the studied phenomenon, especially since there are phenomena with random behavior that depend on historical data (delay parameter). It is also known that there are difficulties in estimating the delay parameters of stochastic differential equations, which confront many interested researchers. So the stochastic differential delay equations parameters were estimated using Bayesian method. The results of the simulation experiments showed the

superiority of the stochastic differential delay equation model over the geometric Brownian motion model.

Keywords: stochastic differential delay equations, geometric Brownian motion, Bayesian estimation, Gibbs sampler algorithm, Metropolis-Hasting algorithm.

المقدمة:

في السنوات الأخيرة تعتبر المعادلات التفاضلية العشوائية (**Stochastic differential equation**) من الأساليب الرياضية المهمة المستخدمة في دراسة سلوك الظواهر المالية (أسعار الفائدة، أسعار الأسهم، أسعار الأصول، ..... الخ) وبالتالي تقسيم أداء هذه الظواهر أو البيانات المالية. أي أن المعادلات التفاضلية العشوائية توفر أطاراً طبيعياً لنمذجة السلوك العشوائي المتأصل في الكثير من العمليات الفيزيائية ذات الزمن المستمر ويمكن القول إن العمليات التفاضلية العشوائية تهتم بفهم ونمذجة ديناميكية الأنظمة وتطورها عبر الزمن. أضافة الى ذلك أهتم الكثير من الباحثين بدراسة العمليات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً **Stochastic delay differential (equations)** من خلال أضافة معلمة التخلف الزمني، حيث أصبحت العمليات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً أكثر مرونة وتطبيقاً في الكثير من المجالات العلمية من خلال اعتمادها على البيانات التاريخية للظاهرة المدروسة وليس فقط على الحالة الحالية للظاهرة المدروسة. يمكن القول ان المهتمين والباحثين في مجال توظيف المعادلات التفاضلية العشوائية في بيانات عالم المال قد اعتمدوا على النظريات المتقدمة في علم الرياضيات ذات الصلة بتتبع ودراسة سلوك حدوث

الظواهر ذات الزمن المستمر مما ساعد على الاستخدام الواسع للنماذج العشوائية للظواهر التي تتسم بالتقلبات المتكررة بهدف أيجاد الحل (اتخاذ القرار) للعديد من عقود ومشاكل التسعير في عالم المال. [كاظم,٢٠٢٢],[Wang,2016]]

يعتبر عالم المال (**Finance world**) بمثابة عالم الأشياء العشوائية والعالم الذي لا يمكن التنبؤ بظهور حوادثه. ان التطور المبتكر للوسائل الرياضية في مجالات الرياضيات المالية والتعقيدات المرافقة للتغييرات الحاصلة بأسواق المال رافقهُ الكثير من العقود المالية والصفقات المالية في عالم صناعة الأموال مع الاخذ بنظر الاعتبار العوائد والمخاطر من هذه التداولات. وبالنتيجة لتسعير العقود والصفقات المستقبلية فأن عدم التأكد مما يحدث مستقبلاً من تسعير الصفقات أصبح من أكثر المواضيع اهتماماً في حقل الرياضيات المالية والتحليل الكمي الحالي. كذلك فان النموذج الرياضي للحركة البروانية الهندسية يعتبر نموذج رياضي مالي لنمذجة أسعار الاصول في نماذج بلاك – شولز والتي تعتبر من أشهر النماذج الرياضية استخداماً لنمذجة أسعار الوصول والتبادلات التجارية، لكن هنالك نقاط خلل في نماذج الحركة البروانية الهندسية كعملية عشوائية تقريبية في تمثيلها للتطور (التغيرات) التي تحصل بأسعار الأصول. أن من المعروف في التعاملات بأسواق المال نجد ان من المهّتيمن بالتداول يستفيدون من المعلومات السابقة (التاريخية) لحركة الأسعار، مثل أسعار الأسهم التاريخية بهدف التنبؤ بتحركات السوق وبالتالي اتخاذ القرارات المثلى في الاستثمار من عدمه. وبهذا فان الاعتماد على المعلومات التاريخية (المعلومات السابقة) من خلال إضافة حد التخلف الزمني الى نموذج الحركة البروانية الهندسية القياسية فأننا نحصل على نموذج معادلة تفاضلية عشوائية متخلفة زمنياً والتي تعتبر صيغة رياضية أكثر مرونة للتعامل مع التطورات (التغيرات) التي

ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

تحصل في أسعار الأصول في أسواق المال غير الكفوء. في هذه الرسالة سوف نركز على الدراسات التي تناولت تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً والدراسات ذات العلاقة.

المبحث الاول: الاطار النظري:

اولا: مشكلة البحث:

يتطلب إيجاد الحل العددي للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً ثم تقدير معالم هذا النوع من المعادلات حيث من الضروري فهم سلوك تغير قيم هذه المعالم عند دراسة أنظمة المعادلات ذات السلوك العشوائي خصوصاً في حالة كون أنظمة هذه المعادلات تعتمد في سلوكها على البيانات التاريخية (معلمة التخلف الزمني) أيضاً من المعروف ان هناك صعوبات في تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً وجه الكثير من الباحثين المهتمين خصوصاً بدراسة سلوك الظواهر المالية.

ثانيا : فرضية البحث:

تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشواية المتخلفة زمنيا باستخدام اسلوب بيز يوفر مقدرات اكثر دقة من نموذج الحركة البروانية الهندسية.

ثالثا : الحدود المكانية:

تم تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشواية المتخلفة زمنيا باستخدام تقنية المحاكاة وفق اسلوب بيز من خلال اجراء ثلاث تجارب للمحاكاة وبافتراض توزيعات مسبقة مختلفة للمعالم المراد تقديرها.

KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

المبحث الثاني: المفاهيم النظرية للمعادلات التفاضلية العشواية المتخلفة زمنيا

١- المعادلات التفاضلية العشواية (**Stochastic differential equations**)

تعتبر المعادلات التفاضلية العشوائية بمثابة معادلة رياضية تشتمل على دوال (**functions**) اضافة الى مشتقاتها. وعادة ما تكون الدوال هي بمثابة كميات رياضية (مثل المتوسط او اي دالة ببيانات الظاهرة المدروسة) اما مشتقاتها فتمثل معدل التغير (**rate of change**) في هذه الكميات او الدوال، وباستخدام المعادلات التفاضلية يمكن وصف العلاقة بين هذه الدوال ومشتقاتها. لنفرض ان لدينا المعادلة التفاضلية العشوائية الاتية: [[**Karatzas and Shreve, 1991**]

[Awwad, S. and Al–saadony, M.(2022a)] ,[Awwad, S. and Al–saadony, M.(2022b).]

$$\mathbf{dN(t) = r(t)N(t)dt + \alpha N(t)dW(t) \quad \dots (1)}$$

حيث ان

$\mathbf{W(t)}$: تمثل الحركة البروانية **Brownian Motion**

$\mathbf{r(t)}$: هو الجزء المحدد (الحتمي) **deterministic**

$\boldsymbol{\alpha}$: هو عدد يمثل مقدار التقلبات **(Volatility)**

$\mathbf{N(t)}$: تمثل حالة الظاهرة المدروسة عند الزمن $\mathbf{t}$.

من اجل فهم المعادلة التفاضلية العشوائية $(\mathbf{1})$ يتطلب الامر ادراج التعاريف الاتية:

تعريف (١): المعادلة التفاضلية العشوائية **Stochastic Differential Equation**

[Zheng,2015]

نفرض ان $\mathbf{W(t)}$ هي عملية الحركة البروانية العشوائية وان $\mathbf{f(.)}$, $\mathbf{g(.)}$ هي دوال فأن العملية التفاضلية العشوائية يمكن تعريفها كالاتي: **[Carlsson et.al, 2010],[Evans, 2013]**

$$\mathbf{dx(t) = f\big(t, x(t)\big)dt + g(t, x(t))dW(t); \quad 0 \le t \le T} \qquad \dots (2)$$

بأفتراض ان $\mathbf{x(0) = x_0}$ هو متغير عشوائي وان الدوال $\mathbf{f, g}$ معرفة كالآتي:

$$\mathbf{f: [0, T] \times R^n \longrightarrow R^n}$$

$$\mathbf{g: [0, T] \times R^n \longrightarrow R^{n+m}}$$

حيث ان:

$\mathbf{m}$ هو عدد التغيرات لعملية الحركة البروانية

$\mathbf{n}$ هي عدد المتغيرات العشوائية $\mathbf{X}$

$\mathbf{R}$ تمثل مجموعة الاعداد الحقيقة

ان المعادلة التفاضلية العشوائية $(\mathbf{2})$ تكتب باستخدام التكاملات بالصيغة الاتية:

$$\mathbf{X(t+s) = X(t) + \int_{t}^{t+s} f(X(u),u)du + \int_{t}^{t+s} g(X(u),u)dw(u) \ldots (3)}$$

وبافتراض ان $\mathbf{t = 0}$ فانه يمكن اعادة كتابة المعادلة $\mathbf{(3-2)}$ كالاتي:

$$\mathbf{X(t) = X(0) + \int_{0}^{t} f(X(u),u)du + \int_{0}^{t} g(X(u),u)dw(u) \ldots (4)}$$

عندئذ وبناءاً على المعادلة (٤) يمكن القول بأن العملية العشوائية $\{X_t\}_{t\geq 0}$ هي عملية **Itô** (**Itô process**) والتي عادة ما تتكون من تكاملين الاول يدعى تكامل **Riemann** والثاني يدعى التكامل العشوائي (**stochastic integral**) .

تعريف (٢): الحركة البروانية الهندسية (**Geometric Brownian Motion GBM)**

[Zheng,2015]

بافتراض ان لدينا اسعاراسهم فان الحركة البروانية الهندسية لاسعار الاسهم **s(t)** تعرف على انها عملية عشوائية تحقق المعادلة التفاضلية العشوائية الاتية:

$$\mathbf{\frac{ds(t)}{dt} = \mu dt + \sigma w(t)}$$

حيث ان

ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

μdt : هو الحد المتنبأ به (**predictable**) وتكون فيه المعلمة μ هي مقياس لمتوسط معدل نمو اسعار الاسهم والتي تعرف بـمعلمة **drift**.

$\sigma w(t)$: هو الحد العشوائي الذي يمثل التغير العشوائي بأسعار الاسهم الناجمة من التأثيرات الخارجية غير المتوقعة، حيث ان σ تمثل معلمة **volatility** اي معلمة التقلبات والتي تقيس الانحراف المعياري للعوائد. من خلال التعريف اعلاه نجد من الواضح ان العملية التفاضلية العشوائية تعاني من بعض المحددات اهمها هو ان المعلومات السابقة (التاريخية) للتبادلات المالية لا تؤخذ بنظر الاعتبار عند محاولة فهم التحركات في اسعار الاسهم المستقبلية. لذلك تطلب الامر تطوير ما يسمى بالمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً، المبحث التالي يبين هذا النوع من المعادلات.

المبحث الثالث: المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً:

Stochastic delay differential Equation (SDDE)

في المبحث السابق ذكرت تعريف العملية العشوائية التفاضلية (**SDE**) وهنا سنتطرق الى المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً (**SDDE**) من خلال ادخال المعلومات السابقة او التاريخية على شكل معلمة تمثل ما يسمى بالتخلف الزمني (**delay**) او الذاكرة (**Memory**) الى المعادلة التفاضلية العشوائية.

ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

وتجدر الاشارة الى انه يمكن اضافة معلمة التخلف الزمني الى الحد الحتمي (**deterministic**) او الحد العشوائي (**stochastic**) او كلاهما. [[Awwad, S. and Al–saadony, M.(2022a).

ان اضافة هذه المعلمة يجعل من المعادلة التفاضلية العشوائية اكثر مرونة وواقعية لفهم ووصف تحركات الاسعار والتبادلات المالية من خلال نموذج رياضي ذو قدرة تفسيرية عالية. وبذلك بدلاً من افتراض ان اسعار الاسهم **S(t)** تتبع عملية الحركة البروانية الهندسية (**GBM**) وان اسعار الاسهم تتبع خاصية ماركوف فأننا نفترض ان التحركات المستقبلية لاسعار الاسهم **S(t)** تعتمد ليس فقط على السعر الحالي للسهم بل وانها تعتمد كذلك الاسعار التاريخية (الاسعار السابقة) انظر [**Zheng 2015**] لمزيد من المعلومات. [[**Han, 2005**

تعريف (٣): على فرض ان لدينا الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) وان $W(t)$ يمثل الحركة البروانية، عندئذ فأن المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً تعرف رياضياً بالصيغة الاتية:

ALADAĞLI [٢٠١٧], [العذاري,١٩٩٠]

$$dS(t) = f\big(S(t), S(t-\tau)\big)dt + g\big(S(t), S(t-\tau), t\big)dW(t)\ ; \qquad t \geq 0$$

$$S(t) = \phi(t), -\tau \leq t \leq 0$$

$$\dots (5)$$

حيث ان $\tau > 0$ هي معلمة التخلف الزمني وان الدوال f و g معرفتان بالشكل الاتي:

ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

$$f: R \times R \times R_+ \longrightarrow R$$

$$g: R \times R \times R_+ \longrightarrow R$$

وان $R_+ = [0, \infty]$

وان

$$\emptyset(t) = [-\tau, 0] \longrightarrow R^n$$

هي متغير عشوائي يحقق الشرط الاتي:

$$E[\sup|\emptyset(t)|^p{}_{t\in[-\tau,0]}]^{\frac{1}{p}} < \infty$$

وان f و g هي دوال **drift , volatility**.

نظرية (١): افترض ان لدينا المعادلة التفاضلية المتخلفة زمنياً (**SDDE**) الاتية: **[Jassim,2006]** **[Buckwar,2000] [[Zheng,2015**

$$dS(t) = f\big(t, S(t), S(t-\tau)\big)dt + g\big(t, S(t), S(t-\tau)\big)dW(t); \quad a \le t \le b$$

$$\dots(6) S(t_0) = \emptyset_0(t); \qquad t_0 - \tau \le t \le t_0$$

ومن خلال تقسيم الفترة $[a, b]$ بالشكل الاتي:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b,$$

$t_n = n.h \ , \ n = 0, 1, \dots, N$ حيث ان

ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

$h = \frac{T}{N} = \frac{b-a}{N}$, وان

$$\tau = N_\tau . h$$

عندئذ فأن الحل وفق طريقة اويلر يمتلك الدالة الاتية:

$$\Psi\left(h, \tilde{S}_n, \tilde{S}_{n-N_\tau} \ , \Delta w_{n+1}\right) = f\left(\tilde{S}_n, \tilde{S}_{n-N_\tau}\right)h + g(\tilde{S}_n, \tilde{S}_{n-N_\tau})\Delta W_{n+1}$$

حيث ان $0 \leq n \leq N-1$ وان

$$\Delta W_{n+1} = W(t_{n+1}) - W(t_n)$$

هنا المتغيرات العشوائية $\Delta W_1, \ldots, \Delta W_N$ مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين h. وان $\tilde{S}_{(.)}$ تمثل التقريب القوي **strong approximation** لحل المعادلة (6).

في هذه الرسالة سوف نعتمد على المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا التالية التي افترضها الباحث **[[Zheng,2015]]** لنمذجة اسعار الاسهم على انها تعتمد في حركة التبادلات المالية على المعلومات التي يستوعبها المضاربون من البيانات والتبادلات المالية التي تعود لازمان سابقة (معلمة التخلف الزمني),

$$dS(t) = \left(a.S(t) + b.S(t-\tau)\right)dt + \left(c.S(t) + dS(t-\tau)\right)dW(t);$$

$$0 \leq t \leq T$$

$$S(t) = \emptyset(t); \ -\tau \leq t \leq 0 \qquad \ldots(7)$$

حيث ان معلمة التخلف الزمني $\tau > 0$ تمثل ثابت عددي معين.

KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

حيث اختبر الباحث **[[Zheng,2015** بأن المعادلة التفاضلية (7) تحقق شرط **Local Lipschitz** وشرط النمو الخطي **[Kutoyants, 2005] . Linear growth**

المبحث الرابع : تقدير المعالم باسلوب بيز للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً

ان ايجاد تقديرات المعالم باسلوب بيز يتسم بالكثير من الخصائص من اهمها انه يمكن تطبيق اسلوب بيز في حالة حجوم العينات الصغيرة وهو عكس الطرق الاخرى التي يعتمد بعضها على الحجوم الكبيرة للعينات ونظريات التقارب، كذلك هنالك طرق مثل طريقة العزوم التي لا تتطلب اجراء تكاملات لتسهيل العمليات الحسابية، لذلك وعند التعامل مع ظواهر في فترات زمنية محددة يصبح من الصعب الاعتماد على الطرائق الكلاسيكية في تقدير معالم المعادلة التفاضلية لذلك في هذه الرسالة سوف نعتمد على اسلوب بيز. **[Bernardo, J. M. and Smith, A. F. M. (2000)],[Box and Tiao, 1973],**

[Rao, 2008]

تنص قاعدة بيز على المعادلة الاتية:

$$\mathbf{g(\theta|data)} = \frac{\mathbf{f(\theta) \times g(\theta)}}{\int \quad \mathbf{f(\theta) \times g(\theta) d\theta}} \qquad \dots (8)$$

وبسبب ان مقام $(\mathbf{8})$ هو دالة لا تعتمد على المعلمة $\boldsymbol{\theta}$ فممكن كتابة $(\mathbf{8})$ بالشكل الاتي:

$$\mathbf{g(\theta|data) \propto f(data|\theta) \times \ g(\theta)}$$

ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

تعتبر تقنية **MCMC (Markov chain Monte Carlo)** من اوسع التقنيات الحسابية التي يمكن استخدامها في اجراء دراسة المحاكاة في الاستدلال البيزي. في هذه الدراسة سوف نستخدم الخوارزمية كبس وخوارزمية متروبوس لتقدير معالم المعادلة **SDDE. [Casella and George, 1992]**

٢- التوزيع السابق والتوزيع اللاحق للمعالم

ان دالة الكثافة للاحتمالات الانتقالية للعملية العشوائية $\{\tilde{Y}_n ; 0 \le n \le N\}$ تحقق الشرط الاتي:

$$f(\tilde{y}_0 , \theta) = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_i^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp \exp \left\{-\frac{(S_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right\} \dots (9)$$

حيث ان المتوسط هو:

$$\mu_i = (ah + 1)S_{i-1} + bhS_{i-N_\tau-1}$$

والتباين

$$\sigma_i^2 = c^2(S_{i-1} + dS_{i-N_\tau-1})^2 h$$

وان $i = 1, 2, \dots , N$

وبهذا فان التويع السابق واللاحق لمعالم **SDDE** سيكون كمايلي:

٢-١: التوزيع السابق واللاحق للمعلمة **a**

KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

بالاعتماد على توزيع دالة الإمكان (9)الذي تتبع فيه التوزيع الطبيعي للبيانات المتولدة من العملية $\{S_n\}_{0\le n\le N}$ وبافتراض ان المعلمة **a** تمتلك توزيعاً مسبقاً **(prior)** يتمثل بالتوزيع الطبيعي فانه يمكن كتابة التوزيع اللاحق **(posterior)** للمعلمة **a** بالشكل الآتي:

لنفرض

$$g(a;0,\sigma_a^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}}\exp\exp\left\{\frac{-a^2}{2\sigma_a^2}\right\}$$

$-\infty\le a\le\infty$. حيث ان

كذلك فان

$$g(a\,|\tilde{y}_0,\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\dots,\tilde{y}_N,b,c^2,d)=g(a|S_1,S_2,\dots S_n,\tilde{y}_0,b,c^2,d)$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{a^2}{2\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{(hS_{i-1})^2}{\sigma_i^2}+\frac{1}{\sigma_a^2}\right]^{-1}}+\sum_{i=1}^{N}\frac{ahS_{i-1}(S_i-S_{i-1}-bhS_{i-N_\tau-1})}{\sigma_i^2}\right\}\dots(10)$$

ان الجانب الايمن اعلاه يمكن اعتباره كتوزيع طبيعي للمعلمة **a** بمتوسط

ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{N} \quad hS_{i-1}\left(S_i - S_{i-1} - bhS_{i-N_\tau-1}\right)/\sigma_i^2\right]}{\left[\sum_{i=1}^{N} \quad \frac{(hS_{i-1})^2}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\sigma_a^2}\right]^{-1}}$$

وتباين

$$\left[\sum_{i=1}^{N} \quad \frac{(hS_{i-1})^2}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\sigma_a^2}\right]^{-1}$$

2−2:التوزيع السابق واللاحق للمعلمة **b:**

$$,g(b\,|\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_N, a, c^2, d) = g(b|S_1, S_2, \ldots\ S_n, \tilde{y}_0\ , a, c^2, d)$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{b^2}{2\left[\sum_{i=1}^{N} \quad \frac{(hS_{i-N_\tau-1})^2}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\sigma_b^2}\right]^{-1}} + \sum_{i=1}^{N} \quad \frac{bhS_{i-1}(S_i - S_{i-1} - ahS_{i-1})}{\sigma_i^2}\right\} \ldots (11)$$

ان الجانب الايمن اعلاه يمكن اعتباره كتوزيع طبيعي للمعلمة **b** بمتوسط

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{N} \quad hS_{i-N_\tau-1}(S_i - S_{i-1} - ahS_{i-1})/\sigma_i^2\right]}{\left[\sum_{i=1}^{N} \quad \frac{(hS_{i-N_\tau-1})^2}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\sigma_b^2}\right]^{-1}}$$

وتباين

$$\left[\sum_{i=1}^{N} \quad \frac{(hS_{i-N_\tau-1})^2}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\sigma_b^2}\right]^{-1}$$

3−2: التوزيع السابق واللاحق للمعلمة c^2:

ان المعلمة **c** موجودة في الحد العشوائي (حد التقلبات او الانحرافات المعيارية) من المعادلة التفاضلية العشوائية امتخفة زمنيا, لذلك فأن التوزيع المسبق المفترض لها هو توزيع معكوس كاما، حيث ان

$$g(c^2|\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\alpha}(c^2)^{-\alpha-1} \quad e^{-\frac{\beta}{c^2}}$$

وهكذا فأن التوزيع اللاحق للمعلمة c^2 وبالاعتماد على قاعدة بيز **(8)** وتوزيع الامكان **(9)** سيكون بالشكل الاتي:

$$\pi(c^2\,|\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N, a, b, d) = \pi(c^2|S_1, S_2, \dots\ S_n, \tilde{y}_0\ , a, b, d)$$

$$\propto (c^2)^{-\left(\frac{N}{2}+\alpha\right)-1} \quad \exp\left\{-\frac{(\beta+z)}{c^2}\right\} \qquad \dots(12)$$

حيث ان:

$$z = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left[S_i - \left((ah+1)S_{i-1} - bhS_{i-N_\tau-1}\right)\right]^2}{2hc^2(S_{i-1} + dS_{i-N_\tau-1})^2}$$

ان الجانب الايمن اعلاه من الدالة (12) يمثل توزيع معكوس كاما وبالتالي فأن c^2 يمتلك توزيع معكوس كاما كتوزيع لاحق بالمعالم:

$$\frac{N}{2} + \alpha = \text{shape parameter}$$

و

$$\beta + \sum_{i=1}^{N} z_i = \text{scale parameter}$$

ان التوزيعات اللاحقة $(10)(11)$, , و (12) تمتلك توزيعات احصائية معلومة الشكل لذلك يمكن استخدام خوارزمية **Gibbs** لتوليد عينات للمعالم c^2, b, a من اجل حساب متوسطاتها كتقدير لقيمها. اما المعلمة الرابعة d فلا يمكن تحديد صيغة قريبة لتوزيعها المسبق لذلك لا يمكن اشتقاق توزيعها اللاحق مما يستوجب ان نستخدم خوارزمية متروبولس هاستنكس **Metropolis – Hastings** لتوليد عينات للمعلمة d حيث ان هذه الخوارزمية لا تتطلب تحديد توزيع للمعلمة المدروسة من توزيع متأتي من قاعدة بيز (8) وانما يمكن اقتراح توزيع معين بشكل مسبق ليؤدي الغرض في توليد العينات.

٤-٢: خوارزمية **Hastings Metropolis** لتوليد عينات المعلمة $\mathbf{d}$:

ان خوارزمية **Metropolis – Hastings** عادة ما تتطلب اقتراح توزيع معين وليكن $\mathbf{g_i(d^*|d_i)}$, حيث يمكن من خلال هذا التوزيع الافتراضي حساب احتمالية المتغير $\mathbf{d^*}$. اضافة الى ذلك سوف نستخدم خوارزمية **Metropolis within Gibbs** من اجل توليد عينات والعمل بآلية سلسلة ماركوف, حيث سيكون تحديث **(update)** المعالم عند توليد العينات ضمن اطار خوارزمية **Gibbs** باتباع خطوات **Metropolis**. ان عمل هذه الخوارزمية يمكن وصفه بالخطوات الاتية:

١- تحديد القيم الابتدائية للمعالم $\mathbf{d_0, c_0^2, b_0, a_0}$ في الخطوة $\mathbf{(i+1)}$.

٢- سحب عينة من خلال

$$\mathbf{a_{i+1} \sim g(a_{i+1}|\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N, c_i^2, d_i)}$$

٣- سحب عينة من خلال

$$\mathbf{b_{i+1} \sim g(b_{i+1}|\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N, a_{i+1}, c_i^2, d_i)}$$

٤- سحب عينة من خلال

$$\mathbf{C_{i+1}^2 \sim g(c_{i+1}^2|\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N, a_{i+1}, b_{i+1}, d_i)}$$

٥- سحب $\mathbf{d^*}$ من التوزيع المقترح $\mathbf{g_i(d^*|d_i) \sim N(d_i, \sigma_d^2)}$ وحساب نسبة القبول الاتية:

ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

$$R = \frac{g(d^*|S_1, S_2, \dots, S_N, \tilde{y}_0, a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}^2)/gi(d^*|d_i)}{g(d_i|S_1, S_2, \dots, S_N, \tilde{y}_0, a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}^2)/gi(d_i|d^*)}.$$

٦- تقبل d^* عندما يكون التكرار الاول $(i+1)$ هو d_{i+1}مع احتمال $\min(R,1)$

. اما اذا لم يتم قبول d^* عندئذ نجعل $d_{i+1} = d_i$

٧- بالرجوع الى الخطوة ٢ والعمل على تنفيذ الخطوة التالية $(i+2)$.

المبحث الخامس : عرض نتائج تجربة المحاكاة

ان اسلوب المحاكاة وبفضل التطور الهائل للحاسوب و البرمجيات اصبح من السهل الحصول عى نتائج تجارب المحاكاة وتحليل هذه النتائج وبالتالي فهم نقاط الضعف ونقاط القوة للاسلوب المقترح وبالتالي يتمكن الباحث من تحديد مساره والشروط الواجب توفرها لتطبيق الاسلوب المقترح على البيانات الحقيقة. وبالتالي يمكن القول ان هدف هذا الفصل هو ايجاد تقدير بيز لمعالم المعادلة العشوائية التفاضلية المتخلفة زمنيا **SDDE** وتقدير بيز لمعالم الحركة البروانية الهندسية **GBM** ومقارنة النتائج باستخدام معيار معلومات الانحرافات **(Deviance Information Criterion (DIC** للحكم على اداء التقدير. كما وضحنا سابقا ان الهدف من تجربة المحاكاة هو المقارنة بين اداء اسلوب بيز في تقديرمعالم كل من المعادلة العشوائية التفاضلية المتخلفة زمنيا والعملية العشوائية المسماة بالحركة البروانية الهندسية, حيث سنفترض ان عملية الحركة الروانية الهندسية تمتلك المعادلة التفاضلية العشوائية الاتية:

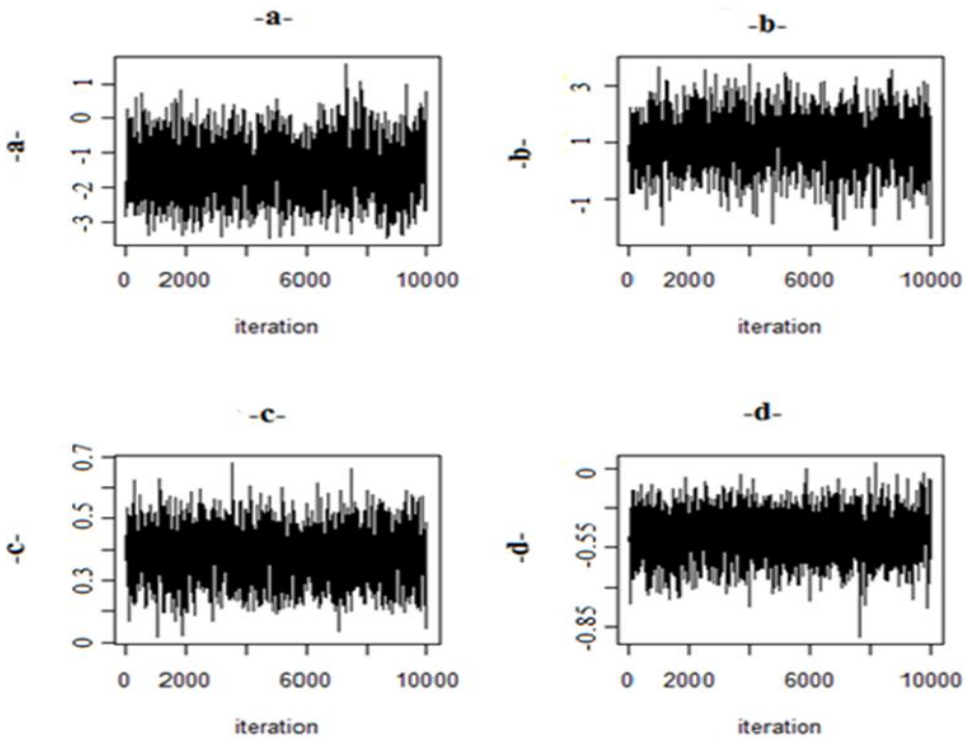
$$dS(t) = a.\,S(t)dt + c.\,S(t)dW(t), -\tau \le t \le T. \quad \dots (13)$$

في هذه التجربة سنفترض انه تم تنفيذ خوارزمية متروبولس- كبس لكل معلمة من خلال توليد ١٣٠٠٠ **(iteration)** او عينة حجم مشاهداتها ٢٠٠ مشاهدة من قيم العملية العشوائية **S(t)** حيث تم استبعاد اول ١٠٠٠ تكرار من اجل الحصول على استقرارعمل الخوارزمية في عملية توليد البيانات كمايلي:

تجربة المحاكاة: اولا في هذه التجربة تم اولا توليد مشاهدات من دالة الكثافة **(transition density)** للعملية العشوائية المفترضة في الدالة (٦-٢) وبحجم ٢٠٠ مشاهدة, حيث تم اعتبار هذه الدالة بمثابة توزيع للبيانات **(likelihood function)** عند استخدام الخوارزميات الحسابية في توليد قيم المعالم من التوزيعات اللاحقة. في هذه التجربة تم افتراض ان التوزيع المسبق يتبع التويع الطبيعي $\mathbf{N(0,11)}$ للمعلمة **a** والتوزيع المسبق الطبيعي $\mathbf{N(0,11)}$ للمعلمة **b** والتوزيع المسبق $\mathbf{N(0,10)}$ للمعلمة **d** عند التوليد من خوارزمية كبس. كذلك تم استخدام التوزيع المسبق $\mathbf{IG(5,1)}$ للمعلمة **c** عند التوليد من خوارزمية متروبولس – هاستنك ضمن خوامية كبس مستخدما توزيعا مقترحا للعمل بهذه الخوازمية يتبع التوزيع الطبيعي $\mathbf{N(d_i,\sigma_d^2=0.2)}$. الاشكال البيانية التالية تمثل رسم **trace plot** , حيث يستخدم هذا الرسم كأداة لتشخيص التقارب في عملية توليد العينات في خوارزمية كبس وتتبع حالة استقرار العينات المتولدة من التوزيع اللاحق اي ان هذا الرسم البياني يوضح التمازج **(mixing)** بين التوزيع المسبق وتوزيع البيانات. وتم رسم المدرج التكراري **Histogram** للمعالم المقدرة يستخدم كأداة لمعرفة نوع التوزيع اللاحق من خلال الرسم. وثانيا تم توليد ٢٠٠ مشاهدة من العلمية العشوائية (٣-١) التي تمثل

KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

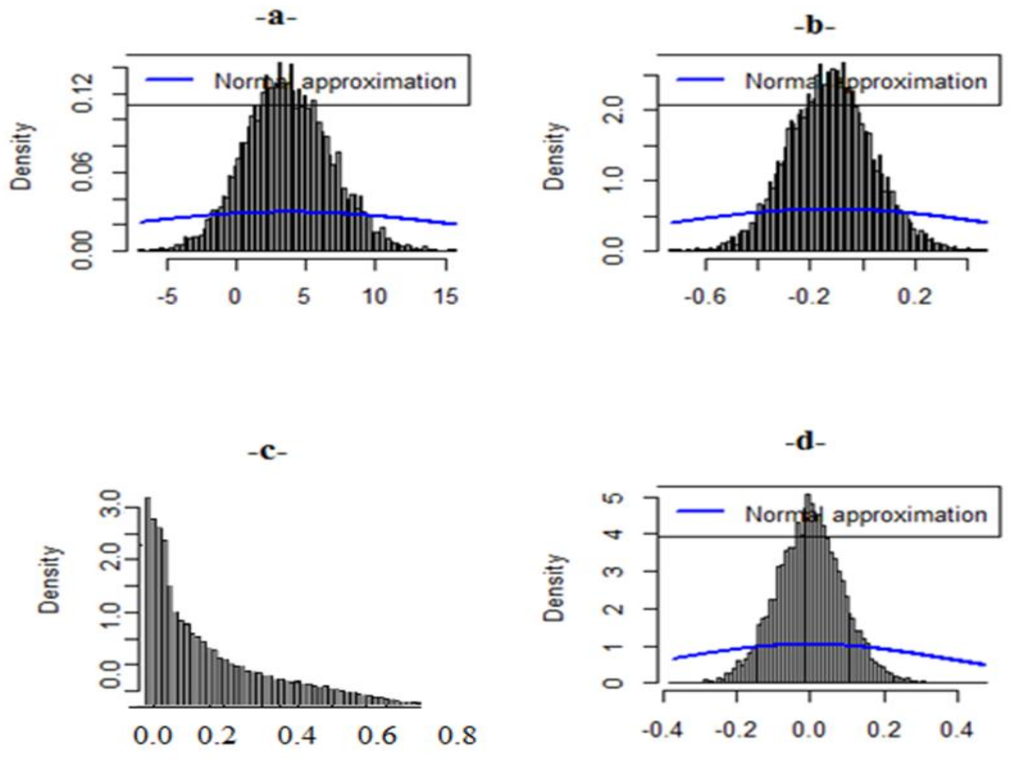
العملية العشوائية للحركة البروانية الهندسية **GBM** بافتراض وجود معلمتين فقط هما **(a, c)** يتبعان نفس التوزيعات المشار اليهما اعلاه في المعادلة **SDDE** كتوزيعات مسبقه وتوزيعات لاحقة. وتم رسم كل من **trace plot** و المدرج التكراري للحكم على اداء الخوارزمية.



شكل ١: رسم **trace plot** للمعالم **a,b,c,d** لتجربة المحاكاة الاولى للعملية **SDDE**

KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

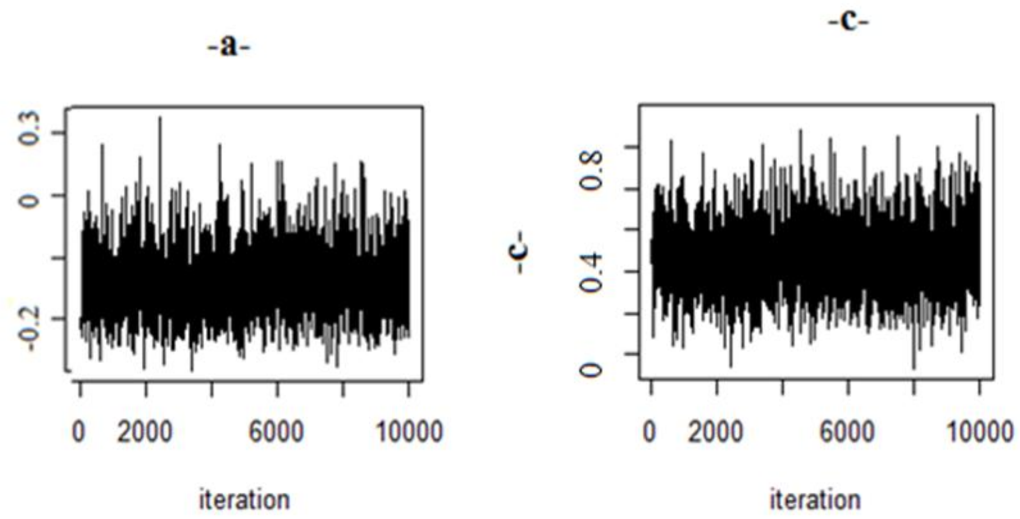
من خلال الشكل (١) نجد ان هناك اربعة رسوم تمثل مخطط **trace plot** كل معمة من المعالم المقدرة, حيث يلاحظ من هذا الشكل ان جميع المعالم تم توليد قيمها من خوارزمية لاتعاني تباطؤ في توليد العينات ولاتعاني من توقفات **(flat bits)** اثناء التوليد.



شكل ٢: رسم المدرج اللتكراري للمعالم **a,b,c,d** لتجربة المحاكاة الاولى للعملية **SDDE**.

KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

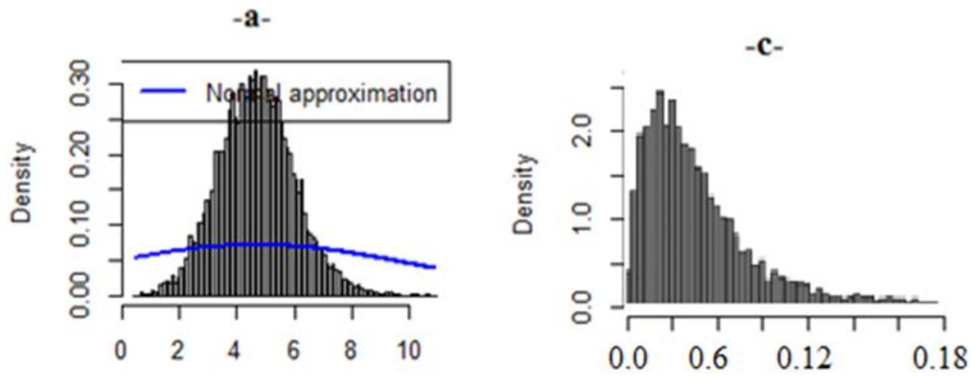
الرسومات في الشكل (٢) توضح ان المعالم **a, b, d** تتبع التوزيع اطبيعي وهذا ماينطبق مع الجانب النظري الذي يفترض بان هذه المعامل تتبع التوزيع الطبيعي. وكذلك يمكن الاستنتاج ان المعلمة **c** تتبع توزيع معكوس كاما وهذا ايضا ماينطبق مع الجانب النظري. الرسومات التالية توضح رسم **trace plot** والمدرج التكراري لمعالم الحركة البروانية الهندسية (**a, c**).



شكل ٣: رسم **trace plot** للمعالم **a, c** لتجربة المحاكاة الاولى للعملية **GBM.**

حيث يلاحظ من هذا الشكل ان جميع المعالم تم توليد قيمها من خوارزمية لا تعاني تباطؤ في توليد العينات ولا تعاني من توقفات (**flat bits**) اثناء التوليد.

KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq



شكل٤: رسم المدرج اللتكراري للمعالم **a, c** لتجربة المحاكاة الاولى للعملية **GBM**

توضح ان المعلمة **a** تتبع التوزيع الطبيعي وهذا ماينطبق مع الجانب النظري الذي يفترض بان هذه المعامل تتبع التوزيع الطبيعي. وكذلك يمكن الاستنتاج ان المعلمة **c** تتبع توزيع معكوس كاما وهذا ايضا ما ينطبق مع الجانب النظري.

KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

جدول (١) يبين قيم المعالم المقدرة وقيم المعيار **DIC** لتجربة المحاكاة الاولى

Models	A	b	C	D	DIC
SDDE	**−0.923**	**1.1**	**0.4**	**−0.58**	**29.04**
(s.e.)	**(0.592)**	**(0.611)**	**(0.071)**	**(0.067)**	
GBM	**−0.10**	**0**	**0.5**	**0**	**216.11**
(s.e.)	**(0.057)**	**(0)**	**(0.0078)**	**(0)**	

من الجدول (١) الذي يبين تقدير معالم بيانات اسعار صرف الدولار في السوق الموازي نجد ان قيمة معيار **DIC** اقل لنموذج **SDDE** مما عليه لنموذج **GBM** مما يعني ان نموذج المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا يلائم هذا النوع من البيانات اكثر من ملائمة النموذج التقليدي **GBM** .

الاستنتاجات:

تعد النماذج العشوائية وخصوصا المعادلات التفاضلية العشوائية ذات معلمة التخلف الزمني **SDDE** من اوسع النماذج العشوائية انتشاراً المجالات التطبيقية وخصوصا البيانات المالية (اسعار الصرف او اسعار الاسهم,.... الخ). ان مرونة دوال المعادلات التفاضلية العشوائية ذات معلمة التخلف الزمني من الناحية الرياضية ومن ناحية تمثيل العمليات العشوائية للظواهر المالية حين ان وجود معلمة التخلف الزمني يساهم

في فهم هذه حركة البيانات المالية كونها تستغل البيانات التاريخية في رسم صورة واضحة عن تحركات البيانات المالية. هذا البحث تطرق الى المعادلات التفاضلية العشوائية ذات التخلف الزمني, حيث تم ادراج مجموعة من التعاريف والنظريات ساهمت اى حد كبير في فهم الية عمل هذا النوع من المعادات التفاضلية. وتم استعراض تجربتين للمحاكاة من اجل فهم سوك هذا النوع من المعادلات التفاضلية العشوائية بوجود التخلف الزمني في حد معدل النمو وفي حد التقلبات، ونموذج الحركة البروانية الهندسية من خلال استخدام نظرية بيز في تقدير معالم النماذج المشار اليها. ومن خلال استخدام معيار انحرافات المعلومات **DIC** تبين تفوق المعادلات التفاضلية العشوائية بوجود معامل التخلف الزمني على نموذج الحركة البروانية الهندسية في جميع تجارب المحاكاة.

المراجع:

اولا- المراجع العربية:

٢- العذاري, فارس مسلم، الوكيل علي عبد الحسين. العمليات التصادفية. وزارة التعليم العالي العراقية. جامعة بغداد ١٩٩١.

٢ شذى كاظم عواد.(٢٠٢٢). المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً مع تطبيق عملي.رسالة ماجستير, قسم الاحصاء, كلية الإدارة والاقتصاد, جامعة القادسية.

ثانيا- المراجع الإنكليزية:

[1] ALADAĞLI, E-EZGI, (2017). ″Stochastic Delay Differential Equations″. A Thesis submitted to the Graduate School of Applied Mathematics of Middle East Technical University.

[2] Awwad, S. and Al-saadony, M.(2022a). Simulation Analysis Based on Stochastic Delay Differential Equations. Al-Qadisiyah Journal for Administrative and Economic Sciences, 2312-9883 QJAE, Volume 24, Issue 1.

[3] Awwad, S. and Al-saadony, M.(2022b). Iraqi Exchange pricing Analysis with Stochastic Delay Differential Equations. Al-Qadisiyah Journal for Administrative and Economic Sciences,QJAE, Volume 24, Issue 2.

[4] Bernardo, J. M. and Smith, A. F. M. (2000). Bayesian Theory, John Wiley and Sons, New York.
[5] Box, G. E. P. and Tiao, G. C. (1973). Bayesian Inference in Statistical Analysis, John Wiley and Sons, New York.
[6] Buckwar, E., (2000). Introduction to the numerical analysis of stochasthic delay differential equations. Department of Mathematics, the Victoria University of Manchester,.
[7] Carlsson, J., Moon, K. S., Szepessy, A., Tempone, R., and Zouraris, G. (2010). Stochastic differential equations: Models and numerics. Lecture notes.
[8] Casella, G. and George, E. I. (1992). Explaining the Gibbs sampler. American Statistician, 46, 167–174.
[9] Evans, L. C. (2013). An Introduction to Stochastic Differential Equations. AmericanMathematical Society. Department of Mathematics, University of California, Berkeley.
[10] Han, S. (2005). Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. M.Sc. Thesis, University of Edinburgh and Heriot-Watt.
[11] Jassim, Hussna .A.,″ Solution of Stochastic Linear OrdinaryDelay Differential Equations″., the College of Science of Al-Nahrain University, the Degree of Master of Science in Mathematics,2009.
[12] Karatzas, I. and Shreve, S. E. (1991). Brownian Motion and Stochastic Calculus, second edition, Springer-Verlag, Berlin.
[13] Kutoyants, Y. A. (2005). On delay estimation for stochastic differential equations. Stochastics and Dynamics, 5(02), 333-342.
[14] Wang,P. (2016). Application of Stochastic Differential Equations to Option Pricing. Master of Arts, Graduate Faculty of the University of Kansas.
[15] Rao, B. P. (2008). Parametric estimation for linear stochastic delay differential equations driven by fractional Brownian motion. Random Operators and Stochastic Equations 16(1):27-38.
[16] Wang, P. (2016). Application of stochastic differential equations to option pricing (Doctoral dissertation, University of Kansas).
[17] Zheng, Y. (2015). Asset pricing based on stochastic delay differential equations (Doctoral dissertation, Iowa State University).